УДК 519.86

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

© Обросова Н.К. [1]
Вычислительный Центр РАН, Москва

Доказывается теорема о бифуркации Хопфа стационарного решения для класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Доказательство проводится по следующей схеме. Исходная бесконечномерная задача сводится к двухмерной при помощи теоремы о центральном многообразии. Затем к полученному двухмерному отображению применяется теорема Хопфа, из которой следует, что при потере устойчивости в системе рождается или гибнет одномерное инвариантное многообразие. На заключительном этапе, с использованием понятия числа вращения доказывается, что найденному одномерному многообразию соответствует периодическая траектория исходного уравнения с запаздыванием.

1 Постановка задачи

В данной работе исследуется бифуркация стационарного решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dx}{dt} = H(x(t), x(t - \tau)), \tag{1}$$

где $\tau > 0$ - постоянное запаздывание.

Эта задача возникла в связи с необходимостью исследовать тип потери устойчивости равновесной цены в модели ценообразования вальрасовского типа с запаздываниями в реакциях потребителя и производителя на изменение цены [1, 2], которая в случаях одного ненулевого запаздывания или равных запаздываний экономических агентов описывается уравнением (1). Изучение свойств этой модели является одним из этапов решения известной в математической экономике проблемы описания возникновения экономических кризисов [1, 2].

Рассмотрим уравнение (1). Не ограничивая общности, будем предполагать, что $x(t) \equiv 0$ является стационарным решением уравнения (1), т.е. $H(0,0) = 0$. Будем считать, что функция $H(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $H(x,y)$ является n раз непрерывно дифференцируемой, где $n \geq 9$;

2. для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(t)$, где $t \in [0,\tau]$, уравнение (1) при $x(t - \tau) = y(t)$ имеет ограниченное решение на отрезке $[0,\tau]$[2];

3. $$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}|_{x=0,y=0} \leq 0, \qquad \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}|_{x=0,y=0} < 0. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 99-01-01238, 00-15-96118)

[2] для этого, например, достаточно, чтобы существовало $c > 0$ такое, что для любых $x, y \in R^1$ выполняется неравенство $|H(x,y)| \leq c(1 + |x|)$

Выполнение условий 1) и 2) гарантирует, что решение уравнения (1) существует, единственно и является непрерывно дифференцируемым для любой непрерывной начальной функции $\varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, такой, что $\dot{\varphi}(0-0) = H(\varphi(0), \varphi(-\tau))$ ([3, с. 19]), причем, в соответствии с методом шагов [3, с. 17], решение продолжается с сохранением непрерывной дифференцируемости на весь отрезок $[0,t]$ для любого $t > 0$ ([3, с. 18-20]). Условие 3) в точности выполняется для модели ценообразования вальрасовского типа с запаздываниями и соответствует естественным с экономическаой точки зрения требованиям невозрастания спроса и возрастания предложения как функций цены (см. [1, 2]).

Будем рассматривать решения уравнения (1) в пространстве $C^1[0,\tau]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\tau]$ функций. В уравнении (1) введем масштабирование времени $t = t'\tau$, замену $\tilde{x}(t') = x(t'\tau)$ и затем переобозначим t' через t и $\tilde{x}(t')$ через $x(t)$. Тогда получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tau H(x(t), x(t-1)). \tag{3}$$

Обозначим

$$u = -\tau \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}|_{x=0,y=0}, \quad v = -\tau \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}|_{x=0,y=0}. \tag{4}$$

Линеаризованное уравнение (3) в окрестности точки (0,0) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -ux(t) - vx(t-1), \tag{5}$$

где, в силу условия (2) на функцию $H(x,y)$, имеем $u \geq 0$, $v > 0$. В [2] при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3] доказано, что решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (3) асимптотически устойчиво, если значение параметра $v < v_{gr}$ и неустойчиво, если $v > v_{gr}$[3], где

1. при $u = 0$ (см. [2, с.18, предложение 3.1])

$$v_{gr} = \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

2. при $u > 0$ граница устойчивости v_{gr} определяется из уравнения (см. [2, с.18, предложение 3.2])

$$v_{gr}\sqrt{1 - \frac{u^2}{v_{gr}^2}} = \arccos(-\frac{u}{v_{gr}}). \tag{7}$$

Наша задача - исследовать тип бифуркации в уравнении (3), когда параметр v, возрастая, переходит через границу устойчивости v_{gr}, определяемую из (6) или (7) соответственно при $u = 0$ или $u > 0$. Фиксируем значение параметра u и будем исследовать бифуркацию по параметру

$$\mu = v - v_{gr}. \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (3) методом шагов [3, с. 17], получим следующее равенство

$$x_{n+1}(t) - x_n(1) - \int_0^t \tau H(x_{n+1}(\xi), x_n(\xi))\, d\xi = 0, \qquad t \in [0,1], \tag{9}$$

[3] Линеаризованное уравнение, исследуемое в [2] ([2, с.11, формула (7)]) совпадает с уравнением (5) при $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2\sigma_c = u$, $\Theta_2\sigma_g = v$.

где функции $x_n(t)$, и $x_{n+1}(t)$, $t \in [0,1]$ - решения уравнения (3) соответственно на n-м и на (n+1)-м шагах $(x_{n+1}(0) = x_n(1))$, причем для любого номера $n > 0 \quad x_n(t) \in C^1[0,1]$, т.е. является непрерывно дифференцируемой. Левая часть уравнения (9) задает отображение $\Phi(x,y)$, где $x = x_{n+1}$, $y = x_n$, действующее из пространства $C^1[0,1] \times C^1[0,1]$ в $C^1[0,1]$, причем $\Phi(0,0) = 0$.
Лемма 1. *Отображение* $\Phi(x,y)$ *принадлежит классу* C^9, *т.е. является 9 раз непрерывно дифференцируемым в банаховом пространстве* $Z = C^1[0,1] \times C^1[0,1]$.
Доказательство леммы 1. Обозначим $z = (x,y) \in Z$. Найдем слабую производную отображения Φ в точке $z_0(\cdot) = (x_0(\cdot),\, y_0(\cdot)) \in Z$

$$\begin{aligned}
&\Phi'(z_0)z = D\Phi(z_0,z) = \tfrac{d}{dh}\Phi(z_0 + hz)|_{h=0} = \tfrac{d}{dh}\Big[x_0(\cdot) + hx(\cdot) \quad y_0(1) \quad hy(1) \\
&\textstyle\int_0^t \tau H(x_0(\xi) + hx(\xi), y_0(\xi) + hy(\xi))\, d\xi\Big]|_{h=0} = \\
&x(\cdot) \quad y(1) \quad \textstyle\int_0^t \tau\Big[\frac{\partial H(x_0,y_0)}{\partial x} x(\xi) + \frac{\partial H(x_0,y_0)}{\partial y} y(\xi)\Big]\, d\xi
\end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что слабая производная $\Phi'(z_0)$ является непрерывной в точке z_0, поэтому отображение Φ является дифференцируемым и его сильная производная совпадает со слабой ([4, с. 484, теорема 1]), т.е. определяется по формуле (10). Таким образом, отображение Φ принадлежит классу C^1, причем первая производная этого отображения в точке z_0 определяется из (10). Аналогично, вычисляя слабую производную отображения $D\Phi(z_0,z) : Z \to L(Z,Z)$, определяемого в (10), где $L(Z,Z)$ - пространство линейных операторов, действующих из Z в Z, получим

$$\begin{aligned}
&\Phi''(z_0)(z,\hat z) = \tfrac{d}{dh}\Phi'(z_0 + h\hat z, z)|_{h=0} = \tfrac{d}{dh}\Big[x(\cdot) \quad y(1) \\
&\textstyle\int_0^t \tau \frac{\partial H(x_0+h\hat x, y_0+h\hat y)}{\partial x} x(\xi)\, d\xi \quad \int_0^t \tau \frac{\partial H(x_0+h\hat x, y_0+h\hat y)}{\partial y} y(\xi)\, d\xi\Big]|_{h=0} = \\
&\quad \textstyle\tau \int_0^t \Big[\frac{\partial^2 H(x_0,y_0)}{\partial x^2} x(\xi) + \frac{\partial^2 H(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} y(\xi)\Big] \hat x(\xi)\, d\xi \\
&\textstyle\tau \int_0^t \Big[\frac{\partial^2 H(x_0,y_0)}{\partial y^2} y(\xi) + \frac{\partial^2 H(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} x(\xi)\Big] \hat y(\xi)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, учитывая дифференцируемость функции $H(x,y)$, слабая производная (11) отображения $\Phi'(z_0) : Z \to L(Z,Z)$ непрерывно зависит от z_0, поэтому она совпадает с его сильной производной и отображение Φ дважды непрерывно дифференцируемо, т.е. принадлежит классу C^2. Аналогичные вычисления показывают, что отбражение Φ непрерывно дифференцируема столько раз, сколько непрерывных производных имеет функция $H(x,y)$, а она, по предположению, непрерывно дифференцируема как минимум 9 раз. Лемма 1 доказана.
Лемма 2. *Существует окрестность* $U(0) \subset C^1[0,1]$ *точки* $y = 0$ *и единственное отображение* $\Psi_\mu : U(0) \to C^1[0,1]$ *такие, что верны следующие утверждения:*
1) $\Psi_\mu(0) = 0$ *и* $\Phi(\Psi_\mu(y), y) \equiv 0$;
2) отображение Ψ_μ *имеет производную Фреше (сильную производную) по переменной* y, *равную*

$$\frac{d\Psi_\mu}{dy}(y) = \quad [\Phi'_x(\Psi_\mu(y), y)] \quad ^1\Phi'_y(\Psi_\mu(y), y), \tag{12}$$

где Φ'_x *и* Φ'_y *- производные Фреше отображения* Φ *по переменным* x *и* y *соответственно;*
3) отображение Ψ_μ *принадлежит классу* $C^9[U(0)]$, *то есть является 9 раз непрерывно дифференцируемым.*

Утверждение леммы 2 напрямую следует из леммы 1 и теоремы о неявной функции [5, с. 56].

Следствие 1. *1) В некоторой окрестности нуля $U(0)$ пространства $C^1[0,1]$ уравнение (9) однозначно разрешимо относительно x_{n+1}, т.е. (9) эквивалентно равенству*

$$x_{n+1}(t) = \Psi_\mu(x_n(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{13}$$

где отображение $\Psi_\mu : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ принадлежит классу $C^9[U(0)]$.
2) Линеаризация отображения Ψ_μ в нуле, определяемая по формуле (12), есть линейный оператор $A_\mu : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ вида

$$A_\mu x(t) = e^{\;\;ut}[x(1) \quad \int_0^t e^{u\xi} v x(\xi)\, d\xi], \quad t \in [0,1], \tag{14}$$

где $u \geq 0$, $v > 0$ определены в (4), параметр μ определен в (8).
Доказательство следствия 1. 1) Первое утверждение следует непосредственно из леммы 2.
2) Для доказательства второго утверждения надо вычислить производные отображения $\Phi(x,y)$ по переменным x и y в нуле и подставить их в формулу (12).

Слабая производная отображения $\Phi(x,y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) равна

$$\Phi'_y(x_0,y_0)y = \tfrac{d}{dh}\Phi(x_0, y_0 + hy)|_{h=0} = \tfrac{d}{dh}\Big[x_0(\cdot) \quad y_0(1) \quad hy(1)$$
$$\textstyle\int_0^t \tau H(x_0(\xi), y_0(\xi) + hy(\xi))\, d\xi\Big]|_{h=0} = \quad y(1) \quad \int_0^t \tau \frac{\partial H(x_0(\xi), y_0(\xi))}{\partial y} y(\xi)\, d\xi.$$

Очевидно, что слабая производная представляет собой операторную функцию от (x,y), непрерывную в точке (x_0,y_0), поэтому сильная производная совпадает со слабой и, учитывая (4), равна в точке $(0,0)$

$$\Phi'_y(0,0)y = \quad y(1) + \int_0^t v y(\xi)\, d\xi. \tag{15}$$

Аналогично, вычисляя производную отображения Φ по x в точке (x_0,y_0), получим, что сильная производная отображения Φ по переменной x в точке $(0,0)$ равна

$$\Phi'_x(0,0)x = x(\cdot) + \int_0^t u x(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Для применения формулы (12) осталось найти обратный оператор к (16). Решая уравнение

$$x(t) + \int_0^t u x(\xi)\, d\xi = z(t)$$

с начальным условием $x(0) = z(0)$ для любой функции $z(t) \in C^1[0,1]$, получим, что оператор (16) имеет в нуле ограниченный обратный, равный

$$\Big[\Phi'_x(0,0)\Big]^{\;\;1} z = e^{\;\;ut}\Big[z(0) + \int_0^t e^{u\xi} z'(\xi)\, d\xi\Big]. \tag{17}$$

Подставляя (15) и (17) в (12), получим, что линеаризация отображения Ψ_μ в точке 0 есть линейный оператор $A_\mu : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$ вида (14). Следствие 1 доказано.
Замечание 1. Так как Ψ_μ отображает решение методом шагов дифференциального уравнения с запаздыванием (3) на n - м шаге в решение на $n+1$ - м шаге, то из условия непрерывности решения исходного уравнения с запаздыванием (3) следует, что отображение Ψ_μ удовлетворяет следующему условию согласованности: для любой функции $x(\cdot) \in C^1[0,1]$

$$(\Psi_\mu x(\cdot))(0) = x(1). \tag{18}$$

Система (13) отображает функцию, определенную на отрезке $[0,1]$ в функцию, определенную на отрезке $[0,1]$. Таким образом, равенство (13) задает дискретную динамическую систему в функциональном пространстве $C^1[0,1]$. Нулевому стационарному решению уравнения (3) соответствует неподвижная точка $x=0$ динамической системы (13).

Анализ потери устойчивости нулевого стационарного решения уравнения (3) сведен к анализу потери устойчивости неподвижной точки $x=0$ дискретного отображения (13), заданного в функциональном пространстве $C^1[0,1]$.

Известно, что неподвижная точка дискретной динамической системы в конечномерном пространстве асимптотически устойчива, если все собственные значения оператора линеаризованной системы находятся внутри единичной окружности комплексной плоскости и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение находится вне единичной окружности. Границы устойчивости (6) и (7) стационарного решения $x(t)\equiv 0$ исходного дифференциального уравнения с запаздыванием (3) получены (см. [2]) при исследовании системы первого приближения уравнения (3), поэтому переход v через границу устойчивости v_{gr} в точности соответствует моменту выхода собственных значений оператора линеаризованной системы из единичной окружности комплексной плоскости. Тип бифуркации зависит от того, каким образом собственные значения оператора линеаризованной системы покидают единичную окружность комплексной плоскости, когда параметр v, возрастая, переходит через границу устойчивости v_{gr} (т.е. параметр μ, возрастая, проходит через 0).
Исследование динамической системы (13) позволило доказать приведенный ниже результат.

2 Исследование типа бифуркации в случае $u > 0$

Теорема 1. *Пусть параметр* $u = \quad \tau\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}|_{x=0,y=0}$ *удовлетворяет условиям* $u>0$ *и*

$$u \neq \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{19}$$

Тогда при потере устойчивости стационарного решения $x(t)\equiv 0$ *уравнения (1), т.е. когда параметр* $v = \quad \tau\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}|_{x=0,y=0}$, *возрастая, переходит через границу устойчивости* v_{gr}, *определяемую из уравнения*

$$v_{gr}\sqrt{1 \quad \frac{u^2}{v_{gr}^2}} = \arccos(\quad \frac{u}{v_{gr}}),$$

в системе (1) рождается или гибнет периодическая траектория.

Доказательство теоремы 1. Доказательство мы будем проводить по следующей схеме.

I. При помощи теоремы о центральном многообразии [6, 7] исходная бесконечномерная задача сводится к двухмерной.

II. К полученному двухмерному отображению применяется теорема Хопфа [6, 8], из которой следует, что при потере устойчивости в системе рождается или гибнет дважды непрерывно дифференцируемое одномерное инвариантное многообразие.

III. Доказывается, что найденному одномерному инвариантному многообразию соответствует периодическая траектория исходного дифференциального уравнения с запаздыванием (1).

I. *Лемма* 3. *1) Линейный оператор* $A_\mu : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$, *определенный в (14), имеет комплексно-сопряженные собственные значения* $\lambda_k(\mu)$, $\bar{\lambda}_k(\mu)$, $k = 0,1,2,\cdots$, *где* $\mu = v - v_{gr}$, *(*v_{gr} *определяется из уравнения (7)), упорядоченные следующим образом*

$$|\lambda_0(\mu)| > |\lambda_1(\mu)| > \cdots.$$

2) Если $\mu = 0$, *то* $\lambda_0(0) = e^{i\phi}$, *где* $\cos\phi = -\frac{u}{v_{gr}}$ *и существует* $\delta > 0$ *такое, что* $|\lambda_1(0)| < 1 - \delta$.
3) Собственному значению $\lambda_0(0)$ *соответствует собственный вектор* $e^{i\phi t}$, *а собственному значению* $\bar{\lambda}_0(0)$ *- собственный вектор* $e^{-i\phi t}$.
Доказательство леммы 3. Обозначим через $\lambda = re^{i\phi}$ собственные значения оператора A_μ. Число λ является собственным значением оператора A_μ тогда и только тогда, когда

$$z(1) - \int_0^t ve^{u\xi} z(\xi)\, d\xi = re^{i\phi}e^{ut}z(t). \tag{20}$$

При $t = 0$ из последнего уравнения получим

$$re^{i\phi}z(0) = z(1). \tag{21}$$

Дифференцируя (20) по t и решая полученное уравнение, найдем, что для каждого значения $z(0)$ интегральное уравнение (20) имеет единственное решение

$$z(t) = z(0)\exp\Big\{-(\frac{v}{r}e^{-i\phi} + u)t\Big\}, \tag{22}$$

т.е. каждому собственному значению λ оператора A_μ соответствует единственный линейно независимый собственный вектор $z(t)$. Из (22) и (21) мы получаем, что $\lambda = re^{i\phi}$ является собственным значением оператора A_μ, если и только если

$$\begin{cases} \ln r = -\frac{v}{r}\cos\phi - u \\ \phi = \frac{v}{r}\sin\phi + 2\pi k, \end{cases} \tag{23}$$

где k - целое число. Заметим, что если пара (ϕ, r), где $\phi \in [0, 2\pi]$, является решением системы (23), то решением этой системы является также пара $(4\pi k - \phi, r)$, поэтому оператор A_μ имеет комплексно-сопряженные собственные значения. Кроме того, если пары (ϕ_1, r) и (ϕ_2, r), где $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi]$ являются решениями системы (23), то $\phi_1 = \phi_2$. Действительно, из первого уравнения (23) имеем $\cos\phi_1 = \cos\phi_2$, то есть $\phi_1 = 2\pi - \phi_2$, следовательно $\sin\phi_1 = -\sin\phi_2$. Тогда, записывая второе уравнение (23) для ϕ_1 и ϕ_2 и складывая их, получим $k = -1/2$, то есть получили противоречие с условием, что k - целое. Итак, для любого значения r, удовлетворяющего системе (23) существует единственное значение $\phi \in [0, 2\pi]$, такое, что пара (ϕ, r) является решением системы (23). Как было замечено, если пара (ϕ, r) $(\phi \in [0, 2\pi])$ является решением системы (23), то решением этой системы является также пара $(4\pi k - \phi, r)$, поэтому мы можем рассматривать лишь $\phi \in [0, \pi]$.

При $\phi \in [0, \pi]$ $\sin\phi \geq 0$, поэтому из второго уравнения системы (23) получим, что эта система может иметь решение лишь при $k \leq 0$. Исключая ϕ из системы (23) (учитывая, что $\sin\phi \geq 0$), получим уравнение

$$\arccos(-\frac{u + \ln r}{v}r) - \frac{v}{r}\sqrt{1 - \frac{(u + \ln r)^2}{v^2}r^2} = 2\pi k, \tag{24}$$

где $k \leq 0$ - целое. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(r)$. Найдем область определения функции $f(r)$. Для этого рассмотрим функцию $g(r) = \frac{u+\ln r}{v}r$. Очевидно, что областью определения $f(r)$ будут все те значения $r > 0$, при которых $|g(r)| \le 1$. Несложно показать, что $g(r) \to 0$ при $r \to 0$, и ее производная равна $g'(r) = \frac{1+u+\ln r}{v}$. Поэтому $g(r)$ имеет минимум при $r = e^{-(u+1)}$, равный $g(e^{-(u+1)}) = -\frac{1}{v}e^{-(u+1)}$. Пусть r^* такое, что $g(r^*) = 1$ (очевидно, что оно существует). Потребуем, чтобы $g(e^{-(u+1)}) > -1$, т.е. $v > e^{-(u+1)}$. Тогда получим, что областью определения функции $f(r)$ является весь полуинтервал $(0, r^*]$. Накладывать ограничение $v > e^{-(u+1)}$ мы имеем право, так как мы рассматриваем оператор A_μ в сколь угодно малой окрестности границы устойчивости $v_{gr}(u)$, определяемой из (7), а это ограничение заведомо выполнено в этой окрестности.

Производная функции $f(r)$ равна

$$f'(r) = \frac{1}{va}(u + \ln r + 1)^2 + \frac{va}{r^2}, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{1 - \frac{(u+\ln r)^2}{v^2} r^2}. \tag{25}$$

Очевидно, что $f'(r) > 0$ для всех $0 < r \le r^*$. Итак, функция $f(r)$ непрерывна и монотонно возрастает при всех r из области определения. Заметим, что

1. $f(r) \to -\infty$ при $r \to 0$,
2. $f(r^*) = \pi > 0$.

Следовательно, при каждом целом $k \le 0$ уравнение (24) всегда имеет единственный корень r_k, причем $r_0 > r_{-1} > r_{-2} > \cdots$. Мы показали, что при каждом целом $k \le 0$ система (23) имеет два комплексно-сопряженных решения $re^{i\phi}$ и $re^{-i\phi}$, где r и ϕ определяются единственным образом из (23). Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

В силу доказанного очевидно, что потеря устойчивости будет происходить при $r_0 = 1$. Из уравнения (7) для v_{gr} следует, что при $r_0 = 1$ равенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда параметр v пересекает границу устойчивости, т.е. $v = v_{gr}$. При $r = 1$ из (23) следует, что $\cos\phi = -\frac{u}{v_{gr}}$. Покажем, что при $r_0 = 1$ решение r_{-1} уравнения (24) при $k = -1$ отстоит от r_0 на ненулевое расстояние δ. Тем самым второе утверждение леммы будет доказано. Предположим, что это не так, т.е. $r_{-1} \to 1$ при $v \to v_{gr}$. Тогда для любого $\epsilon_1 > 0$ существует $\delta_1(\epsilon_1) > 0$ такое, что как только $|v - v_{gr}| < \delta_1(\epsilon_1)$, то $1 - r_{-1} < \epsilon_1$. Так как функция $f'(r)$, определенная в (25), непрерывна в точке $r = 1$, то для любого $\epsilon_2 > 0$ существует $\delta_2(\epsilon_2) > 0$ такое, что как только $|1 - r| < \delta_2(\epsilon_2)$, то $|f'(r) - f'(1)| < \epsilon_2$. Выберем $\epsilon_2 = 1/2$ и $\epsilon_1 = \delta_2(\epsilon_2)$. Тогда существует $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1) > 0$ такое, что как только $|v - v_{gr}| < \delta_1$, то $|1 - r| \le |1 - r_{-1}| < \delta_2(\epsilon_2)$ при всех $r \in [r_{-1}, 1]$. Но тогда при всех $r \in [r_{-1}, 1]$ верно $|f'(r) - f'(1)| < \epsilon_2 = 1/2$. Следовательно,

$$f'(r) < f'(1) + 1/2 \quad \text{при всех} \quad r_{-1} \le r \le 1, \quad |v - v_{gr}| < \delta_1. \tag{26}$$

Оценим значение $f'(1)$. Из (25) имеем

$$f'(1) = \frac{(u+1)^2}{va} + va, \text{ где } a = \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}.$$

Учитывая уравнение для границы устойчивости (7), получим, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что как только $|v - v_{gr}| < \delta$, то $\left|va - \arccos\left(-\frac{u}{v}\right)\right| < \epsilon$. Пусть $\epsilon = 1/2$. Тогда, так как $\frac{\pi}{2} \le \arccos\left(-\frac{u}{v}\right) \le \frac{3\pi}{2}$, то $va < \frac{1+3\pi}{2}$ и $va > \frac{\pi-1}{2}$. Из последних неравенств получаем следующую оценку

$$f'(1) \le \frac{2(u+1)^2}{\pi - 1} + \frac{3\pi+1}{2} \quad \text{при} \quad |v - v_{gr}| < \delta. \tag{27}$$

Из (26) и (27) при $|v \quad v_{gr}| < \min\{\delta, \delta_1\}$ имеем

$$2\pi = \int_{r_{\ 1}}^{1} f'(r)\, dr \le \Big[\frac{2(u+1)^2}{\pi \quad 1} + \frac{3\pi + 1}{2}\Big](1 \quad r_{\ 1}).$$

Из последнего соотношения получим

$$1 \quad r_{\ 1} \ge \frac{2\pi}{\Big[\frac{2(u+1)^2}{\pi \quad 1} + \frac{3\pi+1}{2}\Big]}, \tag{28}$$

т. е. (так как значение u фиксировано) $1 \quad r_{\ 1}$ не стремится к 0 при $v \to v_{gr}$ и мы пришли к противоречию. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $1 \quad r_{\ 1} > \delta$. Второе утверждение леммы полностью доказано.

Пусть $r = 1$. Подставляя значение $\cos\phi = \quad \frac{u}{v_{gr}}$ в (22), получим, что выражение в фигурных скобках в (22) равно $i\phi t$, поэтому собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0(0) = e^{i\phi}$ равен $e^{i\phi t}$. Рассматривая комплексное сопряжение, получим, что собственный вектор, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_0(0) = e^{\ i\phi}$ равен $e^{\ i\phi t}$. Утверждение 3) леммы доказано. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что когда μ, возрастая, проходит через 0, пара комплексно-сопряженных собственных значений оператора A_μ покидает единичную окружность комплексной плоскости, причем собственные значения не выходят через точки $\pm i$. В этом случае к конечномерным динамическим системам применима теорема Хопфа [6]. Поэтому следующим этапом является сведение исходного отображения Ψ_μ к конечномерному отображению. Это сведение мы проведем при помощи теоремы о центральном многообразии [6].

Теорема (о центральном многообразии).

Пусть Ψ - отображение, определенное в окрестности нуля в банаховом пространстве Z. Будем предполагать, что Ψ принадлежит классу C^{k+1}, $k \ge 1$ и $\Psi(0) = 0$. Предположим также, что линеаризация $D\Psi(0)$ отображения Ψ в нуле имеет спектральный радиус 1 и что спектр $D\Psi(0)$ расщепляется на две части: часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности. Обозначим через Y обобщенное собственное подпространство оператора $D\Psi(0)$, порожденное частью спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что Y имеет размерность $d < \infty$.

Тогда существует окрестность нуля $V \subset Z$ и C^k-подмногообразие $M \subset V$ размерности d, проходящее через 0 и касающееся Y в точке 0, для которого выполнены следующие условия:

(a) *(локальная инвариантность): если $x \in M$ и $\Psi(x) \in V$, то $\Psi(x) \in M$;*

(b) *(локальная устойчивость): если $\Psi^n(x) \in V$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то при $n \to \infty$ расстояние между $\Psi^n(x)$ и M стремится к нулю.*

Напомним определение обобщенного собственного подпространства линейного оператора.

Определение 1. Пусть $A : Z \to Z$ - ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве Z, $\sigma(A)$ - его спектр. Пусть $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где расстояние $d(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Подпространство $Z_i \subset Z$ $(i = 1, 2)$ называется обобщенным собственным подпространством оператора A, порожденным частью спектра σ_i $(i = 1, 2)$, если

1. $Z_1 \oplus Z_2 = Z$;

2. Z_1, Z_2 - A-инвариантны;

3. Спектр сужения $\sigma(A|Z_i) = \sigma_i$ $(i = 1, 2)$.

Замечание 2. Обобщенное собственное подпространство собственного значения λ не всегда совпадает с собственным подпространством λ. В конечномерном случае обобщенное собственное подпространство λ совпадает с подпространством, соответствующим всем жордановым клеткам, содержащим λ в канонической жордановой форме.

Докажем, что к отображению

$$(\Psi_\mu, \mu): \quad C^1[0,1] \times R \to C^1[0,1] \times R,$$

где отображение Ψ_μ (см. (13))определено в следствии 1 из леммы 2, применима теорема о центральном многообразии. Для этого докажем несколько утверждений.
Лемма 4. *Спектр оператора* A_μ

$$\sigma(A_\mu) = \{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu);\, 0|\, k = 0, 1, 2, \cdots\},$$

где $\lambda_k(\mu)$, $\bar{\lambda}_k(\mu)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ *- собственные значения оператора* A_μ.
Доказательство леммы 4. Обозначим

$$S = \{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu);\, 0|\, k = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Покажем, что оператор $(A_\mu - \lambda E)$ (E - тождественный оператор) имеет ограниченный обратный на $C^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\lambda \notin S$. Тогда лемма 4 будет доказана. Пусть $\lambda \neq 0$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$(A_\mu - \lambda E)x(t) = y(t). \tag{29}$$

Учитывая (14) и решая уравнение (29), получим

$$x(t) = \alpha e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t \frac{v}{\lambda^2} e^{\beta \xi} y(\xi)\, d\xi - \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} e^{-\beta t} y(0), \tag{30}$$

где

$$\alpha = x(0),\ \beta = \frac{v}{\lambda} + u. \tag{31}$$

Причем из (29) при $t = 0$ получим условие

$$x(1) - \lambda x(0) = y(0). \tag{32}$$

Подставляя выражение (30) в (32), получим:

$$[x(0)\lambda + y(0)][e^{-\beta} - \lambda] - y(1) + \int_0^1 \frac{v}{\lambda} e^{\beta(\xi - 1)} y(\xi)\, d\xi = 0. \tag{33}$$

Из (33) значение $x(0)$ определяется единственным образом для каждой функции $y(t) \in C^1[0,1]$, если $\lambda - e^{-\beta} \neq 0$. Таким образом, если $\lambda \neq 0$ и $\lambda - e^{-\beta} \neq 0$ то для любой $y(t) \in C^1[0,1]$ существует единственная функция $x(t) \in C^1[0,1]$, которая удовлетворяет (29). Покажем, что условие $\lambda - e^{-\beta} \neq 0$ эквивалентно условию $\lambda \notin \{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu)|\, k = 0, 1, 2, \cdots\}$. Пусть $\lambda = re^{i\phi}$. Тогда, учитывая (31), легко видеть, что уравнение $\lambda - e^{-\beta} = 0$ эквивалентно системе (23) в доказательстве леммы 3, а решения этой системы и только они являются собственными значениями оператора A_μ (см. доказательство леммы 3). Поэтому для любого $\lambda \notin \{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu)|\, k = 0, 1, 2, \cdots\}$ ограниченный линейный оператор $A_\mu - \lambda E$ осуществляет взаимно-однозначное отображение банахова

пространства $C^1[0,1]$ на себя. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе [4, с.225] на пространстве $C^1[0,1]$ существует ограниченный $(A_\mu - \lambda E)^{-1}$. Таким образом, если $\lambda \notin S$, то λ не принадлежит $\sigma(A_\mu)$.
Пусть теперь $\lambda = 0$. Рассматривая уравнение $A_\mu x(t) = y(t)$, аналогичным образом получим, что $y(t)$ должен удовлетворять следующему соотношению

$$\frac{u}{v}y(1) + \frac{1}{v}y'(1) + y(0) = 0. \tag{34}$$

Следовательно, ограниченный оператор A_μ^{-1} существует только для тех $y(t) \in C^1[0,1]$, которые удовлетворяют соотношению (34). Поэтому $\lambda = 0$ по определению принадлежит спектру $\sigma(A_\mu)$ оператора A_μ. Таким образом, оператор $A_\mu - \lambda E$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $\lambda \notin S$. Лемма 4 доказана.
Отображение Ψ_μ будет удовлетворять всем условиям теоремы о центральном многообразии, если обобщенное собственное подпространство линеаризованного оператора A_μ, соответствующее части спектра на единичной окружности, имеет конечную размерность. Точнее, мы покажем, что это обобщенное собственное подпространство совпадает с собственным подпространством, отвечающим части спектра на единичной окружности. Для доказательства соответствующего утверждения нам потребуются две вспомогательные леммы.
Лемма 5. *Пусть $A : Z \to Z$ - ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве Z, λ_1, λ_2 - его простые собственные значения, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть u_1, $u_2 \in Z$ - собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Обозначим через u_1^*, $u_2^* \in Z^*$ собственные векторы сопряженного оператора A^*, соответствующие собственным значениям $\bar\lambda_1$ и $\bar\lambda_2$. Тогда, если существуют u_1^*, $u_2^* \in Z^*$ такие, что $(u_1^*, u_1) = 1$ и $(u_2^*, u_2) = 1$, то*
1) линейный оператор $P : Z \to Z$

$$Pu = u_1(u, u_1^*) + u_2(u, u_2^*) \tag{35}$$

является проектором пространства Z на собственное подпространство Z_1 оператора A, соответствующее собственным значениям λ_1, λ_2.
2) $A\,P = P\,A$.
Доказательство леммы 5. Заметим, что $(u_j^*, u_i) = 0$ для любых $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, так как

$$\bar\lambda_j(u_j^*, u_i) = (\bar\lambda_j u_j^*, u_i) = (A^* u_j^*, u_i) = (u_j^*, Au_i) = \bar\lambda_i(u_j^*, u_i).$$

По определению, линейный оператор $P : Z \to Z$ является проектором, если для любого $u \in Z$ выполняется равенство $PPu = Pu$. Для оператора (35)

$$\begin{aligned} PPu = u_1(Pu, u_1^*) + u_2(Pu, u_2^*) = u_1(u_1(u, u_1^*) + u_2(u, u_2^*), u_1^*) + \\ u_2(u_1(u, u_1^*) + u_2(u, u_2^*), u_2^*) = u_1(u, u_1^*) + u_2(u, u_2^*) = Pu, \end{aligned}$$

следовательно, оператор P является проектором. Очевидно, что $Pu = u$ тогда и только тогда, когда $u \in Z_1$, поэтому оператор P проектирует пространство Z на собственное подпространство Z_1. Первое утверждение леммы доказано.
Докажем второе утверждение. Для любого $u \in Z$ верно

$$\begin{aligned} APu = A(u_1(u, u_1^*) + u_2(u, u_2^*)) = \lambda_1 u_1(u, u_1^*) + \lambda_2 u_2(u, u_2^*) = \\ u_1(u, A^* u_1^*) + u_2(u, A^* u_2^*) = u_1(Au, u_1^*) + u_2(Au, u_2^*) = PAu. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.
Лемма 6. *Пусть параметр $\mu = 0$. Тогда*
1) Меры

$$\mu_1(d\xi) = c_1\Big(\frac{e^{i\phi}}{u - i\phi}\delta(\xi - 1) + e^{i\phi\xi}\Big)\,d\xi,$$

и

$$\mu_2(d\xi) = c_2\Big(\frac{e^{-i\phi}}{u+i\phi}\delta(\xi-1) + e^{-i\phi\xi}\Big)\,d\xi,$$

где c_1 *и* c_2 *- константы,* $\delta(\cdot)$ *- функция Дирака, являются собственными векторами оператора* A^*_μ*, отвечающими собственным значениям* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_0(0) = e^{-i\phi}$ *и* $\lambda_2 = \lambda_0(0) = e^{i\phi}$ *оператора* A^*_μ *соответственно.*
2) Если

$$c_1 = \frac{u-i\phi}{u-i\phi+1} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{u+i\phi}{u+i\phi+1},$$

то

$$\int_0^1 e^{-i\phi t}\,\mu_1(dt) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 e^{i\phi t}\,\mu_2(dt) = 1.$$

Доказательство леммы 6. Пусть $\mu = 0$, тогда по лемме 3 собственные значения оператора A_μ равны $\lambda(0) = e^{i\phi}$ и $\bar{\lambda}(0) = e^{-i\phi}$, а соответствующие им собственные векторы равны $e^{i\phi t}$ и $e^{-i\phi t}$, $t \in [0,1]$.

Найдем сопряженный оператор A^*_μ к оператору A_μ (14). Так как оператор $A_\mu : C^1[0,1] \to C^1[0,1]$, то по определению сопряженный оператор $A^*_\mu : (C^1[0,1])^* \to (C^1[0,1])^*$, где $(C^1[0,1])^*$ - пространство мер и их производных[4], являющееся сопряженным к пространству $C^1[0,1]$. Для доказательства леммы достаточно найти сопряженный оператор A^*_μ на подпространстве $(C[0,1])^*$ пространства $(C^1[0,1])^*$, то есть на пространстве мер. Для любых $z(t) \in C^1[0,1]$ и $\mu(dt) \in (C[0,1])^*$ по определению сопряженного оператора

$$(A_\mu z(t), \mu(dt)) = (z(t), A^*_\mu \mu(dt)).$$

Учитывая (14), несложно показать, что верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}&(A_\mu x(t), \mu(dt)) = \textstyle\int_0^1 e^{-ut} x(1)\bar{\mu}(dt) - v\int_0^1\int_0^1 e^{-u(t-\xi)}\Theta(t-\xi)x(\xi)\bar{\mu}(dt)\,d\xi = \\ &x(1)\textstyle\int_0^1 e^{-ut}\bar{\mu}(dt) - v\int_0^1[\int_\xi^1 e^{-u(t-\xi)}\bar{\mu}(dt)]x(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

где $\Theta(\xi)$ - функция Хевисайда, равная 1, если $\xi > 0$ и 0, если $\xi \le 0$. Следовательно,

$$A^*_\mu(\mu(dt))(\xi) = \Big(\delta(\xi-1)\int_0^1 e^{-ut}\mu(dt) - v\int_\xi^1 e^{-u(t-\xi)}\mu(dt)\Big)d\xi.$$

Покажем, что меры $\mu_1(dt)$ и $\mu_2(dt)$ из утверждения леммы являются собственными векторами оператора A^*_μ, соответствующими собственным значениям $\bar{\lambda}_1 = e^{-i\phi}$ и $\bar{\lambda}_2 = e^{i\phi}$ при $\mu = 0$. Докажем сначала, что $\mu_1(dt)$ является собственным вектором оператора A^*_μ, соответствующим собственному значению $\bar{\lambda}_1 = e^{-i\phi}$ при $\mu = 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}&A^*_\mu(\mu_1(dt))(\xi) = \Big(\delta(\xi-1)\textstyle\int_0^1 e^{-ut}\mu_1(dt) - v\int_\xi^1 e^{-u(t-\xi)}\mu_1(dt)\Big)d\xi = \\ &e^{-i\phi}c_1\Big[\tfrac{e^{i\phi}}{u-i\phi}\delta(\xi-1) + \tfrac{ve^{i\phi}}{i\phi-u}e^{i\phi\xi}\Big]d\xi.\end{aligned}$$

Из последнего равенства очевидно, что $\mu_1(dt)$ является собственным вектором оператора A^*_μ, соответствующим собственному значению $\bar{\lambda}_1 = e^{-i\phi}$ тогда и только тогда, когда $\frac{ve^{i\phi}}{i\phi-u} = 1$. Однако, как нетрудно убедиться, последнее равенство всегда имеет место при $\mu = 0$, так как эквивалентно уравнению для границы устойчивости v_{gr}

[4]Подробнее о структуре пространства $(C^1[0,1])^*$ см. [9].

(7). Взяв комплексное сопряжение, получим, что мера $\mu_2(d\xi)$ является собственным вектором оператора A^*_μ, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = e^{-i\phi}$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение леммы проверяется с помощью непосредственной подстановки. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть параметр $\mu = 0$ *и* Y *- обобщенное собственное подпространство оператора* A_μ *(14), соответствующее части спектра* $\{\lambda_0(0), \bar{\lambda}_0(0)\}$ *на единичной окружности,* Y'*- собственное подпространство, соответствующее этой части спектра, т.е.* $Y' = \{y(t) \in C^1[0,1] : \, y(t) = \alpha e^{i\phi t} + \beta e^{-i\phi t}, \, 0 \le t \le 1, \, \alpha, \beta \in C\}$. *Тогда* $Y = Y'$.

Доказательство леммы 7. Из леммы 6 следует, что для оператора A_μ выполнены все условия леммы 5. Следовательно, линейный оператор P, определенный в лемме 5, является проектором пространства $Z = C^1[0,1]$ на собственное подпространство Y' оператора A_μ, т.е. $PZ = Y'$. Покажем, что Y' является обобщенным собственным подпространством оператора A_μ, соответствующим части спектра на единичной окружности. Обозначим пространство $(E - P)Z = X$ (E - тождественный оператор). Очевидно, что $X \oplus Y' = Z$. Пространства X и Y' инвариантны относительно оператора A_μ, так как по лемме 5 $PA_\mu = A_\mu P$. Поэтому, по определению, пространство Y' будет обобщенным собственным подпространством оператора A_μ, соответствующим части спектра на единичной окружности, если спектры сужений оператора A_μ на Y' и X равны соответственно $\sigma(A_\mu|Y') = \{\lambda_0(0), \bar{\lambda}_0(0)\}$, $\sigma(A_\mu|X) = \sigma(A_\mu|Z) \setminus \sigma(A_\mu|Y')$. Пусть сужение $A_\mu|Y' = B$, тогда оператор $B : Y' \to Y'$ и для любого $y(t) \in Y'$

$$By(t) = \alpha e^{i\phi t} + \beta e^{-i\phi t},$$

где α и β - комплексные числа. Очевидно, что оператор B действует в конечномерном пространстве и имеет два собственных значения $e^{i\phi}$, $e^{-i\phi}$. Следовательно, оператор $(B - \lambda E)$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $\lambda \notin \{e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$. Поэтому спектр $\sigma(A_\mu|Y') = \{\lambda_0(0), \bar{\lambda}_0(0)\}$. Из леммы 4 следует, что спектр $\sigma(A_\mu) = \sigma(A_\mu|Y') \cup \{\lambda_k(0), \bar{\lambda}_k(0); 0 | \, k = 1, 2, \cdots\}$. Очевидно, что $\sigma(A_\mu|X) \subset \sigma(A_\mu)$. Таким образом, для доказательства того, что $\sigma(A_\mu|X) = \{\lambda_k(0), \bar{\lambda}_k(0); 0 | \, k = 1, 2, \cdots\}$ надо доказать, что $\sigma(A_\mu|X) \cap \sigma(A_\mu|Y') = \oslash$. Пусть $\lambda \in \sigma(A_\mu|Y')$. Из пункта 3 леммы 3 следует, что $(A_\mu - \lambda E)x(t) \neq 0$ для любого $x(t) \in X$. Следовательно, оператор $(A_\mu - \lambda E)$ является взаимнооднозначным в пространстве X. Пусть $\lambda = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Рассмотрим уравнение

$$(A_\mu - e^{i\phi}E)x_1(t) = x_2(t), \quad \text{где } x_i(t) \in X, \, i = 1, 2. \tag{36}$$

Тогда из (30) с учетом того, что при $\mu = 0$ в формуле (30) $\beta = -i\phi$ (так как выполнено (7)), получим

$$x_1(t) = x_1(0)e^{i\phi t} + e^{i\phi t}\int_0^t ve^{-2i\phi}e^{-i\phi\xi}x_2(\xi)\,d\xi - e^{-i\phi}x_2(t) + e^{-i\phi}e^{i\phi t}x_2(0). \tag{37}$$

Заметим, что из вида множества X следует, что $x_2(t) \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 x_2(t)\mu_i(dt) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{38}$$

где $\mu_i(dt)$ $(i = 1, 2)$ - собственные векторы сопряженного оператора A^*_μ, определенные в лемме 6. Найдем, при каком условии $x_1(t) \in X$, т.е. найдем условие, при котором

$$\int_0^1 x_1(t)\mu_i(dt) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{39}$$

Подставим (37) в равенство

$$\int_0^1 x_1(t)\mu_2(dt) = 0.$$

Получим

$$\begin{array}{l} \int_0^1 x_1(t)\mu_2(dt) = \int_0^1 x_1(0)e^{i\phi t}\mu_2(dt) + \int_0^1 e^{i\phi t}\int_0^t ve^{\ \ 2i\phi}e^{\ \ i\phi\xi}x_2(\xi)\,d\xi\mu_2(dt) \\ \int_0^1 e^{\ \ i\phi}x_2(t)\mu_2(dt) + \int_0^1 e^{\ \ i\phi}e^{i\phi t}x_2(0)\mu_2(dt). \end{array}$$

Из леммы 6 следует, что первый интеграл в последнем выражении равен $x_1(0)$, а четвертый равен $e^{\ \ i\phi}x_2(0)$. Третий интеграл равен 0 в силу (38). Обозначим второй интеграл в последнем выражении через I. Тогда

$$\int_0^1 x_1(t)\mu_2(dt) = x_1(0) + I + e^{\ \ i\phi}x_2(0).$$

Найдем I. Подставляя выражение для $\mu_2(dt)$ из леммы 6, получим

$$I = (ve^{\ \ 2i\phi})\int_0^1 e^{\ \ i\phi\xi}x_2(\xi)\,d\xi \quad vc_2e^{\ \ 2i\phi}\int_0^1 \xi e^{\ \ i\phi\xi}x_2(\xi)\,d\xi. \tag{40}$$

Из (38), учитывая явный вид собственного вектора $\mu_2(dt)$, несложно показать, что

$$\int_0^1 x_2(t)e^{\ \ i\phi t}\,dt = \quad \frac{e^{\ \ i\phi}}{u + i\phi}x_2(1).$$

Подставляя это равенство и выражение для c_2 из леммы 6 в (40), получим, что

$$I = \quad \frac{ve^{\ \ 3i\phi}}{u + i\phi}x_2(1) \quad \frac{ve^{\ \ 2i\phi}(u + i\phi)}{u + i\phi + 1}\int_0^1 \xi e^{\ \ i\phi\xi}x_2(\xi)\,d\xi. \tag{41}$$

Таким образом,

$$x_1(0) = \quad e^{\ \ i\phi}x_2(0) \quad I, \tag{42}$$

где I определено в (41). Покажем что, если выполнено (39) для $i = 2$, то (39) выполнено и для $i = 1$. Рассмотрим $x_3(t) = x_1(t) \quad e^{\ \ i\phi t}\int_0^1 x_1(t)\mu_1(dt)$. Функция $x_3(t) \in X$, так как, пользуясь леммой 6 и тем, что $\int_0^1 x_i(t)\mu_j(dt) = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2$ (см. доказательство леммы 5), несложно проверить, что $\int_0^1 x_3(t)\mu_i(dt) = 0$, $i = 1, 2$. Выпишем $A_\mu x_3(t)$:

$$A_\mu x_3(t) = x_2 \quad e^{\ \ i\phi}\Big[\int_0^1 x_1(t)\mu_1(dt)\Big]e^{\ \ i\phi t} + e^{i\phi}x_1(t).$$

Так как оператор A_μ инвариантен на X, то $A_\mu x_3(t) \quad e^{i\phi}x_3(t) \in X$. Заметим, что

$$A_\mu x_3(t) \quad e^{i\phi}x_3(t) = x_2(t) \quad (e^{\ \ i\phi} \quad e^{i\phi})\Big[\int_0^1 x_1(t)\mu_1(dt)\Big]e^{\ \ i\phi t}.$$

Так как $A_\mu x_3(t) \quad e^{i\phi}x_3(t) \in X$, $x_2(t) \in X$, а $e^{\ \ i\phi t} \notin X$, то из последнего равенства следует, что $\int_0^1 x_1(t)\mu_1(dt) = 0$. Таким образом, (39) выполнено, т. е. $x_1(t) \in X$, тогда и только тогда, когда выполнено (42).

Подставляя (42) в (37) получим, что для любой $x_2(t) \in X$ существует функция $x_1(t) \in X$ такая, что выполнено (36). Поэтому линейный оператор $A_\mu|_X \quad e^{i\phi}E$ взаимно однозначно отображает банахово пространство X на себя. Тогда по теореме

Банаха об обратном операторе на пространстве X оператор $(A_\mu|_X \quad e^{i\phi}E)^{\ 1}$ - ограничен. Поэтому $e^{i\phi} \notin \sigma(A_\mu|X)$. Рассматривая комплексное сопряжение, получим, что $e^{\ i\phi} \notin \sigma(A_\mu|X)$. Таким образом, мы доказали, что $\sigma(A_\mu|X) \cap \sigma(A_\mu|Y') = \oslash$. Следовательно, подпространство Y' является обобщенным собственным подпространством оператора A_μ, соответствующим части спектра на единичной окружности, т.е. $Y' = Y$. Лемма 7 доказана.

Следствие 2 (из леммы 7). Пусть параметр $\mu = 0$. Обобщенное собственное подпространство Y оператора A_μ, соответствующее части спектра на единичной окружности, имеет размерность $d = 2$.

Таким образом, отображение

$$(\Psi_\mu, \mu): \quad C^1[0,1] \times R \to C^1[0,1] \times R,$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о центральном многообразии. По этой теореме существует окрестность нуля

$$\tilde{V} = V \times U \subset C^1[0,1] \times R \tag{43}$$

и дифференцируемое подмногообразие $M \subset \tilde{V}$ размерности 3, проходящее через 0 и касающееся $Y \times R$ в точке 0, для которого выполнены следующие условия:
(a) если $z \in M$ и $(\Psi_\mu(z), \mu) \in \tilde{V}$, то $(\Psi_\mu(z), \mu) \in M$ (локальная инвариантность);
(b) если $(\Psi_\mu^n(z), \mu) \in \tilde{V}$ для всех $n = 0, 1, 2, ...$, то при $n \to \infty$ расстояние между $(\Psi_\mu^n(z), \mu)$ и M стремится к нулю[5] (локальная устойчивость).
Подмногообразия $\mu = const$ этого инвариантного многообразия образуют однопараметрическое семейство инвариантных многообразий M_μ, размерность каждого из которых равна двум. Сделаем замену координат и перейдем к двухмерному многообразию M_0. Таким образом, исходная бесконечномерная задача сведена к следующей двухмерной задаче (опуская вопрос о глобальной устойчивости): имеется дифференцируемое (класса C^8)[6] отображение $F_\mu: R^2 \to R^2$, удовлетворяющее следующим условиям:
(a) $F_\mu(0,0) = (0,0)$,
(b) $dF_\mu(0,0)$ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ таких, что $|\lambda(0)| = 1$,
(c) $\frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} |_{\mu=0} > 0$.
Интересно было бы исследовать вопрос о глобальной устойчивости найденного двухмерного инвариантного многообразия M_0. Для этого, учитывая утверждение (b) теоремы о центральном многообразии, надо доказать существование окрестности нуля $W \subset C^1\,[0,1]$ такой, что $M_0 \subset W \subset V$[7] и обладающей следующим свойством: для любого $z \in W \qquad \Psi_\mu^n(z) \in W$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Определение 2. Будем говорить, что левая часть рассматриваемого нами дифференциального уравнения с запаздыванием (1) (т.е. функция $H(x,y)$) обладает S-свойством, если существует окрестность нуля $W \subset C^1\,[0,1]$ такая, что соответствующее функции $H(x,y)$ двухмерное инвариантное многообразие $M_0 \subset W$ и для любого $z \in W$ $\Psi_\mu^n(z) \in W$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Таким образом, мы можем сформулировать следующее утверждение.

---

[5] Ψ_μ^n обозначает суперпозицию отображения Ψ_μ, взятую n раз.

[6] Как было указано ранее (см. лемму 2), исходное бесконечномерное отображение Ψ_μ принадлежит классу C^9, т.е. является 9 раз непрерывно дифференцируемым, поэтому после применения теоремы о центральном многообразии мы можем гарантировать, что соответствующее ему отображение F_μ на найденном двухмерном многообразии принадлежит классу C^8.

[7] V есть окрестность нуля пространства $C^1\,[0,1]$, определенная в (43), существование которой гарантирует теорема о центральном многообразии.

Утверждение 1. Если функция $H(x, y)$ обладает S-свойством, то найденное двухмерное инвариантное многообразие M_0 будет глобально устойчивым в области W, т.е. для любого $z \in W$ расстояние между $\Psi_\mu^n(z)$ и M_0 стремится к нулю при $n \to \infty$.

II. Рассмотрим отображение F_μ, удовлетворяющее (a) - (c) и пусть

$$\lambda(0)^k \neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5^{8}. \tag{44}$$

Лемма 8. *Пусть $\lambda(0)^k \neq 1$ при $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда существует гладкая зависящая от μ замена переменных, приводящая отображение F_μ к виду*

$$F_\mu(z) = \lambda(\mu)z + \alpha(\mu)z^2\bar{z} + \beta(\mu)\bar{z}^4 + O(|z|^5), \quad z \quad \textit{комплексное}. \tag{45}$$

Более того, если $\lambda^5 \neq 1$, то можно добиться, чтобы $\beta(\mu) \equiv 0$.

Доказательство леммы 8 приведено в [8, с. 196-197].

Замечание 3. Величина

$$l_1 = Re\Big[\alpha(0)\bar{\lambda}(0)\Big] \tag{46}$$

называется первой ляпуновской величиной отображения F_μ.

Напомним, что отображение F_μ совпадает с отображением Ψ_μ на полученном двухмерном инвариантном многообразии. Соответственно, $dF_\mu(0, 0) = A_\mu$, где A_μ - линейный оператор (14), $\lambda(0) = \lambda_0(0) = e^{i\phi}$, где $\cos\phi = \quad \frac{u}{v_{gr}}$ и собственным значениям $\lambda_0(0), \bar{\lambda}_0(0)$ соответствуют собственные векторы $x_1 = e^{i\phi t}$ и $x_2 = \bar{x}_1 = e^{\;\; i\phi t}$ (см. лемму 3). Поэтому мы можем искать инвариантное двухмерное многообразие в виде

$$\begin{aligned} &h(z, \bar{z}) = zx_1 + \bar{z}\bar{x}_1 + z^2x_{2,0} + z\bar{z}x_{1,1} + \bar{z}^2x_{0,2} + z^3x_{3,0} + \\ &z^2\bar{z}x_{2,1} + z\bar{z}^2x_{1,2} + \bar{z}^3x_{0,3} + o(|z|^3), \end{aligned} \tag{47}$$

где $x_1, \bar{x}_1$ - собственные векторы оператора A_0, $x_{i,j} \in C^1[0, 1]$, $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Рассмотрим отображение $\Psi_0(h)$ на двухмерном многообразии. Разложим $\Psi_0(h)$ в ряд Тэйлора в окрестности нуля

$$\Psi_0(h) = Ah + B(h, h) + C(h, h, h) + o(\|h\|^3), \tag{48}$$

где оператор $A = A_0$, $B = \frac{1}{2}\Psi_0{}''(0)$, $C = \frac{1}{6}\Psi_0{}'''(0)$.

Учитывая введенные обозначения, справедливо следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $\mu = 0$. Параметр $\alpha(0)$ в разложении (45) равен*

$$\alpha(0) = (\mu_1(dt), 2B(x_1, x_{1,1}) + 2B(\bar{x}_1, x_{2,0}) + 3C(\bar{x}_1, x_1, x_1)), \tag{49}$$

где $\mu_1(dt)$ - собственный вектор сопряженного оператора A^* (определенный в лемме 6), соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_0(0) = e^{\;\; i\phi}$ и удовлетворяющий условию нормировки

$$(\mu_1, x_1) = \int_0^1 x_1(t)\bar{\mu}_1(dt) = 1.$$

Доказательство леммы 9. На инвариантном двухмерном многообразии

$$\Psi_0(h(z, \bar{z})) = h(\omega, \bar{\omega}). \tag{50}$$

Из леммы 8 следует, что

$$\begin{aligned} \omega &= e^{i\phi}z + \alpha z^2\bar{z} + o(|z|^3), \\ \bar{\omega} &= e^{\;\; i\phi}z + \bar{\alpha}\bar{z}^2z + o(|z|^3), \end{aligned}$$

[8]Требование $\lambda(0)^5 \neq 1$ является техническим и от него можно отказаться ([8]).

где $\alpha = \alpha(0)$. Подставляя в (50) разложение (48) и приравнивая линейные и квадратичные члены, получим

$$
\begin{aligned}
& z^2e^{2i\phi}x_{2,0} + z\bar{z}x_{1,1} + e^{\ 2i\phi}\bar{z}^2x_{0,2} = z^2Ax_{2,0} + z\bar{z}Ax_{1,1} + \bar{z}^2Ax_{0,2} + z^2B(x_1, x_1)+ \\
& z\bar{z}(B(x_1, \bar{x}_1) + B(\bar{x}_1, x_1)) + \bar{z}^2B(\bar{x}_1, \bar{x}_1).
\end{aligned}
$$

Из последнего уравнения имеем систему для определения $x_{2,0}$, $x_{1,1}$ и $x_{0,2}$

$$
\begin{aligned}
& e^{2i\phi}x_{2,0} \quad Ax_{2,0} = B(x_1, x_1), \\
& x_{1,1} \quad Ax_{1,1} = B(x_1, \bar{x}_1) + B(\bar{x}_1, x_1), \\
& e^{\ 2i\phi}x_{0,2} \quad Ax_{0,2} = B(\bar{x}_1, \bar{x}_1).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Эти уравнения имеют единственное решение, поскольку $e^{2i\phi}$, 1 и $e^{\ 2i\phi}$ не принадлежат спектру оператора A (см. лемму 4). Из последней системы очевидно, что $x_{2,0} = \bar{x}_{0,2}$ и $x_{1,1}$ - вещественно.

Аналогично, подставляя в (50) разложение (48) и приравнивая кубические члены, получим

$$
\begin{aligned}
& z^3Ax_{3,0} + z^2\bar{z}Ax_{2,1} + z\bar{z}^2Ax_{1,2} + \bar{z}^3Ax_{0,3}+ \\
& 2B(x_1, x_{2,0})z^3 + 2(B(x_1, x_{1,1}) + B(\bar{x}_1, x_{2,0}))z^2\bar{z}+ \\
& 2(B(\bar{x}_1, x_{1,1}) + B(x_1, x_{0,2}))z\bar{z}^2 + 2B(\bar{x}_1, x_{0,2})\bar{z}^3 + C(x_1, x_1, x_1)z^3+ \\
& (C(\bar{x}_1, x_1, x_1) + C(x_1, \bar{x}_1, x_1) + C(x_1, x_1, \bar{x}_1))z^2\bar{z}+ \\
& (C(\bar{x}_1, \bar{x}_1, x_1) + C(\bar{x}_1, x_1, \bar{x}_1) + C(x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1))z\bar{z}^2+ \\
& C(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)\bar{z}^3 = \alpha z^2\bar{z}x_1 + \bar{\alpha}\bar{z}^2z\bar{x}_1+ \\
& e^{3i\phi}z^3x_{3,0} + e^{i\phi}z^2\bar{z}x_{2,1} + e^{\ i\phi}z\bar{z}^2x_{1,2} + e^{\ 3i\phi}\bar{z}^3x_{0,3}.
\end{aligned}
$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar{z}$, получим уравнения для определения $x_{0,3}$, $x_{3,0}$, $x_{2,1}$, $x_{1,2}$

$$
\begin{aligned}
& e^{3i\phi}x_{3,0} \quad Ax_{3,0} = 2B(x_1, x_{2,0}) + C(x_1, x_1, x_1), \\
& e^{\ 3i\phi}x_{0,3} \quad Ax_{0,3} = 2B(\bar{x}_1, x_{0,2}) + C(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1), \\
& e^{i\phi}x_{2,1} \quad Ax_{2,1} = 2B(x_1, x_{1,1}) + 2B(\bar{x}_1, x_{2,0}) + 3C(\bar{x}_1, x_1, x_1) \quad \alpha x_1, \\
& e^{\ i\phi}x_{1,2} \quad Ax_{1,2} = 2B(\bar{x}_1, x_{1,1}) + 2B(x_1, x_{0,2}) + 3C(\bar{x}_1, \bar{x}_1, x_1) \quad \bar{\alpha}\bar{x}_1.
\end{aligned}
$$

Поскольку $e^{3i\phi}$ и $e^{\ 3i\phi}$ не принадлежат спектру оператора A, то первые два уравнения имеют единственное решение. При этом $x_{3,0} = \bar{x}_{0,3}$. Напротив, $e^{i\phi}$ и $e^{\ i\phi}$ принадлежат спектру оператора A, поэтому третье и четвертое уравнение имеют решения, если только их правые части ортоганальны собственным векторам сопряженного оператора A^*, отвечающим собственным значениям $e^{\ i\phi}$ и $e^{i\phi}$ соответственно. Учитывая лемму 6, эти уравнения имеют решение тогда и только тогда, когда

$$
(x_1^*, 2B(x_1, x_{1,1}) + 2B(\bar{x}_1, x_{2,0}) + 3C(\bar{x}_1, x_1, x_1)) = \alpha,
\tag{52}
$$

где x_1^* - собственный вектор сопряженного оператора A^*, отвечающий собственному значению $e^{\ i\phi}$, т.е. $A^*x_1^* = e^{\ i\phi}x_1^*$, и удовлетворяющий нормировке $(x_1^*, x_1) = 1$. Таким образом, $x_1^* = \mu_1(dt)$, где $\mu_1(dt)$ определено в лемме 6. Из (52) получаем утверждение леммы. Лемма 9 доказана.

Предположим, что первая ляпуновская величина (см. замечание 3) l_1 отображения F_0 при $\mu = 0$ отлична от нуля. Заметим, что условия $\lambda(0)^k \neq 1$, где $k = 1, 2, 4$ в нашем случае выполняются автоматически, а условие (19) в теореме 1 эквивалентно ограничению $\lambda(0)^3 \neq 1$. При этом ограничении для двухмерного отображения F_μ выполняются все условия теоремы Хопфа [6].

Теорема (Хопфа). Пусть для отображения $F_\mu : R^2 \to R^2$, $F_\mu \in C^8(U)$, *где* U*-некоторая*

окрестность нуля в R^2, выполнены условия (a), (b), (c), т.е
(a) $F_\mu(0,0) = (0,0)$,
(b) $dF_\mu(0,0)$ *имеет два комплексно-сопряженных собственных значения* $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ *таких, что* $|\lambda(0)| = 1$,
(c) $\frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu}\,|_{\mu=0} > 0$,
причем $\lambda(0)^k \neq 1$, *где* $k = 1,2,3,4$. *Тогда*
1) существует гладкая зависящая от μ *замена координат, приводящая* F_μ *к виду*

$$F_\mu(X) = G_\mu(X) + O(|X|^5), \quad X \in R^2,$$

где в полярных координатах (r,ϕ) *функция* $G_\mu(r,\phi)$ *имеет вид*

$$G_\mu(r,\phi) = \Big(|\lambda(\mu)|r - a(\mu)r^3,\ \phi + \Theta(\mu) + b(\mu)r^2\Big),$$

$a(\mu), b(\mu), \Theta(\mu)$ *- гладкие функции от* μ, $a(0) = l_1$ *- первая ляпуновская величина (определенная в замечании 3);*
2) если $a(0) > 0$ $(a(0) < 0)$, *то отображение* F_μ *имеет устойчивую (неустойчивую) инвариантную замкнутую кривую класса* C^2 *для всех достаточно малых* $\mu > 0$ $(\mu < 0)$.
Схема доказательства теоремы Хопфа.
Сформулированная теорема совпадает с теоремой Хопфа, доказанной в [6] за исключением того факта, что полученная одномерная инвариантная кривая является дважды непрерывно дифференцируемой. Поэтому доказательства этих теорем практически совпадают и мы остановимся подробно лишь на некоторых пунктах доказательства.
Первое утверждение теоремы полностью доказано в [6]. Остановимся подробнее на доказательстве второго утверждения. Предположим, что $a(0) > 0$ (в случае, когда $a(0) < 0$ доказательство аналогично). Из первого утверждения теоремы следует, что отображение F_μ в полярных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} R &= (1+\mu)r - a(\mu)r^3 + O(r^5) \\ \Phi &= \phi + \Theta(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4). \end{aligned}$$

Отбрасывая $O(r^5)$ в первом уравнении и $O(r^4)$ во втором уравнении, мы получим усеченное отображение, которое имеет инвариантную окружность радиуса $r^0 = \sqrt{\frac{\mu}{a(\mu)}}$ для малых $\mu > 0$. Так как полное отображение является небольшим возмущением усеченного отображения, то естественно искать инвариантную кривую полного отображения вблизи окружности радиуса r^0, инвариантной для усеченного отображения. Аналогично [8, с. 198] сделаем замену координат, результатом которой будет новая координата

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big(\sqrt{\frac{a(\mu)}{\mu}}\,r - 1\Big). \tag{53}$$

Тогда на плоскости (x,ϕ) отображение будет иметь вид

$$\begin{aligned} X &= (1 - 2\mu)x + \mu^{\frac{3}{2}} X_1(x,\phi,\mu), \\ \Phi &= \phi + \Theta_1(\mu) + \mu^{\frac{3}{2}}\Phi_1(x,\phi,\mu), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\Theta_1(\mu) = \Theta(\mu) + \tfrac{b(\mu)}{a(\mu)}\mu, \\ &X_1(x,\phi,\mu) = -x^3\mu^{\frac{1}{2}} - 3x^2 + O(x^5), \\ &\Phi_1(x,\phi,\mu) = 2x\tfrac{b(\mu)}{a(\mu)} + \tfrac{b(\mu)}{a(\mu)}x^2\mu^{\frac{1}{2}} + O(x^4). \end{aligned}$$

Очевидно, что функции X_1 и Φ_1 принадлежат классу C^3 по x, ϕ и μ при $|x| \le 1$, $\phi \in [0,\, 2\pi]$ и малых положительных μ, так как исходное отображение по условию принадлежит классу C^8 и все замены гладкие.
Замечание 4. Область $\quad 1 \le x \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ соответсвует кольцу ширины $O(\mu)$ вокруг инвариантной окружности отображения G_μ, которая имеет радиус порядка $O(\sqrt{\mu})$.

Будем искать инвариантное огообразие М в виде графика функции $x = u(\phi)$, где

(i) $u(\phi) \in C^2[0,\, 2\pi]$,

(ii) $u(\phi)$ периодическая по ϕ с периодом 2π,

(iii) $|u^{(j)}(\phi)| \le 1$, для $j = 0, 1, 2$ и любого ϕ,

(iv) $u^{(2)}(\phi)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1, т.е. для любых ϕ_1, ϕ_2 $|u^{(2)}(\phi_1) \quad u^{(2)}(\phi_2)| \le |\phi_1 \quad \phi_2|$.

Обозначим множество функций, удовлетворяющих (i)-(iv) через U. Дальнейшее доказательство основано на принципе сжимающих отображений. Мы поступим следующим образом: начнем с многообразия $M = \{x = u(\phi)\}$, $u \in U$ и рассмотрим новое многообразие $F_\mu(M)$, полученное действием F_μ на M. Покажем, что при достаточно малых μ многообразие $F_\mu(M)$ опять имеет вид $x = \hat{u}(\phi)$ с некоторой $\hat{u} \in U$. Таким образом, мы строим нелинейное отображение f пространства U в себя такое, что $fu = \hat{u}$. Затем докажем, что при малых $\mu > 0$ отображение f является сжатием на U. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, оно имеет единственную неподвижную точку u^*. Многообразие $\{x = u^*(\phi)\}$ является искомой инвариантной кривой.

Разобьем доказательство на следующие шаги:
Шаг 1: выведем (эвристически) формулу для f;
Шаг 2: покажем, что формула, полученная на шаге 1, корректно определяет отображение функционального пространства U в себя;
Шаг 3: докажем, что f является сжимающим на U и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку;
Шаг 4: докажем устойчивость инвариантного многообразия $\{x = u^*(\phi)\}$.
Шаг 1. Для нахождения $fu(\phi)$ поступим следующим образом.
(**A**) Покажем, что существует единственное $\tilde{\phi}$, для которого ϕ-компонента $F_\mu(u(\tilde{\phi}), \tilde{\phi})$ равна ϕ, т.е. такое, что

$$\phi = \tilde{\phi} + \Theta_1(\mu) + \mu^{3/2}\Phi_1(u(\tilde{\phi}), \tilde{\phi}, \mu)\,(mod 2\pi). \tag{54}$$

(**B**) Положим $fu(\phi)$ равным X-компоненте $F_\mu(u(\tilde{\phi}), \tilde{\phi})$, т.е.

$$f(u(\phi)) = (1 \quad 2\mu)u(\tilde{\phi}) + \mu^{3/2}X_1(u(\tilde{\phi}), \tilde{\phi}, \mu). \tag{55}$$

Для оценок, которые требуется провести, введем следующее обозначение

$$c = \sup\Big\{|X_1(x,\phi,\mu)|, |\Phi_1(x,\phi,\mu)|, |\tfrac{\partial^i X_1}{\partial x^i}|, |\tfrac{\partial^i \Phi_1}{\partial x^i}|,$$
$$|\tfrac{\partial^i X_1}{\partial \phi^i}|, |\tfrac{\partial^i \Phi_1}{\partial \phi^i}|, |\tfrac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial \phi}|, |\tfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial \phi}|, i = 1,2 |\, \phi \in [0, 2\pi], \quad 1 \le x \le 1\Big\}.$$

Так определенное c зависит от μ, но остается ограниченным при $\mu \to 0$.
Докажем (A), т.е. что уравнение (54) имеет единственное решение. Обозначим правую часть (54) через $z(\tilde{\phi})$. Покажем, что когда $\tilde{\phi}$ изменяется от 0 до 2π, $z(\tilde{\phi})$ пробегает в точности один раз интервал длиной 2π. Из периодичности $u(\tilde{\phi})$ и $\Phi_1(x, \tilde{\phi}, \mu)$ по $\tilde{\phi}$

следует, что $z(2\pi) = z(0) + 2\pi$. Поэтому достаточно показать, что z - строго возрастающая функция. Пусть $\tilde{\phi}_1 < \tilde{\phi}_2$. Тогда

$$z(\tilde{\phi}_2) - z(\tilde{\phi}_1) = \tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 + \mu^{3/2}\Big[\Phi_1(u(\tilde{\phi}_2), \tilde{\phi}_2, \mu) - \Phi_1(u(\tilde{\phi}_1), \tilde{\phi}_1, \mu)\Big].$$

Далее, так как $|u'(\phi)| \leq 1$, то

$$|\Phi_1(u(\tilde{\phi}_2), \tilde{\phi}_2, \mu) - \Phi_1(u(\tilde{\phi}_1), \tilde{\phi}_1, \mu)| \leq c\Big[|u(\tilde{\phi}_2) - u(\tilde{\phi}_1)| + |\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1|\Big] \leq 2c(\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1).$$

Таким образом,

$$z(\tilde{\phi}_2) - z(\tilde{\phi}_1) \leq (1 - 2c\mu^{3/2})(\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1). \tag{56}$$

Следовательно, при условии

$$1 - 2c\mu^{3/2} > 0$$

z строго возрастает и (54) имеет единственное решение. Поэтому, $\tilde{\phi}(\phi)$ является функцией ϕ и, как следует из оценок, липшицевой, т.е.

$$|\tilde{\phi}(\phi_1) - \tilde{\phi}(\phi_2)| \leq (1 - 2c\mu^{3/2})^{-1}|\phi_2 - \phi_1|. \tag{57}$$

Отметим, что из (54) следует, что $z(\tilde{\phi})$ является дважды непрерывно дифференцируемой при $\tilde{\phi} \in [0, 2\pi]$. Поэтому, по теореме о неявной функции, можно утверждать, что $\tilde{\phi}(\phi) \in C^2[0, 2\pi]$. Итак, мы построили отображение f и оно имеет смысл.
Шаг 2. Проверим, что $fu \in U$. Условия (i) и (ii) очевидно следуют из (55). Докажем условие (iii)

$$|fu(\phi)| \leq (1 - 2\mu)|u(\tilde{\phi})| + \mu^{3/2}|X_1(u(\tilde{\phi}), \tilde{\phi}, \mu)| \leq 1 - 2\mu + c\mu^{3/2}.$$

Следовательно,

$$|fu(\phi)| \leq 1, \quad \text{если} \quad 2\mu - c\mu^{3/2} \geq 0.$$

Оценим первую производную fu. Дифференцируя (55) и делая оценки производных, получим

$$|\frac{dfu(\phi)}{d\phi}| \leq |\frac{d\tilde{\phi}}{d\phi}|[1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}c].$$

Учитывая (57), будем иметь

$$|\frac{dfu(\phi)}{d\phi}| \leq (1 - 2c\mu^{3/2})^{-1}[1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}c] \leq 1$$

при $\mu - 2\mu^{3/2}c > 0$. Оценим вторую производную fu. Для этого продифференцируем (54) два раза по ϕ и оценим $\frac{d^2\tilde{\phi}}{d\phi}$. Дифференцируя (54) первый раз по ϕ и делая оценки, аналогичные предыдущим, получим

$$\frac{1}{1 + 2c\mu^{3/2}} \leq \frac{d\tilde{\phi}}{d\phi} \leq \frac{1}{1 - 2c\mu^{3/2}}.$$

Учитывая полученную оценку и дифференцируя (54) второй раз по ϕ, можно показать, что

$$|\frac{d^2\tilde{\phi}}{d\phi^2}| \leq (1 - 2c\mu^{3/2})^{-3}5c\mu^{3/2}.$$

С помощью полученных оценок, дифференцируя (55) два раза по ϕ, получим

$$|\tfrac{d^2fu(\phi)}{d\phi^2}| \leq (1 - 2c\mu^{3/2})^{-3}[1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}c]5c\mu^{3/2} + (1 - 2c\mu^{3/2})^{-2}[1 - 2\mu + 4c\mu^{3/2}] \leq 1$$

при достаточно малом $\mu > 0$. Условие (iii) доказано.

Аналогично, учитывая предыдущие оценки, получим, что модуль разности $|f^{(2)}u(\phi_2) \quad f^{(2)}u(\phi_1)|$ оценивается сверху величиной

$$((1 \quad 2\mu)(1 \quad 2c\mu^{3/2}) \quad ^2 + C_0(\mu)\mu^{3/2})|\phi_1 \quad \phi_2|,$$

где $C_0(\mu)$ ограничено при малых $\mu > 0$, т.е. вторая производная fu удовлетворяет условию Липшица с константой 1 при достаточно малых $\mu > 0$.

Шаг 3. В принципе мы доказываем, что f- сжимающий оператор и применяем принцип сжимающих отображений. В действительности дело обстоит немного сложнее.

(a) Мы покажем, что f - сжимающий в супремум- норме[9]. Однако, множество U не является полным в супремум-норме, поэтому принцип сжимающих отображений можно применить лишь к пополнению U относительно этой нормы. Следовательно, мы можем гарантировать существование неподвижной точки в пополнении U, а не в самом множестве U.

(b) Мы покажем, что пополнение U относительно супремум-нормы содержится в множестве функций U, которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми. Таким образом, мы покажем, что неподвижная точка $u^*(\phi)$ (а, следовательно, и искомая инвариантная кривая) принадлежит классу C^2 и тем самым теорема будет доказана.

(a) Доказательство того, что f - сжимающий оператор в супремум- норме, приведено в [7, с. 170-171].

(b) Утверждение [b] очевидно следует из следующего утверждения [7, с. 39-40].
Лемма. Пусть u_n - последовательность функций на банаховом пространстве Y с значениями в банаховом пространстве X. Предположим, что для всех n и $y \in Y$

$$||D^j u_n(y)|| \leq 1, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, k,$$

и каждая $D^k u_n$ удовлетворяет условию Липшица с константой единица. Предположим также, что для каждого y последовательность $u_n(y)$ сходится слабо (т.е. в слабой топологии на X) к элементу $u(y)$. Тогда

(a) $u(y)$ k раз дифференцируема и k-я производная удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

(b) $D^j u_n(y)$ слабо сходится к $D^j u(y)$ для всех y и $j = 0, 1, 2, \cdots, k$.

Шаг 4. Доказательство устойчивости найденной инвариантной кривой дано в [6]. Таким образом, теорема Хопфа доказана.

Следствие 3. Применяя теорему Хопфа к нашему отображению F_μ получим, что при потере устойчивости (т.е. когда параметр μ, возрастая, проходит через 0) в системе рождается или гибнет дважды непрерывно дифференцируемое одномерное инвариантное многообразие.

Замечание 5. Из утверждения 1 следует, что если функция $H(x, y)$ в исходном уравнении (1) обладает S - свойством (см. определение 2), то найденное одномерное инвариантное многообразие будет устойчивым (неустойчивым), если первая ляпуновская величина отображения F_μ $l_1 > 0$ ($l_1 < 0$).

III Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что найденному одномерному инвариантному многообразию M соответствует периодическая траектория исходного уравнения с запаздыванием (3). Найденное одномерное инвариантное многообразие M класса C^2 есть семейство функций $x(t, \phi)$, зависящих от одного параметра $\phi \in [0, 1]$ и непрерывных на декартовом произведении $[0, 1] \times [0, 1]$,

[9] Под супремум-нормой мы понимаем норму в пространстве $C^0[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $||g|| = \sup\limits_{t \in [a,b]} g(t)$.

$x(\cdot, y) \in C^1[0,1]$, $\phi \in [0,1]$. Сделаем замену параметра $\phi \in [0,1]$ на параметр $y \in S^1$, где S^1 - окружность единичной длины, по следующему правилу: каждому значению параметра $\phi \in [0,1]$ поставим в соответствие $y = e^{2\pi i \phi} \in S^1$. Тогда многообразие M класса C^2 есть семейство функций $x(t,\, y)$, непрерывных на декартовом произведении $[0,1] \times S^1$, $x(\cdot, y) \in C^1[0,1]$, $y \in S^1$. Причем

$$\Psi_\mu x(t,\, y) = x(t,\, b(y)), \quad t \in [0,1], \tag{58}$$

где $b(y) : S^1 \to S^1$.
Дальнейшее доказательство проводится с использованием понятия числа вращения, поэтому ниже дана краткая сводка результатов из теории гомеоморфизмов окружности, приведенных в [10, с. 39-52].

Некоторые сведения из теории гомеоморфизмов окружности

Пусть $f : S^1 \to S^1$ - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм единичной окружности S^1.

Определение 3. Поднятием гомеоморфизма $f : S^1 \to S^1$ называется отображение $F : R^1 \to R^1$, такое, что для любого $t \in [0,1]$ выполнено равенство $e^{2\pi i f(t) = F(e^{2\pi i t})}$.

Утверждение 2. *Поднятие $F : R^1 \to R^1$ сохраняющего ориентацию гомеоморфизма окружности $f : S^1 \to S^1$ обладает следующими свойствами*

(1) F - монотонно возрастающая функция;

(2) $F - id$ - периодическая функция с периодом 1 (id - тождественное отображение);

(3) для каждого $t \in R^1$ существует предел[10]

$$\lim_{|n| \to \infty} \frac{F^n(t)}{n},$$

не зависящий от t.

Определение 4. Числом вращения поднятия F называется

$$\omega(F) = \lim_{|n| \to \infty} \frac{F^n(t)}{n}.$$

Утверждение 3. *Пусть $\omega(F) + \mathbf{Z}$ обозначает класс вычетов числа $\omega(F)$ по модулю группы целых чисел. Тогда*

(1) класс $\omega(F) + \mathbf{Z}$ не зависит от поднятия, т.е. если F и $\tilde{F}$ - два различных поднятия гомеоморфизма $f : S^1 \to S^1$, то

$$\omega(F) \equiv \omega(\tilde{F}) \quad (mod \mathbf{Z});$$

(2) класс $\omega(F) + \mathbf{Z}$ инвариантен относительно сохраняющей ориентацию топологической сопряженности: если $g = h \circ f \circ h^{-1}$, где h - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, то для любых поднятий F и G гомеоморфизмов f и g

$$\omega(F) + \mathbf{Z} = \omega(G) + \mathbf{Z}.$$

[10] $F^n = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ раз}}$.

Замечание. Из утверждения 3 следует, что можно ввести обозначение

$$\omega(f) = \omega(F) + \mathbf{Z}.$$

Тогда число $\omega(f)$, определенное с точностью до целочисленного сдвига, назовем числом вращения гомеоморфизма f.

Утверждение 4. *Число вращения $\omega(f)$ иррационально тогда и только тогда, когда гомеоморфизм f не имеет преиодических точек.*

Обозначим для точки $x \in S^1$ через $\varrho(x)$ множество предельных точек последовательности $\{f^n x\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$, а через $\Omega(f)$ - множество всех неблуждающих точек гомеоморфизма f ([10, с. 30]).

Утверждение 5. *Предположим, что число вращения $\omega(f)$ - иррационально. Тогда*

(а) множество $\varrho(x)$ не зависит от точки x;

(б) замкнутое инвариантное множество $E = \varrho(x)$ (согласно (а), $x \in S^1$ здесь любое) либо совершенно и нигде не плотно, либо совпадает со всей окружностью.

Определение 5.Гомеоморфизм f называется транзитивным, если $E = S^1$ и нетранзитивным в противном случае.

Утверждение 6.

(а) Если $\omega(f) = M/N$, причем M/N - несократимая дробь, то $\Omega(f)$ совпадает с множеством периодических точек и наименьший период каждой периодической точки равен N.

(б) Если $\omega(f)$ - иррационально, то $\Omega(f) = E$.

Обозначим через θ_ω поворот окружности на угол ω, который получается из сдвига прямой R^1 на ω при проектировании R^1 на S^1. Очевидно, что поворот θ_ω однозначно определяется классом $\omega + \mathbf{Z}$ и его число вращения равно $\omega + \mathbf{Z}$. Частичное обращение этого факта дается следующим предложением.

Утверждение 7. *Если гомеоморфизм f транзитивен, то он топологически сопряжен с θ_ω.*

Теорема (Данжуа). Пусть f - диффеоморфизм окружности, причем производная f' непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а число вращения $\omega(f)$ - иррационально. Тогда f транзитивен.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Лемма 10. *1) Отображение $b(y) : S^1 \to S^1$, определенное в (58), есть гомеоморфизм окружности, причем $b(y) \in C^2(S^1)$.*
2) Найденное одномерное инвариантное многообразие M не имеет точек самопересечения, т.е. для любых y', $y'' \in S^1$ таких, что $y' \neq y''$ верно

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t, y') \quad x(t, y'')| > 0. \tag{59}$$

Доказательство леммы 10. 1) Из доказательства теоремы Хопфа следует, что одномерному инвариантному многобразию M соответствует неподвижная точка $u^*(\phi)$ множества функций U, определяемого условиями (i)-(vi) (см. схему доказательства теоремы Хопфа) при отображении f, удовлетворяющем (**A**) и (**B**) (см. Шаг 1 в доказательстве теоремы Хопфа). Согласно определению отображения f на множестве U, мы параметризовали $u^*(\phi)$, т.е. многообразие M полярным углом $\phi \in [0, 2\pi]$ (см. (54), (55)). Для функции $\phi(\tilde{\phi})$ (54) доказано, что она является строго возрастающей и дважды непрерывно дифференцируемой. Заметим, что функция $\phi(\tilde{\phi})$ при $u(\phi) = u^*(\phi)$

соответствует с точностью до масштаба отображению $b(y)$. Тогда, учитывая свойства функции $\phi(\tilde{\phi})$, получаем, что $b(y)$ есть гомеоморфизм единичной окружности и $b(y) \in C^2[S^1]$. Первое утверждение леммы доказано.
2) Для доказательства второго утверждения заметим, что между функциями одномерного инвариантного многообразия М и точками многообразия $\{u^*(\phi)\}$ в полярных координатах существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому многообразие M не имеет точек самопресечения, если только не имеет самопересечений кривая $u^*(\phi)$ на плоскости (x, ϕ), где x определен в (53). Так как многообразие $\{u^*(\phi)\}$ параметризовано полярным углом, то оно не может иметь точек самопересечения ни в какой точке, кроме нуля. Действительно, самопересечения вне точки 0 могут быть только в том случае, если функция $\phi(\tilde{\phi})$, определенная в (54), изменяется от 0 до 2π, когда ее аргумент $\tilde{\phi}$ изменяется на меньшую величину. Но это невозможно, так как в силу (56) функция $\phi(\tilde{\phi})$ является липшицевой с контантой, близкой к единице. Через точку 0 $u^*(\phi)$ проходить не может, так как из замечания 4 (см. доказательство теоремы Хопфа) следует, что $u^*(\phi)$ лежит на плоскости (x, ϕ) в μ-окрестности окружности, имеющей радиус порядка $\sqrt{\mu}$ при малых μ.
Лемма 10 доказана.
Лемма 11. Одномерному инвариантному многообразию M соответствует периодическая траектория исходного уравнения с запаздыванием (3).
Доказательство леммы 11. Лемма 11 будет доказана, если показать, что существуют функция $X(t) : R^1 \to R^1$ и число Т такие, что для любого $t \in R^1$

$$X(t+T) = X(t), \tag{60}$$

$$\Psi_\mu X(t) = X(t+1). \tag{61}$$

Рассмотрим число вращения $\omega(b)$ отображения $b(y) : S^1 \to S^1$, которое, согласно пункту (3) утверждения 2, не зависит от y. Далее возможны два случая.
1. Число вращения $\omega(b)$-рационально, т.е. $\omega(b) = m/n$, где m/n - несократимая дробь. Тогда из утверждений 4 и 6 следует, что отображение $b(y)$ имеет периодическую точку с наименьшим периодом, равным n. Мы получили периодическую траекторию дискретного отображения Ψ_μ с периодом равным n, которой соответствует периодическая траектория исходного дифференциального уравнения (3) с периодом $T = n$, что и требовалось доказать.
2. Число вращения $\omega(b)$-иррационально. Так как отображение окружности $b(y) \in C^2$ (лемма 10), то по теореме Данжуа оно транзитивно. Поэтому, применяя к отображению b утверждение 7, получим, что $b(y)$ топологически сопряжено с действием поворота на угол $\omega(b)$, т.е. существует замена переменных, приводящая отображение $b(y)$ к виду

$$b(y) = y + \omega(b);$$

Возьмем $T = \frac{1}{\omega(b)}$ и определим функцию X(t) следующим образом

$$\begin{aligned} &X(t) = x(t,\, 0) \text{ при } t \in [0,\, 1], \\ &X(t) = x(t \quad [t],\, b^{[t]}(0)) \text{ при } t \geq 1, \end{aligned} \tag{62}$$

где [t] - целая часть t. Докажем, что так определенная функция $X(t)$ удовлетворяет (60) и (61). Равенство (61) выполняется очевидно. Заметим, что (60) достаточно доказать для $t \in [0,\, 1]$. Действительно, пусть (60) выполняется для $t \in [0,\, 1]$. Тогда для любого $t > 1$ $t = [t] + \{t\}$ (где $[t]$ - целая часть t, $\{t\}$ - дробная часть t) и согласно (60) для $t \in [0,\, 1]$ и (61) имеем

$$X(t+T) = X(\{t\} + T + [t]) = \Psi_\mu^{[t]} X(\{t\} + T) = \Psi_\mu^{[t]} X(\{t\}) = X(t),$$

т.е. (60) выполняется для любого $t \in R^1$. Следовательно, учитывая, что $x(t,0) = x(t,1)$ (точки 0 и 1 на единичной окружности отождествлены), для завершения доказательства осталось показать, что

$$X(t+T) = x(t,1) \qquad \text{при } t \in [0,1]. \tag{63}$$

Напомним, что отображение Ψ_μ удовлетворяет условию согласованности (18) (см. замечание 1), т.е. для любой функции $x(\cdot) \in C^1[0,1]$ верно

$$(\Psi_\mu x(\cdot))(0) = x(1).$$

Из условия согласованности следует, что

$$x(t,\, y) = x(t - 1,\, b(y)) = x(t - 1,\, y + \frac{1}{T}). \tag{64}$$

Равенство (64) выполняется для всех t, поэтому с его помощью можно доопределить функцию $x(t,\, y)$ для любого $t \in R^1$. Из (62), учитывая первое равенство в (64), имеем

$$X(t+T) = x\Big(t + \{T\} - [t + \{T\}],\, b^{[T]+[t+\{T\}]}(0)\Big), \quad t \in [0,1]. \tag{65}$$

Далее рассмотрим два случая: $[t + \{T\}]$ равно 0 или 1. Учитывая (64), из последнего равенства получим, что в обоих случаях

$$X(t+T) = x\Big(t + \{T\},\, 1 - \frac{\{T\}}{T}\Big), \quad t \in [0,1]. \tag{66}$$

Так как многообразие M принадлежит классу C^2, то по теореме Данжуа оно является транзитивным, поэтому для любого $t' \in R^1$ верно

$$x(t + t',\, y) = x(t,\, y + \phi(t', y)), \quad t \in [0,1], \tag{67}$$

где $y \in S^1$ и равенство (67) понимается как равенство функций, зависящих от t, а $\phi(t', y)$ - некоторая функция. Для завершения доказательства леммы 11 нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 8. *Функция $\phi(t', y)$ непрерывна по каждой переменной.*

Доказательство утверждения 8. Докажем, что $\phi(t', y)$ непрерывна по t'. Фиксируем любые $y \in S^1$, $t \in [0,1]$ и $t' \in R$. Рассмотрим последовательность $t'_n \to t'$. Тогда, учитывая непрерывность функции $x(t,y)$ по t и равенство (67), имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{t'_n \to t'} x(t, y + \phi(t'_n, y)) = \lim_{t'_n \to t'} x(t + t'_n, y) = \\ &x(t + t', y) = x(t, y + \phi(t', y)). \end{aligned} \tag{68}$$

Пусть $\phi(t'_n, y)$ не стремится к $\phi(t', y)$ при $t'_n \to t'$. Так как последовательность $\phi(t'_n, y) \in S^1$, т.е. ограничена, то существует подпоследовательность $t'_{n_k} \to t'$ при $n_k \to \infty$ такая, что

$$\lim_{t'_{n_k} \to t'} \phi(t'_{n_k}, y) = y_0 \neq \phi(t', y).$$

Тогда из (68) для любого $t \in [0,1]$ имеем

$$x(t, y + \phi(t', y)) = x(t, y + y_0), \text{где } y_0 \neq \phi(t', y),$$

что противоречит второму утверждению леммы 10 (см. (59)). Таким образом, в силу произвольности t' функция $\phi(t', y)$ непрерывна по t'. Доказательство непрерывности

$\phi(t', y)$ по y проводится аналогично. Действительно, фиксируем любые $y \in S^1$, $t \in [0, 1]$ и $t' \in R$ и рассмотрим последовательность $y_n \to 0$. Тогда, учитывая непрерывность функции $x(t, y)$ по y и равенство (67), имеем

$$\begin{aligned}&\lim_{y_n \to 0} x(t, y + y_n + \phi(t', y + y_n)) = \lim_{y_n \to 0} x(t + t', y + y_n) = \\ &x(t + t', y) = x(t, y + \phi(t', y)).\end{aligned} \tag{69}$$

Пусть $\phi(t', y + y_n)$ не стремится к $\phi(t', y)$ при $y_n \to 0$. Так как последовательность $\phi(t', y + y_n) \in S^1$, т.е. ограничена, то существует подпоследовательность $y_{n_k} \to 0$ при $n_k \to \infty$ такая, что

$$\lim_{y_{n_k} \to 0} \phi(t', y + y_{n_k}) = y_0 \neq \phi(t', y).$$

Тогда из (69) для любого $t \in [0, 1]$ имеем

$$x(t, y + \phi(t', y)) = x(t, y + y_0), \text{где } y_0 \neq \phi(t', y),$$

что противоречит второму утверждению леммы 10 (см. (59)). Таким образом, в силу произвольности y функция $\phi(t', y)$ непрерывна по y. Итак, $\phi(t', y)$ является непрерывной по t' и y. Утверждение 8 доказано.

Равенство (63) будет доказано, если мы докажем, что

$$\phi(t', y) = \frac{t'}{T}. \tag{70}$$

Для целых t' равенство (70) очевидно следует из (64), (65), (67). Учитывая непрерывность функции $\phi(t', y)$, достаточно доказать (70) для рациональных t', более того, только для $t' = 1/m$ для любого достаточно большого натурального m.

Покажем, что $\phi(\frac{1}{m}, y)$ не зависит от y. Действительно, учитывая (65) и (67), получаем следующую цепочку равенств

$$x(t, y + \phi(\frac{1}{m}, y)) = x(t + \frac{1}{m}, y) = x(t \quad 1 + \frac{1}{m}, y + \frac{1}{T}) = x(t, y + \phi(\frac{1}{m}, y + \frac{1}{T})).$$

Таким образом,

$$\phi(\frac{1}{m}, y) = \phi(\frac{1}{m}, y + \frac{1}{T}). \tag{71}$$

Так как T-иррационально, то точки $\{\frac{k}{T} \,|\, k \in N\}$ всюду плотны на окружности. Поэтому, из (71) и из непрерывности $\phi(t', y)$ по переменной $y \in S^1$ следует, что $\phi(t', y)$ не зависит от y.

Обозначим левую часть (70) через $\hat{\phi}(t')$. Из (64) следует, что

$$x(t + 1, y) = x(t, y + \frac{1}{T}) = x(t, y + m\hat{\phi}(\frac{1}{m})).$$

Поэтому

$$\hat{\phi}(\frac{1}{m}) = \frac{1}{mT} + \frac{k(\frac{1}{m})}{m},$$

где $k(\frac{1}{m})$ - функция, принимающая целые значения. Тогда имеем

$$\hat{\phi}(\frac{l}{m}) = \frac{l}{mT} + \frac{lk(\frac{1}{m})}{m} \tag{72}$$

для любого целого l. Заметим, что по доказанному $k(1) = 0$. Записывая равенство (72) для $l = m \quad 1$, переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая непрерывность функции ϕ, получим, что $k(1/m) = 0$ для любого достаточно большого натурального m. Лемма 11 доказана. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 6. Если функция $H(x, y)$ обладает S - свойством (см. определение 2), то, согласно замечанию 5 найденная периодическая траектория дифференциального уравнения с запаздыванием (1) будет устойчивой при $l_1 > 0$ и неустойчивой при $l_1 < 0$, где l_1 - первая ляпуновская величина отображения F_μ (см. замечание 3).

Замечание 7. Аналогичный теореме 1 результат (для более широкого класса функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа) содержится в книге Дж. Хейла [11]. Однако, доказательство, данное Дж. Хейлом, принципиально отличается от приведенного выше и основано на применении теоремы о неявной функции, что не позволяет проанализировать вопрос об устойчивости возникающей периодической траектории. Приведенный в данной работе способ доказательства дает возможность исследовать устойчивость найденной периодической траектории дифференциального уравнения с запаздыванием (1) (см. замечание 6).

3 Тип бифуркации в случае $u = 0$

Предложение 1. *Пусть $u = 0$. Тогда при потере устойчивости нулевого стационарного решения уравнения (1), т.е. когда параметр v, возрастая, переходит через границу устойчивости v_{gr} (определенную в (6)), в системе (1) происходит сильный резонанс*[11].

Схема доказательства предложения 1. Из (14) при $u = 0$ получаем, что линеаризация отображения Ψ_μ в точке 0 есть линейный оператор $A : C^1[0, 1] \to C^1[0, 1]$ вида

$$Ax(t) = x(1) \quad \int_0^t vx(\xi)\, d\xi, \quad t \in [0, 1], \tag{73}$$

где $v > 0$ определяется в (4). Как и при доказательстве теоремы 1, при помощи теоремы о центральном многообразии исходная бесконечномерная задача об исследовании типа бифуркации неподвижной точки 0 бесконечномерного отображения Ψ_μ сводится к анализу типа бифуркации для конечномерной динамической системы. Однако, в данном случае собственные значения линеаризованного оператора (73), соответствующего нелинейному отображению, выходят из единичной окружности комплексной плоскости через точки $\pm i$. Действительно, $\lambda = re^{i\phi}$ ($\phi \in [0, 2\pi]$) является собственным значением оператора A (73) тогда и только тогда, когда выполнено (23) при $u = 0$ (см. доказательство леммы 3), т.е.

$$\begin{cases} \ln r = \quad \frac{v}{r}\cos(\phi), \\ \phi = \frac{v}{r}\sin(\phi) + 2\pi k, \quad k \quad \text{целое.} \end{cases}$$

Следовательно, при $r = 1$ $\cos\phi = 0$, т.е. $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Следовательно, собственные значения покидают единичную окружность через точки $\pm i$. Такой тип потери устойчивости называется сильным резонансом. Предложение 1 доказано.

THE ANDRONOV-HOPF'S BIFURCATION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

© Obrosova N.K.
Computational Center of RAS, Moscow

[11] По поводу понятия сильного резонанса и возможного поведения траекторий системы в этом случае см. [8].

The Hopf's bifurcation theorem in the class of differential equations with delay is proved. The proof contents of three main steps. Infinity-dimensional problem is reduced to the two dimensional problem by the theorem of the central manifold. Then to the two-dimensional manifold obtained the Hopf's theorem is applicated. From the Hopf's theorem emerging or dying of the one-dimensional invariant manifold in origin problem when the bifurcation parameter cross the critical value is obtained. Finally, it is proved that the periodic orbit of the origin equation is corredponds to obtained one-dimensional invariant manifold by using of the circle homeomorphisms theory.

Список литературы

[1] Обросова Н.К. Потеря устойчивости равновесной цены в модели ценообразования вальрасовского типа.
Математическое моделирование. - 1998, Т.10 N 5 с. 47-57.

[2] Обросова Н.К. Устойчивость рыночных механизмов в моделях ценообразования вальрасовского типа с запаздываниями.
Сообщения по прикладной математике. М: Издательство Вычислительного центра РАН. - 1999 г., 61с.

[3] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М: Наука, 1971, 296с.

[4] Колмогоров А.Н, Фомин, Элементы теории функций и функционального анализ. // М. Наука, 1976. 544 с.

[5] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу// М.: Мир, 1977, 232с.

[6] Lanford O.- E., Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: the work of Ruelle and Takens // Lecture Notes in Mathematics. - 1972 - V. 322, - P. 159-192.// Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[7] Мардсен Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения // М. Мир, 1980. 368 с.

[8] Whithley D., Discrete dynamical systems in dimensions one and two. // The Bulletin of the London Mathematical Society. 1983, V. 15 p. 3. N. 54, p. 177-217.

[9] Владимиров В.С., Обобщенные функции в математической физике. // М. Наука, 1976, 280 с.

[10] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир,1975, 304с.

[11] Хейл Дж.Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984, 421с.