АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 11

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1971

УДК 681.142.2

О СУММИРОВАНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

С. А. АБРАМОВ

(Москва)

Излагается алгоритм решения следующей задачи: пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональная функция указанных переменных с рациональными (действительными, комплексными) коэффициентами; выяснить, существует ли рациональная функция $G(v, w, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из того же поля такая, что $\sum_{x_1=v}^{w} F(x_1, \ldots, x_n) = G(v, w, x_2, \ldots, x_n)$ для всех целочисленных значений $v \leqslant w$. Если G существует — то построить ее. Обсуждается реализация алгоритма на языке ЛИСП.

Рассматривается задача суммирования рациональных функций, представляющая интерес при решении многих комбинаторных задач. Дается постановка и алгоритм решения этой задачи. Обсуждается результат его реализации на алгоритмическом языке ЛИСП [1] для машины БЭСМ-6.

В статье используются элементарные сведения из алгебры и теории конечных разностей. Эти сведения содержатся, например, в [2] и [3].

§ 1

Пусть P — некоторое поле. Будем придерживаться следующих обозначений: $P[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов, $P\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ — поле рациональных функций переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из P. Если $f(x)$, $g(x) \in P[x]$, то НОД $(f(x), g(x))$ означает наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$ в $P[x]$, а $\deg f(x)$ — степень многочлена $f(x)$.

Нас будут интересовать лишь поля характеристики 0. В такие поля естественным образом вкладывается кольцо целых чисел. Образы этого вложения с естественным упорядочением мы будем называть целыми числами. Если P — такое поле, то можно поставить следующую задачу: пусть $F(x) \in P\langle x\rangle$; выяснить, существует ли рациональная функция $H(w, v) \in P\langle v, w\rangle$ такая, что

$$\sum_{x=v}^{w} F(x) = H(v, w) \tag{1}$$

для всех целочисленных значений $v \leqslant w$.

Задача (1) эквивалентна следующей: выяснить, существует ли рациональная функция $G(x) \in P\langle x\rangle$, удовлетворяющая простейшему конечноразностному уравнению

$$G(x+1) - G(x) = F(x). \tag{2}$$

Известно, что уравнение (2) имеет решение в случае, когда $F(x)$ — многочлен. Мы отвлекаемся от этого случая и полагаем ниже, что степень знаменателя $F(x)$ (считаем $F(x)$ несократимой) не ниже 1. Отметим, что если $F(x)$ — многочлен, то задача сразу сводится к решению уравнения (6) при $g_1(x) = 1$.

Мы дадим алгоритм, применимый к произвольной рациональной функции $F(x)$ и распознающий возможность построения $G(x)$, удовлетворяющей (2) и осуществляющей это построение в тех случаях, когда оно возможно, в предположении, что поле P подпадает под

Определение 1. Поле P характеристики 0 называется подходящим, если существует алгоритм, позволяющий по многочлену $p(x) \in P[x]$ найти все целочисленные корни уравнения $p(x) = 0$.

Поля рациональных, действительных и комплексных чисел являются подходящими. Кроме того легко убедиться, что справедливо

Предложение 1. *Пусть P — подходящее поле. Тогда $P\langle x\rangle$ — также подходящее поле.*

Пусть $F(x)$ — некоторая рациональная функция и $s(x)$ — знаменатель несократимой формы $F(x)$. Постановка задачи (1) заставляет считать необходимым условием существования $H(v, w)$ отсутствие целочисленных корней уравнения $s(x) = 0$. Так как коэффициенты лежат в подходящем поле, это условие легко проверяется. Наш алгоритм позволяет решать несколько более общую задачу: исследовать, существует ли $H(v, w)$, удовлетворяющая (1) при всех целочисленных значениях v и w таких, что $w \geqslant v > x_0$, где x_0 — наибольший целочисленный корень уравнения $s(x) = 0$; если $H(v, w)$ существует — то построить ее.

Далее на протяжении всей статьи под P понимается некоторое подходящее поле.

Определение 2. Пусть $f(x) \in P[x]$ и $\deg f(x) > 0$. Разбросом многочлена $f(x)$ (обозначение $\operatorname{dis} f(x)$) будем называть наибольшее из всех целых чисел α, для которых

$$\deg \text{НОД}(f(x), f(x+\alpha)) \geqslant 1. \tag{3}$$

(Ограниченность множества таких чисел следует из единственности разложения на неприводимые множители в $P[x]$.)

Предложение 2. *Пусть $f(x) \in P[x]$ и $\deg f(x) > 0$. Тогда $\operatorname{dis} f(x)$ может быть вычислен.*

Покажем, как могут быть вычислены все целые числа, удовлетворяющие (3). Составим многочлен $f_1(x) = f(x+h) \in P\langle h\rangle[x]$. Воспользуемся тем, что при каждом конкретном целом h можно найти НОД$(f(x), f(x+h))$ в $P[x]$ по алгоритму Евклида.

Разделим $f_1(x)$ на $f(x)$ в $P\langle h\rangle[x]$ с остатком:

$$f_1(x) = a(x)f(x) + b(x), \qquad \deg b(x) < \deg f(x). \tag{4}$$

Так как P — подходящее поле, то мы можем найти все целочисленные значения $h_0, \ldots, h_i$, при подстановке которых в (4) старший коэффициент $b(x)$ обращается в 0.

Проверкой отбираем из $h_0, \ldots, h_i$ те, для которых $f(x)$ и $f(x+h)$ имеют нетривиальный НОД. Для всех $h \neq h_0, \ldots, h_i$ первое деление с остатком задается формулой, получающейся подстановкой в (4) значения h. Можем найти все значения h, при которых $b(x)$ нулевой в $P[x]$.

Таким же образом будем продолжать процесс, пока остаток не станет нулевым в $P\langle h\rangle[x]$. После этого останется выбрать наибольший элемент из некоторого конечного набора чисел.

Примечание. Величина $\operatorname{dis} f(x)$ может быть вычислена и как значение наибольшего целочисленного корня результанта многочленов $f(x)$ и $f(x+h)$, рассматриваемых как элементы кольца $P[h][x]$.

Предложение 3. *Пусть $F_1(x), F_2(x) \in P\langle x\rangle$, причем $F_1(x+1) - F_1(x) = F_2(x)$ и $F_1(x), F_2(x)$ имеют несократимые формы, соответственно, $f_{11}(x) / f_{12}(x)$ и $f_{21}(x) / f_{22}(x)$ $(f_{ij}(x) \in P[x])$. Тогда $\operatorname{dis} f_{12}(x) = \operatorname{dis} f_{22}(x) - 1$.*

Разложим $F_1(x)$ в сумму простейших дробей:

$$F_1(x)=\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{q_i(x)}{p_i(x)^{j(i)}}+g(x)$$

(здесь $p_i(x)$, $i=1,\ldots,\lambda$,— неприводимые в $P[x]$, $q_i(x)$, $g(x)\in P[x]$ и $\deg q_i(x)<$ $<\deg p_i(x)^{j(i)}$). Пусть

(5) $$\operatorname{dis} f_{12}(x)=\alpha,\ p_1(x+\alpha)=p_2(x).$$

Учитывая, что разложение в сумму простейших дробей единственно и что замена $x\to x+1$ переводит неприводимый многочлен в неприводимый, получаем разложение $F_2(x)$:

$$F_2(x)=g(x+1)-g(x)+\frac{q_1(x+1)}{p_1(x+1)^{j(1)}}+\frac{q_2(x+1)}{p_1(x+\alpha+1)^{j(2)}}-\frac{q_1(x)}{p_1(x)^{j(1)}}-$$

$$-\frac{q_2(x)}{p_1(x+\alpha)^{j(2)}}+\sum_{i=3}^{\lambda}\left(\frac{q_i(x+1)}{p_i(x+1)^{j(i)}}-\frac{q_i(x)}{p_i(x)^{j(i)}}\right).$$

Условие (5) показывает, что под знаком суммы в правой части последнего равенства не найдется простейших дробей, имеющих в знаменателях некоторые степени $p_1(x+\alpha+1)$ и $p_1(x)$, откуда и следует утверждение (здесь несущественно, что P — подходящее).

Если для некоторого элемента $F(x)\in P\langle x\rangle$ существует $G(x)$ такой, что $G(x+1)-$ $-G(x)=F(x)$, то знаменатель несократимой дроби, эквивалентной $G(x)$, может быть легко вычислен. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ имеют несократимые формы $f_1(x)\,/\,f_2(x)$ и $g_1(x)\,/\,g_2(x)$ соответственно и $\operatorname{dis} f_2(x)=\alpha$.

Тогда

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{f_1(x+i)}{f_2(x+i)}=\frac{g_1(x+\alpha)g_2(x)-g_1(x)g_2(x+\alpha)}{g_2(x+\alpha)g_2(x)}.$$

Учитывая, что $g_1(x)\,/\,g_2(x)$ несократимая и что НОД$(g_2(x+\alpha),\ g_2(x))=1$ (см. предложение 3), заключаем, что если мы вычислим несократимую дробь

$$\frac{s(x)}{t(x)}=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{f_1(x+i)}{f_2(x+i)},$$

то с точностью до обратимых множителей $t(x)=g_2(x+\alpha)g_2(x)$. Можем написать далее: $t(x+\alpha)=g_2(x+2\alpha)g_2(x+\alpha)$, $t(x)\,/\,t(x+\alpha)=g_2(x)\,/\,g_2(x+2\alpha)$. Дробь, стоящая в правой части последнего равенства, несократима, а дробь, стоящая в левой части, нам известна. Можем найти $g_2(x)$.

Вследствие этого задача сводится к следующей: по данным многочленам $p(x)$, $g_2(x)\in P[x]$ распознать возможность построения многочлена $g_1(x)\in P[x]$ такого, что

(6) $$p(x)=g_1(x+1)g_2(x)-g_2(x+1)g_1(x),$$

и если построение возможно, то выполнить его.

Полагая, что $g_1(x)$ существует и что

(7) $$g_1(x)=a_nx^n+\ldots+a_0,\qquad g_2(x)=b_mx^m+\ldots+b_0,$$

легко вычислить коэффициент при $(m+n-1)$-й степени многочлена, стоящего в правой части (6) (коэффициент при степени $m+n$ заведомо равен нулю). Этот коэффициент равен $(n-m)a_nb_m$. Таким образом, имеет место одно из двух равенств: $n=m$ или $n=\deg p(x)-m+1$.

После того как стала известной степень $g_1(x)$, для решения уравнения (6) можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, что приведет нас к исследованию существования решения и, возможно, к решению системы линейных уравнений порядка $\deg g_1(x)$, которая в случае совместности имеет ранг $\deg g_1(x)-1$ (последнее следует из того, что решение уравнения (6) в нашем случае может быть найдено с точностью до произвольного слагаемого из поля коэффициентов). Не обязательно выписывать эту систему, можно воспользоваться рекурсивной процедурой поиска решения уравнения (6) в виде многочлена степени не выше n. Пусть $m\neq n$. Полагая $g_1=a_nx^n+g_1'$, $\deg g_1'=n-1$, получим $g_1'(x+1)g_2(x)-g_1'(x)g_2(x+1)+a_n(x+1)^ng_2(x)-a_nx^ng_2(x+1)=p(x)$. Степень многочлена $g_2(x)g_1'(x+1)-g_2(x+1)g_1'(x)$ не выше $m+n-2$. Степень многочлена $a_nx^ng_2(x+1)+a_n(x+1)^ng_2(x)$ не выше $m+n-1$, причем коэффициент при $(m+n-1)$-й степени есть $(n-m)a_nb_m$, откуда a_n находится, если $\deg p(x)\leqslant m+n-1$; в противном случае решения не существует.

Пусть теперь $m=n$. Тогда в обозначениях (7) коэффициент при старшей $(n+m-2)$-й степени в правой части (6) равен $b_{m-1}a_n-b_ma_{n-1}$, причем $b_m\neq 0$. Если степень $p(x)$ выше $n+m-2$, то решения нет.

Правило умножения многочленов и сделанное замечание о ранге системы уравнений для коэффициентов дают основание утверждать, что a_n может быть взято произвольным, в частности равным нулю.

Таким образом, мы в обоих случаях либо убеждаемся, что решения нет, либо переходим от уравнения (6) к уравнению

$$p'(x)=g_2(x)g_1'(x+1)-g_2(x+1)g_1'(x),\qquad \deg g_1'(x)=\deg g_1(x)-1.$$

Если ищется решение (6) в виде многочлена нулевой степени, то исследование тривиально.

Описание алгоритма на этом заканчивается.

Отметим, что наличие изоморфизма между $P\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ и $P\langle x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle\langle x_n\rangle$ и утверждение предложения 1 дают возможность применять описанный алгоритм к рациональным функциям многих переменных с коэффициентами из подходящего поля в задаче решения уравнения

$$G(x_1,\ldots,x_n+1)-G(x_1,\ldots,x_n)=F(x_1,\ldots,x_n).$$

§ 2

Описанный алгоритм (для задачи с несколькими переменными) реализован автором статьи в виде программы на алгоритмическом языке ЛИСП. В качестве поля коэффициентов взято поле рациональных чисел.

Несколько результатов применения программы. 1. Вычислить

$$\sum_{i=1}^{n} i_3.$$

Ответ $(n^4+2n^3+n^2)/4$. Время счета 8 *сек.*

2. Вычислить

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{6i+3}{4i^4+8i^3+8i^2+4i+3}.$$

Ответ $(n^2+2n)/(2n^2+4n+3)$. Время счета 15 *сек.*

3. Вычислить

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+n^2-3i+3n-2in+2}.$$

Ответ $n/(n+1)$. Время счета 20 *сек.*

4. Вычислить

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

Ответ: данное выражение не является рациональной функцией от n. Время счета 5 *сек.*

Автор выражает глубокую признательность С. С. Лаврову, В. А. Диткину, В. М. Курочкину и А. Г. Постникову за ценные консультации.

Поступила в редакцию 4.02.1971

Цитированная литература

1. С. С. Лавров, Г. С. Силагадзе. Входной язык и интерпретатор системы программирования на базе языка ЛИСП для машины БЭСМ-6. М., ИТМ и ВТ АН СССР, 1969.
2. С. Ленг. Алгебра. М., «Мир», 1968.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.