ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 1998, № 1, с. 139–143

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 519.9

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ ПРОИЗВОДСТВА*

© 1998 г. В. М. Колбанов, В. Г. Медницкий

Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 10.06.97 г.

Статья посвящена анализу возможных способов формализации процессов перестройки производственных структур. Основной результат состоит в построении математического описания этой задачи в некотором классе нелинейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями (включающими фазовые переменные и переменные управления).

0. Введение. Исследование задачи, которой посвящена настоящая работа, удобно начать с небольшого иллюстрирующего примера. Пусть сначала имеется совсем простая производственная система, затрачивающая единицу рабочего времени для изготовления единицы продукта, а затем изобретается "машина", позволяющая использовать вместо "простого труда" "труд вооруженный", когда единицу продукта можно получить, затратив некоторое количество времени $\sigma > 0$, сопровождаемого работой машины. Если $\sigma < 1$, то имеет место рост производительности труда. Ситуация, однако, может осложняться тем, что для содержания машины "в исправном состоянии" необходимо (в пересчете на единицу рабочего времени) дополнительно нести затраты труда и продукта в количествах $\mu, \nu > 0$. В этом случае описание вариантов технологии производства можно представить с помощью матрицы

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1-\nu-\rho \\ 0 & -\sigma \quad 1 \quad 0 \\ -1 & -\sigma-\mu \quad 1 \end{bmatrix}, \qquad (0.1)$$

где $\rho \geq 1$ – то количество продукта (на единицу затраченного труда), которое можно получить, комбинируя с некоторыми интенсивностями исходный и новые способы производства. В связи с изложенным возникает три вопроса:

как оценить эффективность "новой" и "старой" систем и возможно ли вообще проводить их сопоставление;

если новая система более эффективна, то какими параметрами может (или должна) определяться ее конфигурация;

как построить программу перехода из старой системы в новую (если такой переход оказывается возможным и признается целесообразным)?

Даже в рассмотренном (и предельно упрощенном примере) достаточно очевидно только решение первого вопроса – неравенство $\rho > 1$, как легко видеть из (0.1), возможно лишь при выполнении условия

$$1/\sigma > (1 + \mu + \nu), \qquad (0.2)$$

а чтобы ответить на два последующих, нужна более детальная разработка и исследование модели, чему и посвящена работа.

1. Постановка задачи. В общем случае [1] стационарная производственная система может описываться соотношениями

$$Gu^t - Bv^t - y^t \geqq 0, \qquad (1.1)$$

$$M^{t-1} - F(u^t) \geqq 0, \qquad (1.2)$$

$$(E-\alpha)M^{t-1} + \mathscr{E}v^t - M^t = 0, \qquad (1.3)$$

$$-lu^t - mv^t \geqq -L_t, \qquad (1.4)$$

$$u^t, v^t, y^t \geqq 0 \forall t \in \{1, 2, \ldots, T\}. \qquad (1.5)$$

При наиболее известной интерпретации этой модели, восходящей к [2], предполагается, что G – матрица технологических процессов, в результате комбинации которых с некоторым набором интенсивностей (определенных вектором u^t) в векторе $x^t = Gu^t$ появляются конечные продукты производственной деятельности (т.е. выходящие за пределы производственной системы в периоде t). В соответствии с (1.1), по крайней мере, часть этой продукции некоторым образом распределяется между вектором y^t (входящие в него продукты используются непосредственно в потреблении) и инвестируемой частью, содержащейся в векторе Bv^t. В (1.3) псевдоединичной матрицей $\mathscr{E}$ устанавливается соответствие между мощностями и способами их развития, иначе говоря, вектором $\mathscr{E}v^t$ определяются создаваемые в периоде t объемы, а равенствами (1.3) описывается динамика накопленных (к началу периода t) запасов

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 97-01-00190).

мощностей (в векторе M^{t-1}) с учетом их выбытия в периоде t в объемах αM^{t-1}, где α – некоторый оператор выбытия (например, диагональный и $0 < \alpha_{ss} < 1$), описывающий этот процесс.

В (1.2) с каждой из компонент вектора M^t связывается калибровочная функция [3] некоторого фиксированного выпуклого множества. Весь же их набор собран в вектор-функции F и условиями (1.2), следовательно, описывается пересечение указанных множеств после того, как каждое из них подвергается некоторой гомотетии (с коэффициентом M_s^t). Так как по определению калибровочная функция $F(0) = 0$, а для прочих значений аргумента она выпукла, положительно определена и положительно однородна (первой степени), т.е.

$$\forall(z \geq 0 \ \& \ \sigma > 0){:}\ F(z) \geq 0 \ \& \ F(\sigma z) = \sigma F(z), \tag{1.6}$$

то $M^t \geqq 0 \ \forall t$, причем начальное значение этого вектора M^0 по смыслу задачи должно быть задано, а выбор конечного значения M^T представляет собой проблему, возможные решения которой целесообразно обсудить позже.

Заканчивая интерпретацию модели, можно предположить, что векторами l, m в (1.4) определяются коэффициенты затрат труда в процессах производства продукции (создания новых мощностей), а величиной L_t – общий его объем, который может использоваться в периоде t.

Для нас эта модель интересна потому, что она не позволяет использовать новый технологический способ производства простым вводом его в базис некоторой линейной модели, а связывает этот процесс с необходимостью создания (или конверсии) каких-то ресурсов мощностей.

2. Программа перехода. Основная идея модели, описывающей возможности перехода некоторой производственной системы в новое состояние, схематически показана на рисунке.

Исходная и возможная конфигурации системы представлены технологическими матрицами G_1, G_2 и независящими друг от друга наборами производственных функций F_1, F_2. Использовать каким-либо образом вторую из них сразу, однако, нельзя, так как она лишена мощностей: как видно

$M^{\circ 1}$	$M^{\circ 2}$	u^1	u^2	v^1	v^2	v^{12}	...	M^{t1}	M^{t2}
		G_1	G_2	$-B_1$	$-B_2$	$-B_{12}$			
		$-l^1$	$-l^2$	$-m^1$	$-m^2$	$-m^{12}$			
E_1		$-F_1$							
	E_2		$-F_2$						
$(E_1 - \alpha_1)$				$\mathscr{E}_1$		$-\mathscr{E}_{12}$			
	$(E_2 - \alpha_2)$				$\mathscr{E}_2$	$\mathscr{E}_{12}$	...		
								$-E_1$	$-E_2$
> 0	$= 0$							$\to 0$	> 0

Рисунок.

из рисунка, $M^{02} = 0$. Поэтому на начальных этапах можно, лишь оставаясь в исходной системе, создать какие-то потоки прироста мощностей для новой системы – либо через новое строительство $v^1 > 0$, либо с помощью конверсии при $v^{12} > 0$ (когда, как показано на рисунке, происходит передача мощностей из исходной системы в новую). В обоих случаях, однако, необходимо израсходовать какую-то часть производимой продукции (с нормами расхода в матрицах B_1 и B_{12}). Соответственно на следующих этапах перехода в новой системе уже могут сформироваться положительные значения мощностей $M^{t2} > 0$ и в дальнейшем либо обе используются совместно, либо окажется оптимальным вариант, когда $u^{t1} = 0$, $v^{t1} = 0$ (скажем, начиная с некоторого t_0), а правило для изменения мощностей описывается равенством $M^{1t} = (E - \alpha)M^{1t-1}$, т.е. используется только новая система, а мощности исходной монотонно стремятся к нулю (в предположении, что $(E - \alpha)$ – сжимающий оператор). Поэтому правый конец траектории M^T фиксировать нельзя, но можно задать в форме нижней границы, например, когда $\underline{M}^{T2} > 0$, а $\underline{M}^{T1} = 0$, то к (1.1)–(1.6) допустимо добавить условие

$$M^T \geqq \underline{M}^T. \tag{2.1}$$

Для завершения постановки задачи нужно выбрать критерий. Наиболее естественно его определить (с точки зрения приведенной выше интерпретации модели) как максимум некоторой функции, зависящей от набора векторов $y^1, \ldots, y^T$, описывающих потребление (во всех временных интервалах), и с этой целью удобно дополнить соотношения (1.1)–(1.6) и, например, (2.1) системой условий

$$y^t - \theta_t \underline{y}^t \geqq 0, \tag{2.2}$$

$$\theta_t - \theta \geqq 0 \forall t \in \{1, 2, \ldots, T\}, \tag{2.3}$$

$$\max \theta, \tag{2.4}$$

где вектором $\underline{y}^t$ определяется в каком-то смысле желательная структура потребления (в периоде t), а θ_t – масштабный множитель, с помощью которого произведением $\theta_t \underline{y}^t$ фиксируются достижимые нижние границы. Критерий перехода, таким образом, состоит в том, чтобы максимизировать нижний уровень потребления по всем значениям t.

3. Одношаговый процесс. Еще один возможный способ построения условия на правом конце траектории описываемой системы иллюстрируется в модели

$$\max \varphi(y), \tag{3.1}$$

$$Gu - Bv - y \geqq 0, \quad (3.2)$$

$$M^0 - F(u) \geqq 0, \quad (3.3)$$

$$(E - \alpha)M^0 + Ev - M^1 = 0, \quad (3.4)$$

$$-li - mv \geqq -L, \quad (3.5)$$

$$M^1 - M^0 \geqq 0, \quad (3.6)$$

$$u, v, y \geqq 0, \quad (3.7)$$

которая описывает производственную систему с произвольным критерием оптимальности потребления $\varphi(y)$, фиксированной технологией и ресурсом труда и произвольными наборами мощностей на начало M^0 и конец M^1 какого-то характерного периода производственного цикла, а в (3.6) вводится требование воспроизводимости этого цикла во всех последующих периодах. Таким образом, векторы M^1, M^0 включаются в перечень переменных, а условия оптимальности выбора их значений (учитывая, что они не имеют ограничений на знак) принимают вид

$$(M^0)\colon r + \mu^0(E - \alpha) - \mu^1 = 0, \quad (3.8)$$

$$(M^1)\colon \mu^1 - \mu^0 = 0, \quad (3.9)$$

где r, $\mu^1 \geqq 0$ и μ^0 – наборы множителей Лагранжа для условий (3.3), (3.6) и (3.4). Поскольку в соответствии с (3.9) можно положить $\mu = \mu^0 = \mu^1$, то из (3.8) $r = \mu\alpha$, и если α, как уже говорилось, – диагональный оператор с положительной главной диагональю, то $\mu = r\alpha^{-1} \geqq 0$ и последнее неравенство следует из условия $r \geqq 0$. Но это означает, что в действительности для любого оптимального решения (3.1)–(3.7) условия неотрицательности вектора μ^1 выполняются автоматически, т.е. специально их можно не накладывать, рассматривая набор переменных в μ^1 без ограничений на знак. В двойственном условии (3.6) тогда возникает равенство $M = M^1 = M^0$ и в соответствии с (3.4) получаем, что

$$M = \alpha^{-1}\mathscr{E}v. \quad (3.10)$$

После подстановки из (3.10) в (3.2) для определения набора векторов u, v, y возникает самостоятельная задача

$$\max\varphi(y),$$
$$Gu - Bv - y \geqq 0,$$
$$\alpha^{-1}\mathscr{E}v - F(u) \geqq 0,$$
$$-lu - mv \geqq -L,$$
$$u, v, y \geqq 0, \quad (3.11)$$

описывающая в некотором смысле идеальный вариант функционирования рассматриваемой системы. Легко видеть, однако, что в модели (1.1)–(1.6), (2.1)–(2.4) можно создать на правом конце траектории модель типа (3.11), заменяя в (2.1) неравенства, относящиеся к вектору $\underline{M}^{T2}$, условием

$$M^{T2} - M^{(T-1),2} \geqq 0 \quad (3.12)$$

и сохраняя (2.1) лишь для вектора M^{T1}.

4. О существовании двойственной задачи. Вместо условия (1.2) мы бы могли использовать системы линейных неравенств типа

$$M^{t-1} - \Phi_t u^t \geqq 0, \quad (4.1)$$

где Φ_t – набор нормативных матриц (с элементами φ_{ijt}), например, при условиях

$$\forall t\colon \Phi_t \geq 0 \ \& \ \max_i \varphi_{ijt} > 0 \forall j,$$

гарантирующих невозможность производства для какого-либо значения t при $M^{t-1} = 0$. В этом случае наша задача превращается в задачу линейного программирования, причем возникает даже не одна, а несколько таких задач в зависимости от типа условия на правом конце и пара двойственных задач (например, при условии (2.1)), как нетрудно проверить, принимает вид

$$\max\theta, \quad (4.2)$$

$$Gu^t - Bv^t - \theta_t \underline{y}^t \geqq 0, \quad p^t \geqq 0, \quad (4.3)$$

$$M^{t-1} - \Phi_t u^t \geqq 0, \quad r^t \geqq 0, \quad (4.4)$$

$$-lu^t - mv^t \geqq -L_t, \quad \rho_t \geqq 0, \quad (4.5)$$

$$\theta_t - \theta \geqq 0, \quad \sigma_t \geqq 0, \quad (4.6)$$

$$u^t \geqq 0, \quad p^t G - r^t \Phi_t - \rho_t l \leqq 0, \quad (4.7)$$

$$v^t \geqq 0, \quad \mu^t \mathscr{E} - p^t B - \rho_t m \leqq 0, \quad (4.8)$$

$$M^T \geqq \underline{M}^T, \quad \mu \geqq 0, \quad (4.9)$$

$$(E - \alpha)M^{t-1} + \mathscr{E}v^t - M^t = 0, \quad \mu^t, \quad (4.10)$$

$$M^t, \quad \mu^{t+1}(E - \alpha) + r^{t+1} - \mu^t = 0 \forall t < T, \quad (4.11)$$

$$M^T, \quad \underline{\mu} - \mu^T = 0, \quad (4.12)$$

$$\theta_t, \quad \sigma_t - p^t \underline{y}^t = 0, \quad (4.13)$$

$$\theta, \quad \Sigma\sigma_t = 1, \quad (4.14)$$

$$\min\{\Sigma\rho_t L_t + [r^1 + \mu^1(E - \alpha)]M^0 - \underline{\mu M}^T\}. \quad (4.15)$$

Связь между ними и исходной задачей (в которой вместо условий (4.1) используются (1.2)) основывается на том простом замечании, что при определенном выборе матриц Φ_t неравенства, расположенные в (4.16) справа,

$$r^t \geqq 0, \quad \Phi_t u^t \leqq F(u^t) \qquad (4.16)$$

для всех калибровочных функций в F – неравенства Фенхеля [4] и соответственно выполняются всегда. Иначе говоря, (4.1) следуют из (1.2) при любых u^t, а значит, любой набор u^t, v^t, M^t, θ_t, θ, допустимый в исходной задаче, удовлетворяет и (4.3)–(4.10), а тогда неравенство

$$\theta \le \Sigma\rho_t L_t + [r^1 + \mu^1(E - \alpha)]M^0 - \underline{\mu M}^T \qquad (4.17)$$

имеет место для любых допустимых решений исходной и двойственной в (4.2)–(4.15) задач по известному свойству пары двойственных задач линейного программирования. С другой стороны, если бы для какой-то пары указанных решений в (4.17) возникло равенство, то все неравенства в (4.3)–(4.14) должны выполняться с дополняющей нежесткостью и мы получаем, что $r^t M^{t-1} = r^t \Phi_t u^t \le \le r^t F(u^t) \le r^t M^{t-1}$, а значит, с дополняющей нежесткостью выполняются и неравенства в (4.16). Но если все неравенства в (4.3)–(4.14) и (4.16) выполнены с дополняющей нежесткостью, то в (4.17) имеет место равенство, а значит, если, кроме того, выполняются (1.2), то оба решения оптимальны в соответствующих задачах.

5. Декомпозиционный алгоритм. Таким образом, решение нашей задачи можно начать, задав произвольно некоторый набор матриц Φ_t в аппроксимирующей задаче линейного программирования (4.2)–(4.15). Построив ее оптимальное решение, можно обнаружить, что $r_s^t > 0$ для некоторых мощностей s и моментов t. Соответственно $M_s^t = \varphi^{st} u^t \le F_s(u^t)$, и, значит, если в действительности для всех таких s и t имеют место равенства $M_s^t = F_s(u^t)$, а для прочих s, t выполняются условия (1.2), то в аппроксимирующей задаче построено оптимальное решение исходной задачи, либо

$$\max_{s,t}\{F_s(u^t) - M_s^t\} > 0 \qquad (5.1)$$

и оптимальное решение аппроксимирующей задачи в исходной недопустимо. Однако сам факт выполнения условия (5.1) для некоторых s и t позволяет построить опорный функционал, причем различными способами, к множеству U_s (калибровочной функцией которого является F_s) и тем самым улучшить аппроксимирующую модель в (4.1).

Отметим, что в использовании для этого множества классического определения выпуклой фигуры [4] ($0 \in U_s$ и на любом луче вида $z = \lambda z^0$, $\lambda > 0$, $z^0 \ne 0$ в U_s содержится лишь ограниченная его часть $0 < \lambda \le \lambda < +\infty$) нет необходимости, да это было бы и не естественно, так как по физическим соображениям векторы $u \geqq 0$. Соответственно можно предположить, что U_s лишь пересекается с какой-то частью полуположительного конуса (т.е. когда в приведенном выше определении $z^0 \ge 0$, а для некоторых направлений возможны значения $\lambda^0 = 0$ и весь луч в U_s не входит). Используя в этом случае для построения F_s классическую конструкцию, описанную в [4], достаточно предположить, что на лучах, не содержащихся в U_s, функция F_s принимает значение $+\infty$, а значит, $\mathrm{dom} F_s$ совпадает с той частью полуположительного конуса, которая имеет не пустое пересечение с U_s. Сами по себе эти предположения конечно, не исключают возможности, что множество $U = \bigcap U_s$ уже не будет содержать элементов полуположительного конуса и, таким образом, существование в U элементов вида $u \ge 0$ – дополнительное и необходимое предположение (иначе $u^t = 0 \forall t$ было бы единственным возможным решением нашей задачи). Конечно, одного этого предположения для исключения указанного решения не достаточно, но более глубокое обсуждение вопросов существования решений и сходимости алгоритма выходит за рамки настоящей статьи.

6. Иллюстрирующий пример. Вернемся теперь к матрице G в (0.1), представляющей старую и новую производственные системы. Предположим, что в новой системе для использования машины необходимо создать некоторую мощность, оптимальный размер которой определяется в модели (3.11), где $\varphi(y)$ – монотонно-возрастающая функция единственной переменной ρ (так что остается только максимизировать ρ), α – теперь скалярная величина, указывающая норму выбытия мощности, а β и γ – затраты продукта и "вооруженного" труда, необходимые для создания единичной мощности. Далее пусть u_1 – объем производства продукта, u_2 – интенсивность использования машины и v_2 – прирост мощности. Полагая $F(u_1, u_2) = u_2$, получим для единичного количества труда такую систему

$$u_1 - \nu u_2 - \beta v_2 - \rho = 0,$$

$$-\sigma u_1 + u_2 - \gamma v_2 = 0,$$

$$\sigma u_1 + \mu u_2 - \gamma v_2 = 1,$$

$$-\alpha u_2 + v_2 = 0.$$

Как нетрудно проверить, ее определитель равен $\sigma(1 + \mu)$ и, таким образом, отличен от нуля при любых σ, $\mu \ge 0$. Решение единственное и определяется по формулам

$$u_1 = (1 - \alpha\gamma)/[\sigma(1 + \mu)], \quad u_2 = (1 + \mu)^{-1},$$
$$v_2 = \alpha/(1 + \mu).$$

Система допускает физическую реализацию, если $\alpha\gamma \le 1$ и $\rho > 1$ при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\sigma} > \frac{1+\mu+\nu+\alpha\beta}{1-\alpha\gamma} \ge 1+\mu+\nu. \qquad (6.1)$$

При $\alpha = 0$ (когда раз созданная мощность существует вечно) $v_2 = 0$ и (6.1) переходит в (0.2). С приближением же $\alpha\gamma$ к единице производительность "вооруженного" труда $1/\sigma$ должна неограниченно расти, так как иначе $\rho \le 1$ и эффективнее становится простая система (поскольку там $\rho = 1$ всегда). Переход в новую систему, однако, можно начать только из простой системы

$$u_1 - \beta v_1 - \rho = 0, \quad u_1 + \delta v_1 = 1,$$

(где $\delta > 0$ – затраты простого труда на создание единичного прироста мощности, а v_1 – прирост). Если $v_1 > 0$, то по крайней мере на первом шаге $\rho < 1$ и без использования "коэффициентов усиления" $\underline{y}_t > 1$ (когда $\rho_t = \theta_t \underline{y}_t$) нельзя было бы добиться, чтобы в модели, строящей программу перехода, хотя бы для достаточно больших t выполнялось условие $\rho_t > 1$. Таким образом, ее элементы связаны друг с другом вполне органично. Информация же для построения более сложных критериев оптимальности перехода в настоящее время, по-видимому, отсутствует. Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что из (6.1) следует неравенство $1 > \sigma(\nu + \alpha\beta) + \alpha\gamma$ и теперь из двойственных условий можно получить, что новая система будет экономически эффективнее исходной лишь при выполнении, кроме (6.1), еще одного неравенства, делающего невыгодным использование простого труда в строительстве

$$\frac{\delta}{\gamma} > \frac{1+\mu}{1-\alpha\gamma-\sigma(\nu+\alpha\beta)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Медницкий В.Г.* Об экономической эффективности производства // Экономика и мат. методы. 1996. Т. 32. Вып. 2.
2. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.