Результаты расчетов для двух вариантов прогноза развития экономики и пример использования признака полезности приводятся на рис. 1. Области неэффективности являются надграфиками соответствующих (1 — «оптимистический» прогноз, 2 — «пессимистический») границ. Прямоугольниками на рис. 1 обозначеы области Δ_p двух энерготехнологий. В силу «дискретного» (по переменным $n(t)$) характера множества $\mathcal{N}$, задаваемого соотношениями (2.1) — (2.7) условие эффективности (1.5) носит лишь необходимый характер. Согласно признаку (1.7), технология T1 — неполезна, технология T2 — неопределенный исход.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Оценивание эффективности новых технологий по межотраслевым моделям. — В настоящем сборнике, с. 4—18.
2. *Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Оценивание эффективности новых технологий по совокупности агрегированной и детализированных моделей. — В настоящем сборнике, с. 19—31.
3. *Савельев Б. В.* Использование прогнозоа появления новых технологий при построении оптимального экономического плана. — Автоматика и телемеханика, 1975, № 11, с. 151—158.
4. *Вавилин С. А., Чуканов С. В.* Применение теории возмущений для оценки эффективности новых технологий. В сб.: Численные методы в задачах оптимального планирования. М.: ВНИИСИ, 1983, вып. 1, с. 22—27.
5. *Бурьян С. Б.* Опыт использования пакетов прикладных программ для решения динамических задач межотраслевого баланса. — В настоящем сборнике, с. 120—125.

И. Г. Поспелов

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА С ПОСРЕДНИКОМ

В [1] поставлена задача построить агрегированную модель экономических механизмов на основе микроописания взаимодействия отдельных экономических агентов. Эта задача частично решена в [1]. Построено микроописание процесса производства материальных благ и из него путем агрегирования построено макроописание этого процесса в форме производственной функции[1]. Разработанный подход позволил построить относительно простые и хорошо структуризованные модели рыночной экономики отражающие основные качественные особенности развития хозяйства этого типа [3—8]. Однако в указанных работах описание механизмов рыночного распределения производственных продуктов и ресурсов остается чисто феноменологическим. Осталась нерешенной задача микроописания рынка товаров, т. е. описания процесса установления приблизительно единых цен, соответствующих стоимости товаров в результате многочисленных обменов между экономическими агентами. Здесь предлагается новый подход к этой проблеме и первые, полученные на его основе, результаты.

Традиционно проблему микроописания рынка рассматривают как проблему рыночного равновесия. Этому вопросу посвящено огромное количество работ (основные результаты изложены в [9, 10]). Существование равновесия доказано при весьма общих предположениях об интересах экономических агентов и свойствах производственной системы. Тем не менее в моделях равновесия можно обнаружить и совершенно неочевидные apriori предположения. Так, в популярной модели Эрроу—Дебре [9] для одних экономических агентов—потребителей — допускаются совершенно произвольные интересы, для других — производителей — интересы стандартизированы (производители максимизируют прибыль). Обратимся теперь к факту существования цен. Функции

[1]Процедура агрегирования детально исследована и обобщена в [5].

полезности задают нелинейную связь между потребительской стои
мостью товара и его количеством. Почему же меновая стоимость ока
зывается пропорциональной количеству? А именно это и означает, что
существуют цены товаров.

В идеале микроописание рынка должно объяснять, а не постулиро
вать такие эмпирические закономерности, как максимизация прибыл
производителями и существование цен. Достичь этого можно толь
построив динамическую модель поведения участников рыночного обм
на. Равновесие в такой модели должно быть частным решением ил
предельным случаем. Однако описание процесса приближения к ра
новесию наталкивается на ряд принципиальных трудностей. Наприме
оказывается, что равновесия в общем случае нельзя достичь парным
сделками, а также, если производить обмены до установления равн
весных цен и т. д. Представляется, что указанные трудности возникаю
из-за того, что интересы участников считаются неизменными и ника
не согласованы друг с другом. В реальности это, безусловно, не та
Интересы, во всяком случае профессиональных торговцев, воспитыва
ются законами рынка. Проиллюстрируем сказанное простым примеро

Невозможность достичь равновесия парными сделками в модел
«чистого обмена» [10] обнаруживается в следующей ситуации. Пус
есть три участника, и каждый имеет запас одного из трех продукто
Допустим, что первому участнику нужен первый (свой) и второй пр
дукт, второму — второй и третий, третьему — третий и первый. Межд
ними может существовать равновесный обмен, в результате которо
все трое улучшат свое положение. В то же время всякий парный обме
ухудшает положение одного из контрагентов, и в этом смысле парны
сделки невозможны.

Рассмотренная ситуация достаточно жизненна, и можно постави
вопрос: как же выходят из нее в реальности, если встреча всех тр
участников затруднительна? Можно ожидать, что один из участнико
сознает положение и станет посредником, т. е. будет обменивать пр
дукты не для потребления, а для последующего обмена. Если это со
бытие описать как изменение функции полезности участника-посредни
ка, то новая функция полезности уже не может быть произвольной. Он
должна в какой-то мере отражать остальных участников.

Из сказанного можно сделать вывод: в процессе рыночного обмен
существенную роль играют торговцы-перекупщики, интересы которы
не произвольны, а определяются объективными законами рынка. «Ко
куренция навязывает каждому индивидуальному капиталисту имм
нентные законы капиталистического способа производства как внешни
принудительные законы. Она заставляет его постоянно расширять сво
капитал для того, чтобы его сохранить . . . »[1]

Что же представляют собой объективно существующие интерес
торговцев? В реальности значительная часть участников рынка посто
янно разоряется и тем самым выходит из системы. Введем (пока н
интуитивном уровне) понятие вероятности разорения. Естественно пре
положить, что в условиях жесткой конкуренции участник, который н
хочет или не умеет минимизировать вероятность разорения, будет ис
ключен из системы раньше, чем тот, чьи действия объективно напра
лены на уменьшение этой вероятности. Таким образом, на рынке оста
ются лишь те участники ,которые стремятся (сознательно или нет) ми
нимизировать вероятность разорения.

Описание и общие свойства модели

Ниже предлагается одна из простейших возможных моделей
среднической торговли. Мы оставляем в стороне интересы торговца,
связанные с рынком, а также не рассматриваем процесс выработки

---

[1] *К. Маркс и Ф. Энгельс.* Соч. 2, т. 23, с. 606.

ведения в ходе конкурентной борьбы. Пока наша задача состоит в том, чтобы выяснить, может ли боязнь разорения побудить торговца эффективно выполнять функции посредника, а также понять, какое значение для него имеют в этой ситуации обычные экономические попытки прибыли, цены и т. д.

Пусть на рынке однородный продукт обменивается на деньги. Продукт имеется у m производителей. Они продают его единственному торговцу, а тот продает продукт n потребителям, у которых имеются деньги (рис. 1). Поведение потребителей и производителей опишем

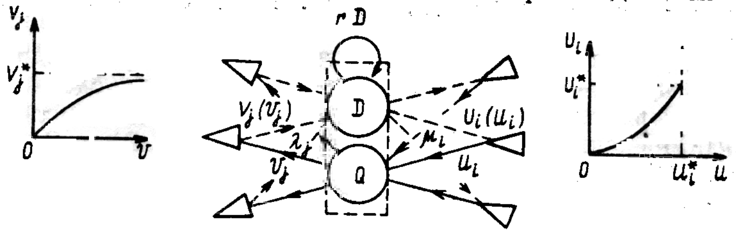

Рис. 1.

простейшим образом: в каждый момент времени i-й производитель имеет фиксированный запас продукта и готов продать любую его часть u_i, $0\leqslant u_i^*$, если ему заплатят не меньше $U_i(u_i)\geqslant 0$ денег, где U_i — заданная функция предложения. Аналогично, j-й потребитель всегда готов купить любое количество $v_j\geqslant 0$ продукта, если придется платить не больше $V_j(v_j)$ денег, где V_j — функция спроса.

U_i, V_j предполагаются гладкими и монотонными, причем U_i строго выпуклы, а V_j — строго вогнуты $V_i(0)=U_i(0)=0$, $V_j(\infty)=V_j^*<\infty$, $U_i(u_i^*)=U_i^*<\infty$ (рис. 1).

Относительно торговца сделаем три предположения:

1°. Сделки с потребителями и производителями происходят в случайные моменты времени. Тем самым в модель вводится неопределенность, всегда в той или иной форме присущая торговле. Моменты сделок торговца с каждым из контрагентов для простоты считаем пуассоновскими потоками, независимыми между собой, [11], μ_i — средняя частота сделок с i-м производителем, λ_j — с j-м потребителем. В этих условиях торговец не может сразу продать закупленный продукт. Этот продукт накапливается в виде запаса Q. Условие $Q\geqslant 0$ накладывает ограничение на объем продаж торговца.

2°. Объем сделок u_i, v_j в те моменты τ, когда они могут произойти и в рамках ограничений $0\leqslant u_i\leqslant u_i^*$, $0\leqslant v_j\leqslant Q(\tau)$ определяет торговец.

3°. Продукт торговец закупает в кредит и поэтому в каждый момент времени он имеет задолженность D, на которую начисляется фиксированный процент r[1]. При покупках D скачком возрастает, а при продажах — уменьшается.

Поскольку поведение потребителей и производителей стационарно, состояние системы определяется целиком величинами Q и D. Поэтому поведение (стратегия) торговца заключается в выборе функций $u_i(Q, D)$, $0\leqslant u_i\leqslant u_i^*$ и $v_j(Q, D)$, $0\leqslant v_j\leqslant Q$, которые задают объем покупок и продаж торговца, если в момент сделки он имеет запас Q и задолженность D. Если стратегия $\{u_i, v_j\}$ задана, то $(Q(t), D(t))$ есть случайный процесс, реализации которого подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} u_i(Q, D)\frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} v_j(Q, D)\frac{d\eta_j}{dt},\\ \frac{dD}{dt} &= rD + \sum_{i=1}^{m} U_i(u_i(Q, D))\frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n} V_j(v_j(Q, D))\frac{d\eta_j}{dt}.\end{aligned} \tag{1}$$

[1]Уравнение роста задолженности обсуждалось в [3]. В отличие от Q, D может быть отрицательным. Тогда она интерпретируется как вклад в банке, на который начисляется тот же процент. Источник кредитов в модели не рассматривается.

Здесь $\xi_i(t)$ ($\eta_j(t)$) — число событий пуассоновского процесса с частот μ_i (λ_j) на отрезке $[0, t]$ — случайные кусочно-постоянные функции, $\frac{d\xi_i}{dt}$ $\left(\frac{d\eta_j}{dt}\right)$ — их обобщенные производные (суммы единичных импульсо действующих в случайные моменты времени).

Динамику процесса можно описать и несколько по-другому. По скольку моменты сделок с разными контрагентами независимы межд собой, совокупность моментов всех сделок тоже образует пуассоно ский поток с частотой $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$. Если какая-то сделка произ шла, то вероятность, что это сделка именно с i-м производителем (j- потребителем) есть $\beta_i = \mu_i/\Lambda$ ($\alpha_j = \lambda_j/\Lambda$) [11]. Между сделками Q по стоянно, а D растет по экспоненте. В момент сделки τ траектор $(Q(\cdot), D(\cdot))$ скачком переходит из состояния $(Q, D) = (Q(\tau), D(\tau))$ состояние (Q', D'). В силу сказанного выше вероятность Ω того, чт $(Q', D') \in A \subset R^2$ выражается в виде[1]:

$$\Omega(A \mid Q, D) = \sum_{i=1}^{m} \delta(A \mid Q + u_i(Q, D), D + U_i(u_i(Q, D))) +$$

$$\sum^{n} \delta(A \mid Q - v_j(Q, D), D - V_j(v_j(Q, D))).$$

Такой процесс относится к типу скачкообразных марковских процесс [11]. Соответствие (2) между распределением скачков траектории Ω стратегией $\{u_i, v_j\}$ будем обозначать $\Omega \div \{u_i, v_j\}$, а Ω будем в дальне шем также называть стратегией.

Утверждение 1. Если u_i, v_j — борелевские функции Q, D, то (определяет сепарабельный, стохастический непрерывный, однородн марковский процесс [11]. Переходная вероятность этого процесса

$$P^t_\Omega(A \mid Q, D) = \text{Вер}\{(Q(t_0 + t), D(t_0 + t)) \in A \mid Q(t_0) = Q, D(t_0) = D\}$$

борелевская функция по Q, D, абсолютно непрерывная по t, не за сит от t_0 и однозначно определяется уравнением

$$P^t_\Omega(A \mid Q, D) = e^{-\Lambda t}\delta(A \mid Q, De^{rt}) +$$

$$+ \Lambda \int_0^t ds e^{-\Lambda s} \int_{R^2} \Omega(dQ', dD' \mid Q, De^{rs}) P^{t-s}_\Omega(A \mid Q', D')$$

(обратное уравнение Колмогорова).

Доказательства здесь и далее не приводим, а смысл (3) мо пояснить так. Первая после t_0 сделка происходит в момент $t_0 + s$ с роятностью $\Lambda e^{-\Lambda s} ds$. Если $s > t$ (вероятность этого $e^{-\Lambda t}$) процесс в мент $t_0 + t$ окажется в состоянии (Q, De^{pt}), и мы получаем первый ч в правой части. Если же $s \leqslant t$, то к моменту первой сделки процесс жется в состоянии (Q, De^{ps}), из него в результате сделки с вероя стью $\Omega(dQ', dD' \mid Q, De^{ps})$ перейдет в (Q', D'), а оттуда за оставш время $t - s$ попадет в A с вероятностью $P^{t-s}(A \mid Q', D')$. Суммиру таким событиям, получим второй член в правой части (3).

Итак, динамика процесса описана. Разорение торговца естеств связать с ростом задолженности сверх некоторого достаточно высо уровня D^*. Обозначим через $\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D)$ вероятность того, что D(

[1] Здесь и далее $\delta(A \mid x_i, \ldots, x_n)$ — вероятностная мера на R^n, сосредот ная в точке $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (δ-функция). $\delta(A \mid \vec{x}) = 1$, если $\vec{x} \in A$ и $=0$, если Для любой функции $f: R^n \to R^m$ $\int_{R^n} f(\vec{y})\delta(d\vec{y} \mid \vec{x}) = f(\vec{x})$.

$\geqslant D^*$ для некоторого $t \geqslant 0$ (при стратегии Ω и начальном состоянии $Q(0)=Q$, $D(0)=D$). Оказывается, что, если D^* достаточно велико, то его конкретное значение несущественно.

Утверждение 2. При $D^* \to +\infty$, $\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D) \to \omega_\Omega(Q, D)$ монотонно и равномерно по Q, D, Ω. Здесь

$$\omega_\Omega(Q, D) = \text{Вер}\{\overline{\lim_{t\to+\infty}} D(t) = +\infty \mid Q(0)=Q, D(0)=D\} \tag{4}$$

вероятность того, что задолженность неограниченно возрастает на траектории (1), выходящей из (Q, D).

С математической точки зрения удобней считать вероятностью разорения именно предельную величину ω_Ω и соответственно понимать под разорением просто неограниченный рост задолженности. Итак, мы предполагаем, что торговец выбирает Ω так, чтобы минимизировать величину ω_Ω. Важно отметить следующее. Если торговец вовсе откажется от сделок $(u_i \equiv v_j \equiv 0 \div \Omega = \delta(A \mid Q, D))$, то уравнение для D примет вид $dD/dt = pD$. Поэтому, в силу (4), $\omega_\delta = 1$ при $D > 0$ и $\omega_\delta = 0$ при $D \leqslant 0$. Таким образом, опасность разорения в форме роста задолженности действительно создает стимул к деятельности для торговца при $D > 0$. Если при $D > 0$ он не будет торговать, то разорится наверняка, а если будет, то может быть добьется спасительной ситуации $D \leqslant 0$.

Выражение (4) неудобно для оптимизации. По формуле полной вероятности имеем

$$\omega_\Omega(Q, D) = \int_{R^2} P^t_\Omega(dQ', dD' \quad Q, D)\, \omega_\Omega(Q', D'). \tag{5}$$

Подставляя сюда P^t_Ω из (3) и еще раз используя (5), получаем:

$$\omega_\Omega(Q, D) = \Lambda \int_0^\infty e^{-\Lambda s}\left[\int_{R^2} \Omega(dQ', dD' \mid Q, De^{rs})\, \omega_\Omega(Q', D')\right] ds. \tag{6}$$

Утверждение 3. ω_Ω является наименьшей (поточечно) борелевской функцией, удовлетворяющей (6) и условиям:

$$0 \leqslant \omega_\Omega \leqslant 1; \quad \lim_{D\to+\infty} \omega_\Omega = 1; \quad \lim_{D\to-\infty} \omega_\Omega = 0 \tag{7}$$

равномерно по Q.

Замена переменных $\tau = De^{rs}$ в (6) показывает, что (6) эквивалентно при $D \neq 0$ уравнению

$$rD\frac{\partial \omega_\Omega}{\partial D} \quad \Lambda\Big[\omega_\Omega(Q, D) \quad \int_{R^2} \Omega(dQ', dD' \mid Q, D)\, \omega_\Omega(Q', D')\Big] =$$

$$= \Lambda\Big[\omega_\Omega(Q, D) - \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_\Omega(Q \quad v_i(Q, D), D \quad v_j(v_j(Q, D)))$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \omega_\Omega(Q + u_i(Q, D), D + U_i(u_i(Q, D))) \tag{8}$$

Оптимальной назовем стратегию $\hat{\Omega}$, для которой $\omega_{\hat{\Omega}} \leqslant \omega_\Omega$ при всех Ω, Q, D. Согласно принципу Беллмана [12], оптимальная стратегия должна минимизировать приращение $\omega_{\hat{\Omega}}$ в каждой сделке.

Утверждение 4. Оптимальная стратегия $\hat{\Omega} \div \{\hat{u}_i, \hat{v}_j\}$ в классе борелевских функций[1] u_i, v_j существует. $\omega_{\hat{\Omega}} = \hat{\omega}$ является наименьшей полунепрерывной снизу функцией, удовлетворяющей уравнению Беллмана

[1] Эта стратегия оптимальна в более широком классе, в котором u_i, v_j являются случайными величинами, распределение которых — борелевская функция от t, Q, D.

$$rD\frac{\partial\hat\omega}{\partial D}=\Lambda\Bigg(\hat\omega(Q,D)\quad\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\min_{0\leqslant v\leqslant Q}\hat\omega(Q\quad v,\,D-V_j(v))$$

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\min_{0\leqslant u\leqslant u_i^*}\hat\omega(Q+u,\,D+U_1(u))\Bigg)$$

и условиям (7). Значения оптимальных функций $\hat u_i(Q, D)$, $\hat v_j(Q, D)$ доставляют минимумы в правой части (9).

Этот результат можно усилить при дополнительном естественном предположении. Назовем рынок рентабельным, если есть возможность перепродажи с прибылью, т. е., если существует i, j и ω $0<\omega<u_i^*$ такие, что $U_i(\omega)<V_j(\omega)$.

Утверждение 5. Если рынок рентабельный, то $\hat\omega$ непрерывна и является единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей (7), (9).

Отметим, что из перечисленных вначале свойств функций U_i, V_j при доказательстве утверждений 1—5 используются только ограниченность, измеримость и обращение в 0 (в нуле).

Исследование уравнения Беллмана и интерпретация результатов

Последующие результаты получены очень эффективными, но н вполне строгими методами асимптотического разложения по малом параметру [13]. Мы приводим эти результаты, так как они показываю главное — экономический смысл решений.

В уравнение (9) входят две постоянные времени $1/r$ и $1/\Lambda$. Есл принять норму процента $r\sim 10\%$ в год, а частоту сделок $\Lambda\sim 100$ в го то их отношение $r/\Lambda=\rho\sim 10^{-3}$ — весьма малая величина. Малость означает, что между сделками долг нарастает в среднем незначительн поэтому отдельная сделка не решает судьбу торговца. Его оптимал ное поведение в этой ситуации рассчитано на большое количество сд лок и обнаруживает экономические закономерности, которых обыч ожидают в случае большого числа участников. Если выделить главну часть решения уравнения (9), при $\rho\to 0$, то окажется, что вероятно разорения существенно (больше $O(\sqrt{\rho})$) отличается от 0 и 1 лишь в у кой (относительной ширины $O(\sqrt{\rho})$) окрестности G кривой $R($ рис. 2. Монотонная неотрицательная, вогнутая, ограниченная функ R является единственным решением уравнения

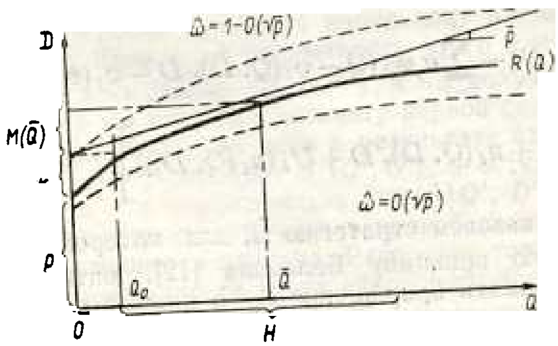

Рис. 2

$$rR(Q)=\Lambda\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\max_{0\leqslant v\leqslant Q}(V_j(v)+R(Q\quad v)\quad R(Q))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \beta_i \max(-U_i(u)+R(Q+u)-R(Q))\Big]$$

Выше области G, $\hat{\omega}=1-O(\sqrt{\rho})$, ниже — $\hat{\omega}=O(\sqrt{\rho})$. Таким образом $R(Q)$ — максимальная величина кредита, который торговец с большой вероятностью выплатит, имея запас Q, или иначе говоря, кредитоспособность торговца. Неотрицательная на рентабельном рынке величина $P=R(0)$ показывает объем кредита, надежно обеспеченного самим положением торговца на рынке. Эту величину естественно назвать «ценой фирмы»[1].

Функции (единственные и непрерывные) $\hat{u}_i^0(Q)$, $\hat{v}_j^0(Q)$, доставляющие максимумы в правой части (10), являются первыми приближениями оптимальных функций $\hat{u}_i(Q, D)$, $\hat{v}_j(Q, D)$. Очевидно, что слагаемые в правой части (10) неотрицательны. Из этого следует, что торговец не продаст сразу весь запас $Q(v_j(Q)\neq Q)$, если потребитель заплатит меньше, чем $M(Q)=R(Q)-R(0)$. Аналогично, из вида группы слагаемых с β_i можно заключить, что торговец, не имеющий запаса, не купит запас $Q(u_i(0)\neq Q)$, если за него придется платить больше, чем $M(Q)$. Следовательно, величина $M(Q)$ выступает как меновая стоимость, объективно складывающаяся на рынке денежная оценка товарных запасов. Итак, получен первый содержательный экономический результат. На рынке возникают денежные оценки активов торговца — его положения P и запасов $M(Q)$, а кредитоспособность складывается из стоимости активов $R=M+P$. Уравнение (10), в правой части которого R можно заменить на M, показывает, что если торговец знает меновую стоимость $M(Q)$, то его оптимальное поведение состоит в максимизации в каждой сделке прибыли с учетом изменения меновой стоимости товарных запасов. Правая часть (10) выражает средний поток торговой прибыли при запасе Q. В рассматриваемой модели поток торговой прибыли положителен (торговец продает дороже меновой стоимости, а покупает дешевле) и при $D=R(Q)$ в точности равен проценту за кредит. В этом экономический смысл уравнения (10).

Оптимальное поведение можно описать и другим способом. Обозначим через $\mathcal{K}$ совокупность стратегий вида (2), у которых u_i, v_j зависят только от Q. В частности, $\Omega_0 \div \{u_i^0, v_j^0\}\in\mathcal{K}$. Из (1) следует, что при $\Omega\in\mathcal{K}$ вероятность того, что торговец будет иметь запас $Q\in A\subset R^2$ в момент $t+t_0$ зависит только от t и $Q(t_0)$ и не зависит от t_0 и $D(t_0)$. Обозначим эту вероятность через $F_\Omega{}^t(A|Q)$. $F_\Omega{}^t$ удовлетворяет уравнению[2].

$$\frac{\partial}{\partial t} F_\Omega^t(A\,|\,Q) \quad \Lambda\Big[F_\Omega^t(A\,|\,Q) \quad \int\limits_{R^1} F_\Omega^t(dQ'\,|\,Q)\,\Omega(A\,|\,Q');$$

$$F_\Omega^0(A\,|\,Q)=\delta(A\,|\,Q). \qquad (11)$$

Оказывается, что стратегия Ω_0 доставляет максимум функционалу[3]

$$\mathcal{P}[\Omega]=\int\limits_0^\infty dt e^{-rt}\int\limits_{R^1} F_\Omega^t(dQ'\,|\,Q)\left[\sum_{j=1}^{m}\lambda_j V_j(v_j(Q))-\sum_{i=1}^{n}\mu_i U_i(u_i(Q))\right],$$

т. е. $\mathcal{P}[\Omega_0]\geqslant\mathcal{P}[\Omega]$ для всех $\Omega\in\mathcal{K}$ при любом начальном Q. Величина

[1] Бухгалтерия капиталистических стран включает цену фирмы в список ее активов наряду с основными и оборотными фондами [14].

[2] Это прямое уравнение Колмогорова [11] для скачкообразного марковского процесса изменения запаса Q с частотой скачков Λ и распределением скачков Ω. Его можно строго вывести из (3) и условия $\Omega\in\mathcal{K}$, а смысл можно пояснить так же, как было сделано выше для уравнения (3).

[3] В задаче оптимального управления $[\Omega]\to\max$ по $\Omega\in$ при ограничении (11) величина R играет роль функции Беллмана [12] F^r

$\lambda_j V_j(v_j^0(Q))$ есть средний поток выручки торговца при запасе Q, в сделках с j-м потребителем, аналогично, $\mu_i U_i(u_i^0(Q))$ — средний поток затрат. Поэтому $\mathscr{P}$ — это прямой вероятностный аналог хорошо известного в математической экономике критерия дисконтированной прибыли [10]. $\mathscr{P}$ — это дисконтированная прибыль, вычисленная вдоль каждой траектории процесса, и затем усредненная по множеству траекторий [11]. Таким образом, оптимальное поведение торговца в первом приближении состоит в максимизации ожидаемой дисконтированной прибыли.

Процесс изменения запаса при стратегии Ω_0 эргодичен, [11], так что за время $\sim 1/\Lambda\, F^t_{\Omega_0}$ приближается к стационарному, независящему от начального состояния, распределению

$$F_0(A)=\int_{R^1} F_0(dQ')\,\Omega_0(A\mid Q');\quad F_0(R_+')=1. \qquad (12)$$

Это означает, что на рынке устанавливается квазистационарное состояние. Запас случайным образом колеблется, но вероятность обнаружить данное значение запаса не зависит от времени[1].

Чтобы подробно описать это состояние и сопоставить его с классическим рыночным равновесием, рассмотрим исходную ситуацию на рынке с позиции теории экономического равновесия. Согласно общим принципам этой теории [9], торговец должен, исходя из цены продукта p, установить постоянные[2] объемы сделок $u_i(p)$, $v_j(p)$ максимизирующие прибыль:

$$V_j(v_j(p))-pv_j(p)\geqslant V_j(v)-pv\quad \forall v\geqslant 0,$$
$$-U_i(u_i(p))+pu_i(p)\geqslant -U_i(u)+pu\quad \forall u\quad 0\leqslant u\leqslant u_i^*,$$

а цена должна установиться на уровне $\bar{p}$, обеспечивающем баланс средних потоков покупок и продаж

$$\bar{w}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\bar{v}_j=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\bar{u}_i;\quad \bar{v}_j=v_j(\bar{p});\quad u_i=\bar{u}_i(\bar{p}), \qquad (1\ldots$$

(13) однозначно определяет равновесные величины $\bar{p}$, $\bar{w}$, $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$.

Вернемся теперь к (12). Разложение (12) при $\rho\to 0$ (ρ входит в $\ldots$ показывает, что с относительной точностью $O(\rho^{2/3})$ плотность распределения F_0 выражается в виде (рис. 3).

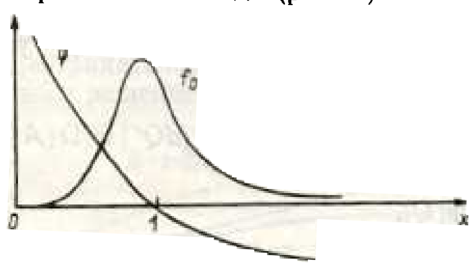

Рис. 3

$$f_0=A\left(\frac{Q}{\bar{Q}}-A_0\right)\Big/A'(A_0),$$

[1]В отличие от распределения Q, распределение D не устанавливается, а «ра...кается», но это растекание происходит относительно медленно (его характерное ...мя $1/v\gg 1/\Lambda$) и, кроме того, величина задолженности слабо влияет на поведение ...говца. Поэтому состояние (12) названо «квазистационарным».

[2] Стратегии с постоянными v_j, $\sum_{j=1}^{n} v_j>0$ недопустимы в (1), так как проти...чат условию $Q\geqslant 0$. Это условие, очень важное в динамике, принципиально н... учесть в статике, так что приведенная «равновесная» конструкция носит иск...тельно вспомогательный характер.

где A — функция Эйри[1], A_0 — ее первый корень, а $\bar{Q}$ — характерный размер запаса, который выражается через равновесные значения $\bar{p}$, $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$.

$$\bar{Q}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\bar{\sigma}^2\bar{a}}{\bar{p}\rho}},$$

$$\bar{\sigma}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\bar{v}_j^2+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{u}_i^2,$$

$$\bar{a}=1\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i U_i''(\bar{u}_i)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j''(\bar{v}_j)\right). \tag{15}$$

При $Q\leqslant\bar{w}/\Lambda\ll\bar{Q}$ выражение (14) теряет силу, однако, вероятность иметь запас $Q\leqslant\bar{w}/\Lambda$ мала ($O(\rho)$). При $Q\to+\infty$, $f_0\to 0$ так, что с вероятностью $1-O(\rho)$ запас находится в диапазоне

$$H=\left\{Q\,\middle|\,\frac{\bar{W}}{\Lambda}\leqslant Q\leqslant\bar{Q}\ln^{2/3}1/\rho\right\}. \tag{16}$$

Для $Q\in H$ удается получить явное (с точностью $O(\rho^{2/3})$) выражение для функций $\{u_i^0, v_j^0\}\div\Omega_0$

$$v_j^0=\bar{v}_j+(k/V_j''(\bar{v}_j))\,\psi(Q/\bar{Q}),$$

$$u_i^0=\bar{u}_i+(k/U_i''(\bar{u}_i))\,\psi(Q/\bar{Q}), \tag{17}$$

$$k=\sqrt[3]{2\bar{\sigma}\bar{p}\bar{a}^2}\rho\psi(x)=A'(A_0-x)/A(A_0-x).$$

Важно, что поведение торговца в типичной ситуации не требует детальной информации о функциях спроса и предложения. Надо знать лишь две величины, характеризующие конъюнктуру рынка ($\bar{Q}$ и k) и две — данного контрагента $\bar{v}_j$ и $V_j''(\bar{v}_j)$ (или $\bar{u}_i$ и $U'''(\bar{u}_i)$).

Самым же существенным является то, что при $Q\in H$ меновая стоимость имеет вид

$$M=K+\bar{p}Q,\ k>0. \tag{18}$$

Линейная зависимость[2] меновой стоимости от запаса означает, что существует цена продукта $\bar{p}$. В силу (13) она обладает свойствами равновесной цены.

Подведем итоги.

1. Динамическое описание механизма парных сделок (микроописание), предложенное выше, может объяснить с единой точки зрения важнейшие закономерности рыночного обмена: существование цены продукта, стремление торговца к максимуму прибыли и установление динамического равновесия на рынке.

2. В модели естественным образом возникает формальное описание таких экономических категорий, как кредитоспособность, меновая стоимость, торговая прибыль, цена фирмы, оборотные фонды.

3. Поведение торговца, минимизирующее вероятность разорения, достаточно просто, но нетривиально и может быть описано субъективно различными способами: торговец может просто обнаружить p правило (17), может выработать «правильную» оценку товарных запасов M и максимизировать текущую прибыль (10), может поступать более

---

[1]Ограниченное решение уравнения Эйри $A''+xA=0$ [16]. Штрихами здесь и далее обозначены производные.

[2]Величина K есть дополнительная стоимость малых запасов $Q\sim w/\Lambda\ll Q$, с которыми торговец практически никогда не расстается (16). Запас Q_0 играет особую роль. Он технологически необходим для бесперебойной торговли и возникает даже при детерминированной последовательности покупок и продаж. Поэтому его рыночную оценку K следует выделить из меновой стоимости товарных запасов в особый вид активов фирмы — оборотные фонды. Меновая стоимость тогда просто пропорциональна запасу (в типичной области H).

«дальновидно» и максимизировать ожидаемую дисконтированную при-быль.

Эти результаты анализа простейшей модели позволяют надеяться, что предлагаемый подход может привести к последовательному микро-описанию рынка.

Автор приносит благодарность д. ф.-м. н. А. А. Петрову за посто-янное внимание к работе, а также к. ф.-м. н. С. В. Чуканову и к. ф.-м. н. В. Е. Кривцову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к тео-рии производственных функций. I. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1979, № 2, с. 18—26.
2. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: сис-темный подход и односекторная модель. II. — Изв. АН СССР, Техническая кибер-нетика, 1979, № 3, с. 28—38.
3. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: много-секторная модель и учет природных ресурсов. III. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1979, № 4, с. 11—22.
4. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: уче научно-технического прогресса. IV. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1979, № 5, с. 13—23.
5. *Шананин А. А.* К теории производственной функции. — В сб.: Модели и алгорит-мы программного метода планирования сложных систем. — М.: ВЦ АН СССР, 1979.
6. *Молдашева Г. Б., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Математическая модель междуна-родной торговли. — В сб.: Модели и алгоритмы программного метода планирова-ния сложных систем. — М.: ВЦ АН СССР, 1979.
7. *Бузин А. Ю.* К системному анализу развивающейся экономики... — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1981, № 4, с. 25.
8. *Крутов А. П., Поспелов И. Г.* К системному анализу развивающейся экономики: учет влияния банковской системы. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1981, № 6, с. 48.
9. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 197
10. *Розенмюллер И.* Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974.
11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
12. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960
13. *Найфе Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1980.
14. *Самуэльсон П.* Экономика. М.: Экономика, 1964.
15. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.* Оптимальное управление. — М.: На-ука, 1979.
16. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1969.

С. В. Чукано

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ФОНДАМИ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМИ ПО МОМЕНТАМ СОЗДАНИЯ

Наиболее последовательный анализ глобальных динамических м делей с фондами, дифференцированными по моментам создания, про дится в работах Л. В. Канторовича и его сотрудников (см. наприм [1]). В этих исследованиях, как правило, предполагается что, во-п вых, трудовые ресурсы жестко закрепляются за фондами на весь пе од их функционирования и, во-вторых, выпуск фондов, созданных в который момент времени, описывается априорно заданной произв ственной функцией. С другой стороны, в связи с принципиальны трудностями идентификации производственных функций, разрабаты ются методы их построения как результата наилучшего распределе ресурсов между фондами с различными характеристиками [2, 3].