ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 1999, № 3, с. 104–111

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.9

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ[1]

© 1999 г. В. Г. Медницкий, Ю. В. Медницкий
Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 19.11.98 г.

Статья посвящена описанию и анализу одной из возможных схем разложения глобальной задачи оптимального планирования, при которой в одном из блоков формируется задача отраслевой оптимизации. Показано, что декомпозиция в этом случае может быть только трехуровневой. Обе модели определены в одном классе нелинейных задач выпуклого программирования.

Введение. В общей постановке [1] математическая модель задачи оптимального планирования описывается соотношениями

$$\max\{u(z)|z \in Y\}, \tag{0.1}$$

где Y – множество допустимых значений вектора z (обычно конечномерного), а функцией u устанавливается критерий выбора оптимального элемента. При использовании ее в приложениях структура множества Y и вид функции u, конечно, должны каким-то образом конкретизироваться и в настоящей работе рассматриваются две реализации этой модели. В первой ее можно интерпретировать как задачу определения оптимальных значений вектора конечной продукции в некоторой замкнутой производственной системе – множество

$$Y = \{z|z \in Z, \;\; z \geqq 0\}, \tag{0.2}$$

где Z – технологическое множество указанной системы. Здесь, впрочем, будет рассматриваться только одно из частных представлений этого множества с оператором технологического преобразования обобщенного леонтьевского типа [2]

$$z = (\mathscr{E} - A)x, \tag{0.3}$$

когда матрицы $A \geq 0$ и псевдоединичная $\mathscr{E}$ (в каждом ее столбце содержится только один, отличный от нуля элемент, равный единице) в общем случае прямоугольные, имеют одинаковые размерности и в $A(\mathscr{E})$ нет нулевых столбцов (строк), а вектором x при дополнительных ограничениях

$$F(x) \leqq M, \;\; x \geqq 0 \tag{0.4}$$

определяются выпуски предприятий. Вектор мощностей $M > 0$ при этом зафиксирован, а скалярные компоненты f_j вектора F – калибровочные функции некоторых выпуклых множеств [3] $\underline{X}_j$, $j \in J$.

В содержательной интерпретации множеством $\underline{X}_j$ описываются производственные возможности предприятия j с продукцией в номенклатуре наименований $i \in I_j$ и вектором объемов производства $x^j \in X_j = \{x^j|x^j \in \underline{X}_j, x^j \geqq 0\}$. Соответственно (0.4) эквиваленты условиям $x \in X = X_1 \times X_2 \times \times \ldots \times X_N$, где $N = |J|$, а компоненты вектора z, содержащего допустимые (по технологии производства) комбинации объемов выпуска и потребления продуктов, определены на множестве всех их наименований $I = \bigcup I_j$, как и элементы множества Y. Однако последние в соответствии с (0.2) не только входят в Z, т.е. осуществимы при данной технологии производства, но, кроме того, в силу условия $z \geqq 0$ ими определяются такие комбинации объемов выпуска, в которых наборы продуктов могут выходить за пределы производственной системы; эта продукция здесь и называется конечной, а вся конструкция подробнее обсуждалась в [4, 5].

В оптимизационных задачах, возникавших в практических расчетах [6–8], значительно чаще использовалась модель другого типа с линейным критерием – обычно в форме

$$\min cx, \tag{0.5}$$

и ограничения, которые кроме (0.4) включают еще равенства

$$\mathscr{E}x = b. \tag{0.6}$$

В этой модели компонентами векторов b и c устанавливаются заданные эмпирически объемы потребностей рассматриваемой системы во всех видах продукции и коэффициенты затрат на единицу продукции (для тех предприятий, где соответствующие продукты могут производиться). Из-за технологических особенностей специализа-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 97-01-00190).

ции предприятий задача (0.4)–(0.6) обычно распадается по отраслям производства, т.е. на отраслевые задачи, между собой не связанные. Здесь, однако, указанное обстоятельство не существенно и (0.4)–(0.6) рассматривается как единая задача, что, конечно, тоже возможно и допустимо, а с математической точки зрения даже несколько упрощает изложение. В дальнейшем будем называть ее отраслевой задачей и глобальной – задачу (0.1)–(0.4).

Если оптимальные решения (0.4)–(0.6) рассматривать в качестве приближений к какому-либо из оптимальных решений (0.1)–(0.4) y, $\underline{x}$, то естественным образом возникают две гипотезы: 1) компоненты вектора b должны соответствовать приближенным оценкам потребностей глобальной системы в различных видах продукции, значения которых, в действительности, должны определяться вектором $a = y + A\underline{x}$ и 2) что вектор c, скорее всего, должен быть связан с равенством типа

$$c = qA, \tag{0.7}$$

где вектор q соотносится каким-то образом с двойственными переменными, формирующимися вместе с оптимальным решением глобальной задачи.

1. Условия оптимальности. Обе эти гипотезы проверить нетрудно, так как условия оптимальности решений рассматриваемых задач выписываются непосредственно. Для (0.1)–(0.4) имеют место, в частности, такие соотношения

$$\forall z\colon u(z) \le u(y) + \omega(z - y), \tag{1.1}$$

$$y \geqq 0, \quad \omega \leqq p, \quad \omega y = py, \tag{1.2}$$

$$y \in Z \ \&\ p(y - z) \ge 0 \quad \forall z \in Z, \tag{1.3}$$

достаточность которых проверяется непосредственно, а поскольку X выпукло, то существование векторов ω, p, удовлетворяющих (1.1)–(1.3), будет и необходимо для оптимальности векторов y, $\underline{x}$ в (0.1)–(0.4), если функция u вогнута, собственная и $\operatorname{ri}\operatorname{dom}u \cap \operatorname{ri}Y \ne \varnothing$ [9]. Для существования же решения, поскольку множество X компактно, достаточно потребовать замкнутости u; в силу полунепрерывности u сверху [9] максимум достигается по классической теореме анализа [10].

В отраслевой задаче условия (0.6) и $x \in X$ могут быть несовместны, и тогда она не имеет допустимых решений, но если их множество не пусто, то в силу компактности оптимальное решение (здесь его удобно обозначить тем же символом $\underline{x}$) существует при любом выборе вектора c, а необходимые и достаточные условия оптимальности с использованием некоторых свойств калибровочных функций и полярных соответствий [3, 9] можно представить с помощью соотношений

$$\mathscr{E}\underline{x} = b, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} \underline{x} \geqq 0, \quad w\mathscr{E} \leqq c + r\Phi(\underline{x}), \\ w\mathscr{E}\underline{x} = c\underline{x} + r\Phi(\underline{x})\underline{x}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$F(\underline{x}) \leqq M, \quad r \geqq 0, \quad rF(\underline{x}) = rM, \tag{1.6}$$

$$\Phi(\underline{x})x \le F(x) \quad \forall x, \quad r\Phi(\underline{x})\underline{x} = rF(\underline{x}), \tag{1.7}$$

которые напоминают условия распределительной задачи линейного программирования (когда неравенства $\Phi x \leqq M$ с фиксированной матрицей Φ заменяют в (0.4) исходные условия $F(x) \leqq M$). Однако в рассматриваемой модели матрица $\Phi(\underline{x})$ строится (и изменяется) вместе с оптимальным вектором $\underline{x}$.

Из дополняющей нежесткости всех пар неравенств, входящих в (1.5)–(1.7), получаем ,что

$$wb - rM = c\underline{x}. \tag{1.8}$$

Это равенство аналогично известному в линейном программировании [11] условию совпадения значений функционалов двойственных задач на оптимальных решениях. Указанную аналогию можно продолжить: пару векторов w, r, удовлетворяющую вместе с некоторой матрицей $\Phi(\underline{x})$ входящим в (1.5) и (1.6) неравенствам $w\mathscr{E} \leqq c + r\Phi(\underline{x})$ и $r \geqq 0$, будем называть допустимым набором двойственных переменных. Комбинируя их с любым из допустимых решений отраслевой задачи x, получим такую цепочку соотношений $wb = w\mathscr{E}x \le cx + r\Phi(\underline{x})x \le cx + rF(x) \le cx + rM$, а значит, для любой комбинации допустимых решений

$$wb - rM \le cx. \tag{1.9}$$

Пока вектор c остается произвольным, то уловить какую-либо связь между оптимальными решениями глобальной и отраслевой задач трудно, да ее, по-видимому, и действительно не существует. Однако если вектор c определен из (0.7), то неравенства $qAx \ge qA\underline{x}$ и $q(\mathscr{E} - A)\underline{x} \ge q(\mathscr{E} - A)x$, следуют одно из другого, поскольку $q\mathscr{E}\underline{x} = q\mathscr{E}x = qb$ в соответствии с (0.6) и (1.4), а значит, множества оптимальных решений задач

$$\max\{q(\mathscr{E} - A)x \mid x \in X, \quad \mathscr{E}x = b\} \tag{1.10}$$

и (0.4)–(0.6) совпадают. Но, как видно из (0.3) и (1.3), вектор $\underline{x}$ удовлетворяет условиям, определяющим экстремальную задачу: $\underline{x} \in X \ \&\ p(\mathscr{E} - A)\underline{x} \ge p(\mathscr{E} - A)x \ \forall x \in X$, которая отличается от задачи

$$\max\{q(\mathscr{E} - A)x \mid x \in X\} \tag{1.11}$$

только вектором, формирующим функционал, т.е. при переходе к (1.10) p действительно заменяется вектором q, но кроме того к ограничениям $x \in X$ в (1.11) добавляется условие (0.6). Умножая, однако, (1.8) на – 1 и прибавляя к обеим частям qb, получим $q(\mathscr{E} - A)\underline{x} = rM + (q - w)b$ и теперь нетрудно показать, что вектором $s = q - w$ определен набор двойственных переменных для условия (0.6) в (1.10). Таким образом, можно предположить, что при $s = 0$, т.е. когда условие (0.6) становится не существенным, (1.10) переходит в (1.11). Это замечание уточняются в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть $W(q, b)$ – множество возможных значений вектора w в (1.4)–(1.7), вектор c построен в соответствии с (0.7) и $q \in W(q, b)$. В этом случае все оптимальные решения (1.10) содержатся среди оптимальных решений (1.11). Если же какое-либо из оптимальных решений (1.11) (при некотором q) допустимо в (1.10) (при некотором b), то оно будет в (1.10) и оптимальным решением и при этом $q \in W(q, b)$.

Действительно, если $q \in W(q, b)$ и $c = qA$, то из (1.5) и (1.7) для любого $x \geqq 0$ получим $q(\mathscr{E} - A)x \le$ $\le r\Phi(\underline{x})x \le rF(x)$, и если $x \in X$, т.е. кроме того $F(x) \leqq M$, то $q(\mathscr{E} - A)x \le rM$, а из (1.8) в этом случае следует, что $rM = q(\mathscr{E} - A)\underline{x}$. Если же вектор $\underline{x}$ оптимален в (1.11) и допустим в (1.10), то выполняются (1.4), (1.6) и (1.7), а вместо (1.5) получим

$$\underline{x} \geqq 0, \quad q(\mathscr{E} - A) \leqq r\Phi(\underline{x}), \\ q(\mathscr{E} - A)\underline{x} = r\Phi(\underline{x})\underline{x} \tag{1.12}$$

и, полагая $w = q$, можно представить (1.12) в форме (1.5), т.е. $\underline{x}$ – одно из оптимальных решений в (1.10), а $q \in W(q, b)$.

Следствие 1. Если $\underline{x}$ – одно из оптимальных решений задачи (1.11), то а) $q\eta = rM$ для $\eta =$ $= (\mathscr{E} - A)\underline{x}$, а $qz \le rM$ $\forall z \in Z$ и б) вектор $\underline{x}$ будет одним из оптимальных решений задачи (1.10), а значит, и отраслевой, если положить $b = \mathscr{E}\underline{x}$.

Теперь естественно поставить вопрос: как использовать оптимальные решения некоторой совокупности отраслевых задач, полученные при различных значениях векторов q и b для построения оптимального решения глобальной задачи? Ответ будем искать в форме метода декомпозиции.

2. Линеаризация и декомпозиция глобальной задачи. Предварительно задачу (0.1)–(0.4) удобно линеаризовать. Для этого используем определение сопряженной функции u_* (к вогнутой u [9]), которое в наших обозначениях принимает вид

$$u_*(\omega) = \inf_z\{\omega z - u(z)\}. \tag{2.1}$$

Поскольку из (1.1) и определения инфимума следуют неравенства

$$\inf_z\{\omega z - u(z)\} \ge \omega y - u(y) \ge \inf_z\{\omega z - u(z)\},$$

то $u_*(\omega) = \omega y - u(y)$, т.е. в действительности по крайне мере для оптимального решения минимум в (2.1) достигается, а неравенство, входящее в (1.1), преобразуется в эквивалентную форму $u -$ $- \omega z \le -u_*(\omega)$ $\forall z$. Следовательно, систему таких неравенств, построенную для некоторой конечной совокупности K_0 векторов $\{\omega^k | k \in K_0\}$, можно использовать для аппроксимации множества $Z_u =$ $= \{(z, u) | u \le u(z)\}$. При этом векторы ω^k удобно рассматривать в качестве строк матрицы Ω, набор определенных для них значений функции $u_*(\omega^k)$ – как компоненты вектора $U_*(\Omega)$ и пусть ι – вектор необходимой по контексту размерности, все компоненты которого равны единице. Тогда линеаризованное представление функции u в интересующем нас конусе $z \geqq 0$ принимает вид

$$u\iota - \Omega z \leqq -U_*(\Omega), \quad z \geqq 0, \tag{2.2}$$

причем u в (2.2) становится просто еще одной переменной рассматриваемой задачи. Неравенства $F(x) \leqq M$ в (0.4) можно заменить их следствием

$$\underline{\Phi}x \leqq \underline{M}, \quad x \geqq 0. \tag{2.3}$$

Поскольку каждая из функций f_j может аппроксимироваться с помощью совокупности неравенств вида $\varphi^{jk}x^j \le M_j$, $k \in K_j$, то из (1.6) и (1.7) $\varphi^{jk}x^j \le f_j(x^j) \le$ $\le M_j$ $\forall k \in K_j$. Соответственно векторами φ^{jk} формируются строки матрицы $\underline{\Phi}$, а компонента M_j повторяется в соответствующих местах в векторе $\underline{M}$. Далее представим в эквивалентной форме равенство (0.3)

$$z + \zeta - \mathscr{E}x = 0, \tag{2.4}$$

$$Ax - \zeta = 0 \tag{2.5}$$

(вводя в векторе ζ дополнительные переменные, не меняющие смысла задачи), и теперь осталось заметить, что условиями (2.2)–(2.5) определены ограничения задачи линейного программирования с критерием

$$\max u. \tag{2.6}$$

Для дальнейшего удобно перейти к эквивалентной задаче минимизации величины $(-u)$ и представить ее вместе с двойственной задачей в табличной форме (такие таблицы использовались в [11] для компактного представления двойственных задач линейного программирования, а затем в [12] при разработке генераторов для аналогичных по форме задач с частично целочисленными переменными).

Как видно из табл. 1, благодаря расщеплению условия (0.3) на (2.4) и (2.5) произошла перестройка двойственных переменных и, в частности, вместо одного вектора p в двойственную задачу теперь входят в точном соответствии с (0.4)–(0.6) два вектора w и q. Чтобы получить в строке функционала комбинацию qA при фиксированном q, нужно разложить задачу, превращая ограничения (2.5) в связующие. Если остальные выделить в блок, то после трансформации функционала (по методу Данцига–Вулфа [13, 14]) в нем возникает пара двойственных задач, представленных в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что теперь для получения в столбце правых частей интересующей нас комбинации $b = z + \zeta$ при фиксированных значениях векторов z, ζ нужно разложить содержащуюся в этой таблице двойственную задачу, выделяя находящиеся во втором и третьем столбцах ограничения в еще одну связующую задачу, как это делается в трехуровневом методе декомпозиции, когда задача включает связующие ограничения и переменные [15–17]. Остающиеся в результате две внутренние блочные задачи представлены в табл. 3.

Первая из них отличается от отраслевой только тем, что исходные неравенства из (0.4) заменены их аппроксимацией, содержащейся в (2.3). Вторая же решается элементарно: поскольку значение вектора z фиксировано, то после определения

$$u\hat{}(z) = \min_{k \in K_0}\{\omega^k z - u_*(\omega^k)\} \qquad (2.7)$$

можно положить $\gamma_l = 1$ и $\gamma_k = 0$ $\forall k \neq l$, где l – одно из тех значений $k \in K_0$, при которых в (2.7) достигается минимум.

3. Координирующий процесс. Сначала рассмотрим двухуровневую схему разложения двойственной задачи из табл. 2, когда вектор q зафиксирован на каком-то значении $\underline{q}$, а векторы z, ζ изменяются в ходе решения координирующей задачи. Как видно из табл. 2, если на некоторой совокупности итераций $n \in T$ построено оптимальное решение последней, то соответствующая пара двойственных задач формируется такими соотношениями

$$\max\left\{\sum_n (\mu_n u_*(\omega^n) - \lambda_n r^n \underline{M})\right\}, \qquad (3.1)$$

$$-\sum_n \lambda_n w^n = -\underline{q}, \quad \underline{\zeta}, \qquad (3.2)$$

$$\sum_n (\mu_n \omega^n - \lambda_n w^n) \leqq 0, \quad \underline{z} \geqq 0, \qquad (3.3)$$

$$-\sum_n \mu_n = -1, \quad R_1, \qquad (3.4)$$

$$\sum_{n \in \underline{T}} \lambda_n = 1, \quad R_2, \qquad (3.5)$$

$$\mu_n \geq 0, \quad \omega^n \underline{z} - R_1 \geq u_*(\omega^n), \qquad (3.6)$$

$$\lambda_n \geq 0, \quad -w^n(\underline{\zeta} + \underline{z}) + R_2 \geq -r^n \underline{M} \quad \forall n \in \underline{T}, \qquad (3.7)$$

$$\lambda_n \geq 0, \quad -w^n(\underline{\zeta} + \underline{z}) \geq -r^n \underline{M} \quad \forall n \in T \backslash \underline{T}, \qquad (3.8)$$

$$\min\{R_2 - R_1 - \underline{q}\underline{\zeta}\} \qquad (3.9)$$

в предположении, что на итерациях $n \in T \backslash \underline{T}$ аппроксимационная отраслевая задача не имела допустимых решений, а соответственно в двойственной задаче формировался луч $\lambda_n(w^n, r^n)$, $\lambda_n \geq 0$

Таблица 1

N/TV	$x \geqq 0$	ζ	$z \geqq 0$	u	TR	max
w	$\mathcal{E}$	$-E$	$-E$		$=$	0
q	$-A$	E			$=$	0
$\gamma \geqq 0$			Ω	$-\iota$	$\geqq$	$U^*(\Omega)$
$r \geqq 0$	$-\underline{\Phi}$				$\geqq$	$-\underline{M}$
TR	$\leqq$	$=$	$\leqq$	$=$		R/F
min	0	0	0	-1	R/F	$=$

Принятые обозначения: N/TV – имена и типы переменных; TR – типы ограничений; R/F – правые части/коэффициенты функционала; min, max – направление поиска экстремума.

Таблица 2

N/TV	$x \geqq 0$	ζ	$z \geqq 0$	u	TR	max
w	$\mathcal{E}$	$-E$	$-E$		$=$	0
$\gamma \geq 0$			Ω	$-\iota$	$\geqq$	$U^*(\Omega)$
$r \geqq 0$	$-\underline{\Phi}$				$\geqq$	$-\underline{M}$
TR	$\leqq$	$=$	$\leqq$	$=$		R/F
min	qA	$-q$	0	-1	R/F	$=$

Таблица 3

N/TV	$x \geq 0$	u	TR	max
w	$\mathcal{E}$		$=$	$\zeta + z = b$
$\gamma \geqq 0$		$-\iota$	$\geqq$	$U_*(\Omega) - \Omega z$
$r \geqq 0$	$-\underline{\Phi}$		$\geqq$	$-\underline{M}$
TR	$\leqq$	$=$		R/F
min	qA	-1	R/F	$q\zeta$

с неограниченным сверху значением функционала.

Оптимальными решениями этих задач определены векторы

$$\underline{\omega} = \sum_n \mu_n \omega^n,\ \ \underline{w} = \sum_n \lambda_n w^n,\ \ \underline{r} = \sum_n \lambda_n r^n,\ \underline{z},\ \underline{\zeta}, \quad (3.10)$$

причем из (3.2) $\underline{w} = \underline{q}$, а по дополняющей нежесткости в (3.6) и вогнутости функции u_* [9] должно иметь место неравенство

$$R_1 = \underline{\omega z} - \sum_n \mu_n u_*(\omega^n) \geq \underline{\omega z} - u_*\left(\sum_n \mu_n \omega^n\right) = $$
$$= \underline{\omega z} - u_*(\underline{\omega}),$$

а значит, – с учетом дополняющей нежесткости в (3.3), (3.7) и (3.8) выполняются такие соотношения

$$R_2 = \underline{qb} - \underline{rM}, \quad (3.11)$$

$$\underline{\omega} \leqq \underline{q}, \quad \underline{z} \geqq 0, \quad \underline{\omega z} = \underline{qz}, \quad (3.12)$$

$$R_1 \geq \underline{\omega z} - u_*(\underline{\omega}). \quad (3.13)$$

Исходная аппроксимация глобальной задачи нужна лишь для запуска процесса и может уточняться в принципе так же, как это делается при обычном использовании симплекс-метода. Так, из условий (3.6) и (2.7) видно, что при выполнении неравенства $\hat{u}(\underline{z}) \geq R_1$ улучшить значение функционала (3.1), вводя в базис координирующей задачи любой из векторов ω^l, определенных в (2.7), уже нельзя, но если $\exists\hat{\omega}$: $\hat{\omega} z - u_*(\hat{\omega}) < R_1$, то $\hat{\omega}$ нужно использовать в решении координирующей задачи (попутно изменяя и модель, аппроксимирующую множество Z_u). Аналогичным образом если $\underline{x}$ – оптимальное решение задачи из табл. 3, аппроксимирующей отраслевую, и $R_2 \geq c\underline{x}$, то в силу (1.8), (1.9) и (3.7) улучшить значение функционала (3.1), используя какой-либо из допустимых двойственных наборов w, r, конечно, нельзя. Но теперь нужно проверить выполнение исходных условий, входящих в (0.4), и если для некоторого j окажется, что $f_j(\underline{x}^j) > M_j$, то различными способами можно построить ограничение, отсекающее точку $\underline{x}^j$ от множества X_j. После присоединения его к (2.3) значение функционалов в (1.8), вообще говоря, увеличивается и при выполнении неравенства $c\hat{\underline{x}} > R_2$ находится пара векторов $\hat{w}$, $\hat{r}$, которая должна вводиться в базис координирующей задачи. Уточняет эту ситуацию следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Если какое-нибудь из оптимальных решений $\underline{x}$ аппроксимационной отраслевой задачи (из табл. 3) допустимо в (0.4), то при тех же значениях векторов q и b оно будет оптимальным решением отраслевой задачи в исходной постановке.

По построению для всех векторов φ^{jk} выполняется неравенство Фенхеля [9] $\varphi^{jk}x^j \leq f_j(x^j)$ $\forall x^j$. По условиям теоремы $\varphi^{jk}\underline{x}^j \leq f_j(\underline{x}^j) \leq M_j$ и если $r_{jk} > 0$, то $\varphi^{jk}\underline{x}^j = M_j$, а значит, $M_j = f_j(\underline{x}^j)$. Полагая

$$\underline{r}_j = \sum_{k \in K_j} r_{jk} \quad \varphi^j = \sum_{k \in K_j} (r_{jk}/\underline{r}_j)\varphi^{jk} \quad \forall r_j > 0$$

(или $\varphi^j = 0$ если $\underline{r}_j = 0$) сразу же обнаруживаем, что для вектора $\underline{x}$ выполнены все условия, входящие в (1.4)–(1.7).

Следовательно, если координирующая задача решается с уточнением аппроксимаций и на итерации $N = |T|$ процесс заканчивается, то дополнительно к (3.11)–(3.13) будут выполняться неравенства

$$\inf_{\omega}\{\omega\underline{z} - u_*(\omega)\} \geq R_1, \quad R_2 \geq \underline{q}A\underline{x}, \quad (3.14)$$

причем последнее в силу (1.8) и (3.7), где $\underline{x}$ – одно из оптимальных решений отраслевой задачи, полученное на шаге $N + 1$ (после которого устанавливается окончание процесса в координирующей задаче).

Т е о р е м а 3. Если процесс проводился с уточнением аппроксимаций множества Z_u и ограничений отраслевой задачи, завершился на конечном шаге N, а целевая функция u – вогнута, собственная и замкнута, то а) векторы $\underline{\omega}$, $\underline{q}$ и $\underline{z}$ удовлетворяют условиям (1.1) и (1.2) и б) вектор $\underline{x}$ – одно из оптимальных решений задачи (1.11), в функционале которой $q = \underline{q}$.

Условия (1.2) и (3.12) идентичны с точностью до обозначений. Поскольку u – вогнутая, собственная и замкнутая функция, то $(u_*)_* = u$ [9], т.е.

$$\forall z\colon\ u(z) = \inf_{\omega}\{\omega z - u_*(\omega)\}.$$

В силу этого и (3.13), (3.14) $u(\underline{z}) \geq R_1 \geq \underline{\omega z} - u_*(\underline{\omega})$. Но по неравенству Фенхеля [9] $u(z) + u_*(\omega) \leq \omega z$ $\forall \omega, z$, а значит

$$u(\underline{z}) = R_1 = \underline{\omega z} - u_*(\underline{\omega}), \quad (3.15)$$

что, как легко видеть из (2.1), эквивалентно (1.1).

Из (3.11) и (3.14): $\underline{qb} - \underline{rM} = R_2 \geq \underline{q}A\underline{x}$, но по (1.9) должно иметь место неравенство противоположного направления, так как векторы $\underline{r}$ и $\underline{q} = \underline{w}$ образуют допустимый двойственный набор, а значит в отраслевой задаче построен оптимальный набор двойственных переменных $\underline{w}$, $\underline{r}$, для которого выполнено дополнительное условие $\underline{w} = \underline{q}$. По теореме 1 вектор $\underline{x}$ должен быть одним из оптимальных решений задачи (1.11) при $q = \underline{q}$.

Т е о р е м а 4. В (1.1)–(1.3) для всех значений p, y, удовлетворяющих (при некотором ω) (1.1) и (1.2), указанные условия можно заменить одним, им эквивалентным

$$\forall z \geqq 0:\ u(z) \le u(y) + p(z-y). \qquad (3.16)$$

Достаточность комбинации условий (3.16) и (1.3) для оптимальности вектора y в (0.1), (0.2) проверяется непосредственно, а поскольку $\omega z \leqq pz\ \forall z \geqq 0$ (из (1.2)), то неравенство, входящее в (1.1), после замены ω на p только усиливается, т.е. условие (3.16) следует из (1.1) и (1.2) – отсюда необходимость.

С л е д с т в и е 2. Если условие (3.16) выполняется для некоторых $p = \underline{q}$ и $y = \underline{z}$, то при вычислении в точке $\underline{q}$ значения функции

$$u^{-}(\underline{q}) = \inf_{z \geqq 0}\{\underline{q}z - u(z)\}, \qquad (3.17)$$

(монотонно-сопряженной к функции u [9]) достигается минимум, а $\underline{z}$ – один из минимизирующих векторов, для которого выполняется равенство

$$u^{-}(\underline{q}) = \underline{q}\,\underline{z} - u(\underline{z}). \qquad (3.18)$$

Если же для некоторых $\underline{q}$ и $\underline{z} \geqq 0$ имеет место (3.18), то и условие (3.16) выполняется (после замены p на $\underline{q}$ и y на $\underline{z}$).

Так как $\underline{z} \geqq 0$, то, подставляя в (3.16) $\underline{z}$, $\underline{q}$ вместо y, p, получим

$$\inf_{z \geqq 0}\{\underline{q}z - u(z)\} \ge \underline{q}\,\underline{z} - u(\underline{z}) \ge \inf_{z \geqq 0}\{\underline{q}z - u(z)\},$$

т.е. для $\underline{q}$, $\underline{z}$ выполняется равенство (3.18). Однако из (3.17) и (3.18) следует, что $\underline{q}\,\underline{z} - u(\underline{z}) \le \underline{q}z - u(z)\ \forall z \geqq 0$.

Таким образом, выполнение условий (3.12) и (3.15) можно гарантировать, вычисляя $\underline{z}$ в (3.17) по значению $\underline{q}$, а $\underline{x}$ находится из (1.11). По следствию 1, чтобы получить эквивалентную отраслевую задачу, достаточно положить

$$\underline{b} = \mathscr{E}\underline{x},\quad \underline{\zeta} = \underline{b} - \underline{z}. \qquad (3.19)$$

Т е о р е м а 5. Если при некотором $\underline{q}$: а) построена задача (1.11) и вектор $\underline{x}$ – одно из ее оптимальных решений, б) вектор $\underline{z}$ – минимизирующий в (3.17), в) вектор $\underline{\zeta}$ определен из (3.19) и г) для $\underline{x}$, $\underline{\zeta}$ выполнено (2.5), то пара $\underline{z}$, $\underline{x}$ будет одним из оптимальных решений глобальной задачи.

Равенства $\underline{q}\,\underline{b} - \underline{rM} = R_2 = \underline{q}A\underline{x}$ следуют из (3.11), (3.14) и (1.9), а по (3.19) $\underline{z} = (\mathscr{E} - A)\underline{x} + (A\underline{x} - \underline{\zeta})$. Если $\underline{\zeta} = A\underline{x}$, то $\underline{q}\,\underline{z} = \underline{rM}$ и $\underline{q}(\underline{z} - z) \ge 0\ \forall z \in Z$ по следствию 1. Неравенство же $u(\underline{z}) \ge u(z) + \underline{q}(\underline{z} - z)\ \forall z \ge 0$ следует из (3.18) и по предыдущему $u(z) + \underline{q}(\underline{z} - z) \ge u(z)\ \forall z \in Y$, а так как $\underline{z} \in Y$, то $u(\underline{z}) \ge u(z)\ \forall z \in Y$ и, таким образом, парой $\underline{z}$, $\underline{x}$ формируется оптимальное решение глобальной задачи.

Следовательно, переходя во внешний цикл, нужно положить $u_m = u(z^m)$ и $h^m = Ax^m - \zeta^m$ в ответ на вектор q^{m-1}, и если $h^m \ne 0$, то можно строить вторую координирующую задачу

$$\max\left\{\sum_m \nu_m u_m\right\}, \qquad (3.20)$$

$$\sum_m \nu_m h^m = 0,\quad q^{t-1}, \qquad (3.21)$$

$$\sum_m \nu_m = 1,\quad R_0, \qquad (3.22)$$

$$\nu_m \ge 0,\quad q^{t-1}h^m + R_0 \ge u_m, \qquad (3.23)$$

$$\min R_0 \qquad (3.24)$$

где $m = 1, 2, \ldots, t-1$, и далее предположим, что на шаге t выполняется условие окончания процесса

$$u_t - q^{t-1}h^t \le R_0. \qquad (3.25)$$

Т е о р е м а 6. Если во внешнем цикле на шаге t для векторов x^t, z^t, полученных в соответствии с теоремой 5, выполняется условие (3.25), то тройкой векторов

$$\underline{z} = \sum_{m=1}^{t-1}\nu_m z^m,\quad \underline{x} = \sum_{m=1}^{t-1}\nu_m x^m,\quad \underline{\zeta} = \sum_{m=1}^{t-1}\nu_m \zeta^m \qquad (3.26)$$

формируется оптимальное решение глобальной задачи.

В силу дополняющей нежесткости в (3.22) и вогнутости u

$$R_0 \le u(\underline{z}), \qquad (3.27)$$

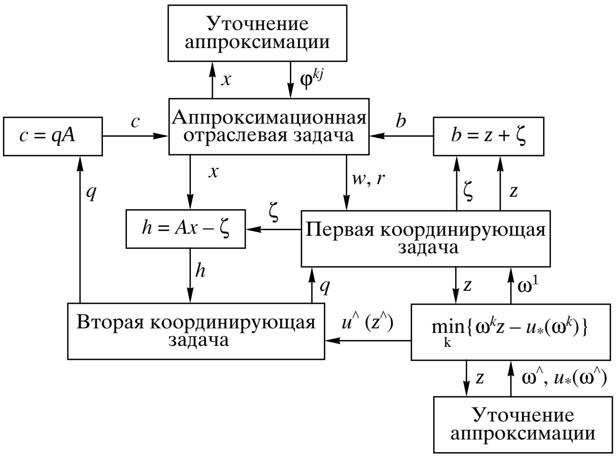

Рис. 1.

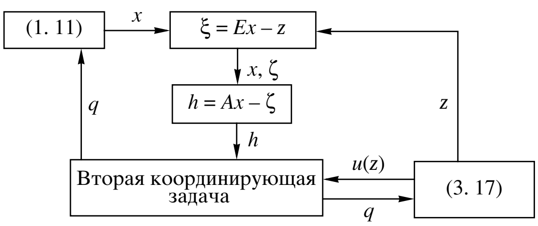

Рис. 2.

а из первой координирующей задачи используем равенство между значениями функционалов (3.1) и (3.9). С учетом вогнутости функции u_* получим $R_2 - R_1 - q^{t-1}\zeta^t \le u_*(\underline{\omega}^t) - \underline{r}^t\underline{M}$ (входящие в (3.19) векторы приобретают индекс t, так что в результате $R_2 = q^{t-1}\mathscr{E}x^t - \underline{r}^t\underline{M}$, а $R_1 = u_t$). После замены в соответствии с этими равенствами разности $R_2 - R_1$ нерудно получить, что $q^{t-1}(\mathscr{E} - A)x^t - u_*(\underline{\omega}^t) \le u_t - q^{t-1}h^t$. Поскольку x^t – оптимальный вектор в (1.11), а также используя (3.25), (3.27) и неравенство Фенхеля, приходим к цепочке неравенств $q^{t-1}(\mathscr{E} - A)\underline{x} \le q^{t-1}(\mathscr{E} - A)x^t \le u(\underline{z}) + u_*(\underline{\omega}^t) \le \underline{\omega}^t\underline{z} \le q^{t-1}\underline{z}$, где $\underline{x}$, $\underline{z}$ и $\underline{\zeta}$ теперь определены в (3.26). Поскольку $A\underline{x} = \underline{\zeta}$, то $q^{t-1}(\mathscr{E} - A)\underline{x} = q^{t-1}\underline{z} + q^{t-1}(\underline{\zeta} - A\underline{x}) = q^{t-1}\underline{z}$, а из (1.11) $q^{t-1}(\mathscr{E} - A)x^t = \underline{r}^t\underline{M}$. Таким образом, $q^{t-1}\underline{z} = \underline{r}^t\underline{M}$, а значит, $q^{t-1}(\underline{z} - z) \ge 0\ \forall z \in Z$, кроме того, $u_*(\underline{\omega}^t) = q^{t-1}\underline{z} - u(\underline{z})$ и, очевидно, $u^-(q^{t-1}) \ge u_*(\underline{\omega}^t)$. Но из (3.17) для любых q и $z \geqq 0$ следует неравенство противоположного направления, а значит, $u^-(q^{t-1}) = q^{t-1}\underline{z} - u(\underline{z})$ и тройкой $\underline{x}$, $\underline{z}$, $\underline{\zeta}$ (с учетом следствия 2) формируется оптимальное решение глобальной задачи.

4. Параллельные вычисления. В целом, рассмотренный выше процесс представлен на рис. 1. Роль внешних блоков, окаймляющих рисунок сверху и снизу, сводится к модификации аппроксимационных соотношений, но взаимодействие с ними не меняет характера задач во внутренних блоках. Функционирование внутренних блоков организуется вокруг аппроксимационной отраслевой задачи, которая связана с координирующими задачами двумя каналами. При описанной выше последовательной организации вычислений левый канал закрыт до тех пор, пока не прекращается изменение информации во всех каналах контура, расположенного на рис. 2 справа. Но финальное состояние, возникающее после завершения итераций в этом контуре, описывается оптимальными решениями задач (1.11) и (3.17), и, таким образом, весь контур из схемы на рис. 1 можно исключить (см. рис. 2), а решение отраслевой задачи, как это ни парадоксально, поскольку задачи именно этого типа наиболее широко использовались в приложениях оптимизационной теории, становится не нужным. Однако поскольку внутри каждой из координирующих задач имеется автономный блок контроля поступающей в нее информации, то в принципе ничто не мешает поддерживать оба канала в открытом состоянии. При этом в качестве блоков нижнего уровня, как и раньше, используются отраслевая задача и операция вычисления значения функции $(u_*)_*$ по заданной из первой координирующей задачи точке z и функции u_*. Такой режим и называется здесь параллельными вычислениями.

В наиболее простом варианте этот процесс может быть организован следующим образом. До окончания внутреннего цикла при получении оптимального решения x в отраслевом блоке и величин ξ, $u\hat{}(z)$ из первой координирующей задачи и блока оценки значения функционала формируется и проверяется в блоке контроля второй координирующей задачи (на рис. 1 этот блок не показан) комбинация h, $u\hat{}(z)$. При выполнении неравенства (3.25) не возникает никаких последствий и внутренний цикл (показанный на рис. 1 в контуре справа) продолжается. Если же вместо (3.25) выполняется противоположное неравенство, то решение второй координирующей задачи пересчитывается. Поскольку при этом возникает новое значение вектора q, то оно может сразу или после нескольких итераций использоваться для изменения функционала в отраслевой и правой части в первой координирующей задаче. После этого происходит переход во внутренний цикл, который, как и при последовательной схеме вычислений, начинается с получения оптимального решения аппроксимационной отраслевой задачи при новом значении в ее правой части вектора b.

Конечно, можно предложить и другие, более изощренные схемы организации этого процесса.

Например, опыт практического решения отраслевых задач [7] показывает, что хотя при начальном состоянии исходных данных большинство из них несовместны, тем не менее, после устранения ошибок в информации и некоторой корректировки правой части первое оптимальное решение, осмысленное с точки зрения заказчика, удается получить, а затем возникает неформализованный процесс, в котором разработчики меняют внутренние параметры задачи более или менее осознанно, причем в основном эти изменение охватывают элементы правой части и функционала. В схеме параллельных вычислений процессы такого типа не только возникают вполне естественно, но и создают разнообразные алгоритмы решения глобальной задачи. Связано это с тем, что поскольку все внутренние взаимодействия осуществляются между задачами линейного программирования и можно полагать, что уже на начальном шаге построено оптимальное решение в отраслевом блоке, то на последующих шагах могут использоваться методы параметрического программирования. Это может быть особенно эффективно на начальных шагах, когда нельзя рассчитывать на получение допустимых решений в координирующих задачах, поскольку параметрическое исследование порождает целые совокупности оптимальных решений как в отраслевой, так и в двойственной к ней задаче, а новые значения векторов q, b используются для изменения направления, в котором ведется исследование (отраслевой задачи по функционалу и первой координирующей задачи по правой части или отраслевой задачи по правой части во внутреннем цикле).

Поскольку в таких процессах, вообще говоря, существуют интервалы устойчивости оптимальных решений, то они определенным образом синхронизируются. Например, меняя по параметру вектор b, можно перейти к новому его значению, оставаясь в интервале устойчивости двойственного решения аппроксимирующей отраслевой задачи. Соответственно в правом контуре изменений не происходит, а в левом формируется новое значение вектора h. Проверяя его по критерию второй координирующей задачи, можно, однако, обнаружить, что оптимальное ее решение не изменяется, а соответственно сохраняется и значение вектора q. Легко видеть, что эта ситуация предусмотрена теоремой 6, т.е. остановка в обоих контурах означает, что получено оптимальное решение глобальной задачи. Если же в левом контуре возникает новое значение вектора q, то в области устойчивости может оказаться как оптимальное решение отраслевой задачи, так и значения векторов z, ζ в первой координирующей. Соответственно возникает остановка в правом контуре, а для левого не появляется новой информации. В результате процесс и в этом случае завершается. Более детальное исследование подобных алгоритмов выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В., Колбанов В.М. и др.* Формы динамического равновесия замкнутой экономики // Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34. Вып. 2.
3. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
4. *Колбанов В.М., Медницкий В.Г.* О решении задач перестройки структуры производства // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1.
5. *Колбанов В.М., Медницкий В.Г.* О существовании решений в одном классе задач оптимизации производственных структур // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1988. № 3.
6. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983.
7. *Медницкий В.Г., Буторин Н.Н.* Производственно-транспортные задачи большой размерности и решение их на ЭВМ. М.: Статистика, 1978.
8. *Ватель И.А., Флеров Ю.А.* Модель годового планирования в отрасли // Программный метод управления. Вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1976.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1978.
10. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
11. *Голдман А.Дж., Таккер А.У.* Теория линейного программирования // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
12. *Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В.* О двух новых программных системах для формирования и анализа задач линейного программирования // Экономика и мат. методы. 1994. Т. 30. Вып. 3.
13. *Danzig G.B., Wolfe P.* Decomposition principle for linear programs // Oper. Res. 1960. V. 8. № 1.
14. *Данциг Дж.Б., Вулф Ф.* Алгоритм разложения для задач линейного программирования // Математика. 1964. Т. 8. № 1.
15. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
16. *Медницкий Ю.В.* О параллельном использовании метода декомпозиции в паре двойственных задач линейного программирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1.
17. *Медницкий Ю.В.* О декомпозиции задачи линейного программирования со связующими ограничениями и переменными // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4.