$$\min_{a}(6a_1-4a_2)$$
$$\begin{cases} -a_1+a_2\le 0, \\ 2a_1+a_2\le 0, \\ -1\le a_1, \quad a_2\le 1. \end{cases}$$

Решением этой задачи является a^k = (0,5;-1), а минимальное значение целевой функции равно 7. Из рис. 2 ясно, что минимум целевой функции по направлению a^k совпадает с решением нашей задачи. Если это было бы не так, $x^{(1)}$ точка минимума целевой функции вспомогательной задачи по направлению a^k была бы начальной точкой для конструирования следующей итерации.

Методы возможных направлений также имеют различные варианты.

3. Методы множителей Лагранжа

Эта группа методов основана на сведении рещения задачи математического программирования к нахождению седловой точки функции Лагранжа. Ограничением здесь является то, что эта седловая точка существует далеко не всегда. По существу эквивалентность решения задачи математического программирования и нахождения седловой точки функции Лагранжа устанавливается только для выпуклого программирования, да и то при дополнительных условиях (теорема Куна-Таккера). Если такая эквивалентность есть, то можно использовать методы множителей Лагранжа, которые представляют собой различные процедуры поиска седловой точки. В качестве такой процедуры можно взять, например, итеративный процесс как в методе проекции градиента, применив его для подъема по переменной x и спуска по переменной y. Получим процесс

$$x^{k+1}=P_R\left(x^k+\alpha_k\frac{\partial F(x^k,y^k)}{\partial x}\right),$$
$$y^{k+1}=P_Y\left(y^k-\alpha_k\frac{\partial F(x^k,y^k)}{\partial y}\right),$$

где

$$\frac{\partial F(x^k,y^k)}{\partial x}=f'(x^k)+\left\langle y^k,g'(x^k)\right\rangle,\quad \frac{\partial F(x^k,y^k)}{\partial y}=g(x^k),$$
$$g(x)=(g_1(x),\dots,g_m(x)),\quad Y=\{y\mid y\ge 0\}.$$

Проекция на множество Y определяется весьма просто:

$$P_Y(y)=(z_1,..,z_m),\text{ где } z_i=max(y_i,o),\ i=\overline{1,m}.$$

Если R — неотрицательный ортант, то проекция на него определяется аналогичным образом.

Задача. *По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить* 180 *изделий, которые могут быть изготовлены двумя техноло-*

гическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты составляют $4x_1+x_2^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они равны $8x_2+x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальны.

Р е ш е н и е. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2 \tag{1}$$

при условиях

$$x_1+x_2=180, \tag{2}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Решим задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (1) при условии (2), т.е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda)=4x_1+x_1^2+8\,x_2+x_2^2+\lambda\,(180-x_1-x_2),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=4+2x_1-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=8+2x_2-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=180-x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_1^*=91$, $x_2^*=89$. Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция f имеет условный минимум.

4. Методы второго порядка

До сих пор мы рассматривали методы первого порядка, т.е. методы поиска экстремума, использующие первые производные. Фактически в этих методах производится линеаризация, связанная с заменой максимизируемой функции $f(x)$ линейным членом разложения ее в ряд Тейлора. Но если функция дважды непрерывно дифференцируема, то можно использовать для ее аппроксимации два члена ряда Тейлора. Использование такой аппроксимации в итеративном процессе может повысить скорость сходимости.

Наиболее известным из методов второго порядка является метод Ньютона, который состоит в следующем. На k-й итерации, имея приближение $x^{(k)}$, составим вспомогательную задачу максимизации функции

$$\varphi_k(x)=\left\langle f'(x^{(k)}),x-x^{(k)}\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle f''(x^{(k)})(x-x^{(k)}),x-x^{(k)}\right\rangle$$

на множестве X. Пусть

$$\varphi_k(\tilde{x}^{(k)})=\max_{x\in X}\varphi_k(x),$$

тогда следующее приближение строится по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}), \quad 0 \le \alpha_k \le 1.$$

Шаг α_k можно выбирать разными способами, в частности, можно положить $\alpha_k=1$, тогда в качестве следующего приближения принимается просто решение вспомогательной задачи, т.е. $x^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)}$.

Для задачи без ограничений, когда $X=R^n$, метод Ньютона существенно упрощается. Действительно, в этом случае $\varphi_k'(\tilde{x}^{(k)}) = 0$, т.е.

$$f'(x^{(k)}) + f''(x^{(k)})(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}) = 0. \qquad (3.31)$$

Значит для нахождения $\tilde{x}^{(k)}$ надо решить систему линейных уравнений (3.31). Если матрица $f''(x^{(k)})$ невырождена, то имеем просто (при $\alpha_k=1$)

$$x^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} = x^{(k)} - (f''(x^{(k)}))^{-1} f'(x^{(k)}).$$

Достоинством метода Ньютона является высокая скорость сходимости, которая полностью компенсирует усложнение вычислений на каждой итерации. Недостатком метода является то, что он сходится при весьма жестких предположениях.

Задача. *Найти минимальное значение функции* $f = (x_1-x_2)^4+(x_1-2x_2)^2$ *с точностью* $\varepsilon = 0{,}05$, *если* $x \in R^2$.

Р е ш е н и е. Итерационная формула этого метода есть

$$x^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} = x^{(k)} - (f''(x^{(k)}))^{-1} f'(x^{(k)}),$$

где $k= 0, 1, 2,..$, т.е. направление определяется антиградиентом, а длина шага - обратной матрицей Гессе. В данной задаче будем использовать критерий остановки $\|f'(x^{(k)})\| < \varepsilon$. В качестве начальной точки возьмем $x^{(0)}= (0;3)$. Вычислим поочередно

$$f'(x^{(0)}) = (-44;24), \quad f''(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad [f''(x_0)]^{-1} = \frac{1}{384}\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 50 \end{pmatrix},$$

$$f'(x^{(0)})\left[f''(x^{(0)})\right]^{-1} = (-0{,}67;2{,}67).$$

Отсюда находим

$$x^{(1)} = x^{(0)} - f'(x^{(0)})\left[f'(x^{(0)})\right]^{-1} = (0{,}67;2{,}67).$$

И так далее. Требуемая точность получается на 6-ом шаге. Поэтому

$$\tilde{x} = x^{(6)} = (1{,}83;0{,}91), \quad (\|f'(x^{(6)})\| = 0{,}04 < 0{,}05), \quad f(\tilde{x}) = 0{,}0009.$$

Таким образом, $f_{min}= f(1{,}83;\ 0{,}91) = 0{,}0009$.

5. Методы штрафных функций

Как видно из предыдущих рассмотрений, наличие ограничений существенно усложняет задачу поиска экстремума функции. Почти все изложенные методы решения экстремальных задач включали сложные специальные процедуры, учитывающие наличие ограничений (например, проектирование). В этом смысле особую группу образуют методы множителей Лагранжа, которые состоят в сведении задачи поиска экстремума с ограничениями к задаче поиска экстремума (точнее седловой точки, что примерно то же самое) без ограничений или с ограничениями простого вида, учет которых не составляет труда (это видно на примере операции проектирования на неотрицательный ортант). Однако, как говорилось, эти методы применимы практически только в выпуклом случае. От этого недостатка избавлены методы штрафных функций, которые позволяют в весьма общем случае сводить экстремальные задачи со сложными ограничениями к задачам без ограничений или с простыми ограничениями, а в сочетании с методами поиска безусловного экстремума служат универсальным средством решения задач математического программирования (конечно, не лишенным недостатков).

Рассмотрим общую задачу математического программирования (3.3), (3.4):

$$\max_{x\in X} f(x), \quad X = \left\{x \middle| x \in R, g_i(x) \ge 0, i = \overline{1,m}\right\}$$

Методы штрафных функций основаны на описании множества X с помощью функций со специальными свойствами. Одна группа этих методов использует функции вида $\Phi(x,C)$, которые обладают следующими свойствами:

$$\lim_{C\to\infty} \Phi(x,C) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ -\infty, & x \notin X. \end{cases}$$

В качестве такой функции можно взять, например, квадратичную функцию штрафа

$$\Phi_0(x,C) = -C\sum_{i=1}^{m} \left[\min(0, g_i(x))\right]^2,$$

которая является дифференцируемой, если дифференцируемы функции ограничений $g_i(x)$. Можно показать, что если $f(x)$ и $g_i(x),\ i = \overline{1,m}$, непрерывны на замкнутом, ограниченном множестве R и $X \neq \varnothing$, то

$$\max_{x\in X} f(x) = \lim_{Cn\to\infty} \max_{x\in R}\left[f(x) + \Phi_0(x,C_n)\right]. \qquad (3.32)$$

При этом если $x^0(C_n)$ реализует максимум в правой части (3.32), то любая предельная точка последовательности $\{x^0(C_n)\}$ есть решение задачи (3.3), (3.4).

Таким образом, с помощью метода штрафных функций общую задачу математического программирования можно свести приближенно (при достаточно большом C_n) к задаче без ограничений или с простыми ограничениями (на простом множестве R). Недостатком методов штрафных функций является ухудшение свойств вспомогательных задач (в правой части (3.32)) при больших значениях C_n, в частности, чувствительность к ошибкам вычислений. Эти недостатки преодолены в некоторых вариантах методов штрафных функций, в которых можно ограничиться конечными значениями штрафных констант C_n.

Задача. *Найти минимум функции* $f(x)= 2x_1^2+x_2^2$ *при условиях*

$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1 - x_2 + 2 \le 0, \\ g_2(x) = x_1 - 2x_2 + 1 \le 0, \\ g_3(x) = -2x_1 + x_2 + \le 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Целевая функция $f(x)$ является выпуклой квадратичной функцией, а ограничения, определяющие допустимое множество задачи, линейны. Поэтому решение $x^{(k)}$ вспомогательной задачи $f_k(x)=f(x)+\varphi_k(x)\to min$ $\forall k=1,2,\ldots$ может быть найдено из условия $f_k'(x^{(k)})= 0,$ т.к. функция $\varphi_k(x)=k\varphi(x)$ в различных областях пространства R_n задана по-разному, то при составлении вспомогательной функции $f_k(x)$ следует сделать определенное предположение о расположении ее точки минимума $x^{(k)}$.

1. Предположим, что в точке $x^{(k)}$ безусловного минимума функции $f_k(x)$ все ограничения задачи нарушаются, т.е. $g_i(x^{(k)})>0,\ i=1,2,3$. Тогда

$$g_i^+(x^{(k)})=g_i(x^{(k)}),\ i=1,2,3,$$

поэтому считаем, что

$$f_k(x)=f(x)+k[g_1^2(x)++g_2^2(x)+g_3^2(x)]=(2+6k)x_1^2+(1+6k)x_2^2+6kx_1x_2-2kx_1-8kx_2+5k.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_k(x)}{\partial x_1} = (4+12k)x_1 - 6kx_2 - 2k = 0 \\ \dfrac{\partial f_k(x)}{\partial x_2} = -6kx_1 + (2+12k)x_2 - 8k = 0 \end{cases},$$

находим $$x_1^{(k)} = \frac{18k^2+k}{27k^2+18k+2}, \qquad x_2^{(k)} = \frac{27k^2+8k}{27k^2+18k+2}.$$

Так как $g_3(x^{(k)}) = -2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = \dfrac{-9k^2+6k}{27k^2+18k+2} < 0$ $\forall k=1,2,..$, то предположение $g_3(x^{(k)})>0$ не подтвердилось.

2. Предположим, что $g_i(x^{(k)})>0,\ i=1,2,\ g_3(x^{(k)})\le 0$. Тогда

$$g_i^+(x^{(k)})=g_i(x^{(k)}),\ i=1,2,\ g_3^+(x^{(k)})=0,$$

поэтому считаем, что

$$f_k(x)=f(k)+k[g_1^2(x)+g_2^2(x)]=(2+2k)x_1^2+(1+5k)x_2^2-2k\,x_1\,x_2-2k\,x_1-8k\,x_2+5k,$$

откуда находим

$$x_1^{(k)} = \frac{9k^2+k}{9k^2+12k+2}, \qquad x_2^{(k)} = \frac{9k^2+8k}{9k^2+12k+2}.$$

Легко проверить, что сделанное предположение подтверждается, т.е. последние два равенства определяют точку безусловного минимума $x^{(k)}$ вспомогательной функции $f_k(x)$. Окончательно находим

$$x^0 = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = (1;1), \qquad f_{min}=f(1;1)=3.$$

Задачи и упражнения

1-30. Найти глобальные экстремумы функции z на множестве G, используя графический метод решения ЗНП.

1. $z = x-y-5$, $\quad G: \begin{cases} (x-1)y \ge 1, \\ x+y \ge 3{,}5, \\ 0 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le 5. \end{cases}$

2. $z = (x-2)^2+(y-3)^2$, $\quad G: \begin{cases} x+2y \le 12, \\ x+y \le 9, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

3. $z= (x-7)(y-1)$, $\quad G: \begin{cases} x+2y \le 12, \\ x+y \le 9, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

4. $z= x^2+y^2$, $\quad G: \begin{cases} (x-5)^2+(y-3)^2 \ge 9, \\ (x-5)^2+(y-3)^2 \le 36, \\ x+y \ge 8, \\ y \ge 0. \end{cases}$

5. $z= 2x-x^2+y$, $\quad G: \begin{cases} y \le 0, \\ 3x+2y \le 12, \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$

6. $z= (x-1)^2+(y-3)^2$, $\quad G: \begin{cases} x+2y-14 \le 0, \\ x+y \le 9, \\ 3x+y \le 21, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

7.-9. $G: \begin{cases} x+2y \le 12, \\ x+y \le 9. \end{cases}$ $\qquad$ 7. $z= (x-2)^2+(y-3)^2$.

8. $z= (x-5)^2+(y-7)^2$. $\qquad$ 9. $z= (x-7)(y-1)$.

10.-13. $G: \begin{cases} 2x+5y \le 30, \\ 2x+y \le 14, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

10. $z=(x-4)^2+(y-8)^2$. $\qquad$ 11. $z=(x-2)^2+(y-4)^2$.

12. $z=(x-7)^2+(y-7)^2$. $\qquad$ 13. $z=(x-6)^2+(y-2)^2$.

14.-15. $G: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 36, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 14. $z = 2x+y$. 15. $z=(x-3)^2+(y-2)^2$.

16.-19. $G: \begin{cases} (x-2)(y+1) \le 16, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 16. $z=x+y$. 17. $z=(x-1)^2+(y-1)^2$. 18. $z=(x-4)^2+(y-3)^2$. 19. $z=-x+3y$.

20.-23. $G: \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 \ge 9, \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 \le 36, \\ x + y \ge 8, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 20. $z=x+3y$. 21. $z= x+y$. 22. $z= x^2+y^2$. 23. $z= xy$.

24.-27. $G: \begin{cases} 5x + 3y \le 24, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 24. $z= x+y$ 25. $z= (x-4)^2+(y-4)^2$. 26. $z= (x-3)^2+4(y-6)^2$ 27. $z= |x+5|+y$.

28.-30. $G: \begin{cases} y - |x-4| \le 3, \\ 2 \le x \le 6, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 28. $z=x+y$. 29. $z= (x-7)^2+(y-7)^2$. 30. $z= (x-4)^2+(y-2)^2$.

Задачи 31-60 решить любым численным методом.

Найти точки условного экстремума функций в задачах 31 - 46.

Указание: *31-43 целесообразнее решать методом множителей Лагранжа, 44 -46 — методом штрафных функций.*

31. $f=x_1^2+x_2^2$ при условии $x_1+x_2=5$.

32. $f=x_1^2+x_2^2+x_3$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$

33. $f=x_1 x_2 x_3$ при условиях $\begin{cases} 2x_1x_2 + x_2x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$

34. $f=x_1 x_2+x_2 x_3$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

35. $f=3x_1^2+2x_1+2x_2^2+4x_2x_3$ при условиях $\begin{cases} x_1^2+2x_2^2=19, \\ x_1+2x_2x_3=11. \end{cases}$

36. $f=x_1x_2x_3$ при условиях $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=8. \end{cases}$

37. $f=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ при условии $x_1+x_2=7$.

38. $f=x_1x_2x_3$ при условиях $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=12. \end{cases}$

39. $f=x_1^2+x_2^2$ при условии $x_1+x_2=1$.

40. $f=3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1$ при условии $x_1^2+x_2^2=4$.

41. $f=2(x_1-1)^2+3(x_2-3)^2$ при условиях $\begin{cases} x_1+x_2\le 10, \\ x_1+x_2=6, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$

42. $f=x_1^2-x_2^2$ при условии $x_1^2-x_2^2=4$.

43. $f=(x_1-3)2+(x_2-5)^2$ при условии $x_2-x_1=5$.

44. $f=x_1^2+(x_2-5)^2$ при условиях $\begin{cases} 2x_1-5x_2\le -7, \\ 3x_1+x_2\le 15, \\ 4x_1+7x_2\le 71, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$

45. $f=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$ при условиях $\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 36, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$

46. $f=2x+y$ при условиях $\begin{cases} x^2+y^2\le 36, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

Найти минимальное значение функции в задачах 47-56.

Указание. *47-53 целесообразнее решать методом штрафных функций, 54-56 - методом возможных направлений*

47. $f=x_1^2+x_2^2-20x_1-30x_2$ при условиях $\begin{cases} 2x_1+3x_2-13\le 0, \\ 2x_1+x_2-10\le 0. \end{cases}$

48. $f=x_1^2+x_2^2-10x_1-15x_2$ при условиях $\begin{cases} 5x_1+13x_2-51\le 0, \\ 15x_1+7x_2-107\le 0. \end{cases}$

49. $f=x_1^2+x_2^2-5x_1-4x_2$ при условии $2x_1+3x_2+x_3=6$.

50. $f=x_1^2+x_2^2-5x_1-10x_2$ при условиях $\begin{cases} 9x_1+8x_2-72\le 0, \\ x_1+2x_2-10\le 0. \end{cases}$

51. $f = x_1^2 - 2x_2^2 - x_2$ при условиях $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \le 0. \end{cases}$

52. $f = x_1^2 + 2x_1 - x_2$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$

53. $f = x_1^2 + 2x_2^3 - 6x_1 - 32x_2$ при условиях $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 60, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$

54. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2$ при условиях $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

55. $f = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 3x_1 + x_2 \le 30, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

56. $f = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_2$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Найти максимальное значение функции в задачах 57-60.

Указание. *Решите несколькими способами и сделайте вывод о том, какой метод наиболее рационален.*

57. $f = x_1^2 x_2^3 x_3^4$ при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 18.$

58. $f = -x_1^2 - x_2^2$ при условиях $\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

59. $f = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ при условиях $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

60. $f = -x_1^2 - x_2^2$ при условиях $\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 \ge 1, \\ x_1 + 0{,}5x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$