Глава 3. Информационные аспекты и равновесие.

§ 3.1. Позиционные игры.

В главе 2 рассматривалась игра в нормальной форме. К такой форме в принципе может быть сведен динамический (т. е. протекающий в течение некоторого времени, а не мгновенно) конфликтно-управляемый процесс формальным введением понятия чистой стратегии. В тех случаях, когда мощность пространства стратегий невелика и имеется возможность численного нахождения решений, такой подход является вполне допустимым. Однако в большинстве задач поиска оптимального поведения конфликтно-управляемого процесса переход к нормальной форме не приводит к эффективным способам нахождения решений, хотя и позволяет наглядно иллюстрировать те или иные принципы оптимальности.

Математические модели конфликтов, учитывающие динамику, исследуются в теории позиционных игр. Наиболее простым классом позиционных игр является класс конечно-шаговых игр с полной информацией.

Обычно позиционные игры описываются с помощью дерева игры, т. е. конечной совокупности вершин и соединяющих их ребер, не образующей замкнутых циклов и имеющей (n + 1) выделенные вершины, одна из которых называется начальной позицией игры, а остальные – конечными позициями. Рассмотрим разбиение множества вершин X на n + 1 множество $X_1,...,X_n,X_{n+1}$, $\bigcup_i^{n+1} X_i = X, X_l \cap X_s = \varnothing,\ l \neq s$. Множество $X_i, i=1,...,n$ называется множеством очередности i-го игрока, а множество X_{n+1} – множеством конечных позиций. На множестве X_{n+1} определены n вещественных функций $h_1(x),...,h_n(x), x \in X_{n+1}$. Функция $h_i(x)$ $i=1,...,n$ называется выигрышем i-го игрока.

Игра проходит следующим образом. Задано множество N игроков, перенумерованных натуральными числами $1,...,i,...,n$ (т.е. $N=\{1,2,...n\}$). Пусть $x_0 \in X_{i_1}$, тогда в вершине (позиции) x_0 "ходит" игрок i_1 и выбирает вершину $x_1 \in F_{x_0}$ (F_x – множество тех позиций, которые могут реализоваться непосредственно после позиции x). Если $x_1 \in X_{i_2}$, то в вершине x_1 "ходит" игрок i_2 и выбирает следующую вершину (позицию) $x_2 \in F_{x_1}$ и т. д. Игра прекращается, как только достигается, конечная вершина (позиция) $x_k \in X_{n+1}$, т. е. такая, для которой $F_{x_k} = \varnothing$.

В результате последовательного выбора позиций однозначно реализуете некоторая последовательность $x_0,...,x_i...,x_k$, определяющая путь в древовидном графе, исходящий из начальной позиции x_0 и достигающий одной из конечных позиций игры. Такой путь называют партией. В позиции x_k каждый из игроков i, $i = 1,...,n$ получает выигрыш $h_i(x_k)$.

Будем предполагать, что игрок i при совершении выбора в позиции $x \in X_i$, знает эту позицию x, а следовательно, из-за древовидности графа G может восстановить и все предыдущие позиции. В таком случае говорят, что игроки имеют полную информацию.

Определение 3.1. *Однозначное отображение u_i, которое каждой вершине (позиции) $x \in X_i$ ставит в соответствие некоторую вершину (позицию) $y \in F_x$, называется стратегией игрока i.*

Множество всевозможных стратегий игрока i будем обозначать через U_i.

Таким образом, стратегия i-го игрока предписывает ему в любой позиции x из множества его очередности X_i однозначный выбор следующей позиции.

Упорядоченный набор $u = (u_1,\ldots, u_i ,\ldots, u_n)$, где $u_i \in U_i$ называется **ситуацией в игре**, а декартово произведение $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ – **множеством ситуаций**. Каждая ситуация $u = (u_1,\ldots, u_i ,\ldots, u_n)$ однозначно определяет партию в игре, а следовательно, и выигрыши игроков. Действительно, пусть $x_0 \in X_{i_1}$. Тогда в ситуации $u = (u_1,\ldots, u_i ,\ldots, u_n)$ следующая позиция x_1, определяется однозначно по правилу $u_{i_1}(x_0) = x_1$. Пусть теперь $x_1 \in X_{i_2}$. Тогда x_2 определяется однозначно по правилу $u_{i_2}(x_1) = x_2$. Если теперь на k -м шаге реализовалась позиция $x_{k-1} \in X_{i_k}$, то x_k определяется однозначно по правилу $x_k = u_{i_k}(x_{k-1})$ и т. д.

Пусть ситуации $u = (u_1,\ldots, u_i ,\ldots, u_n)$ в указанном смысле соответствует партии $x_0,x_1,\ldots,x_k$. Тогда можно ввести понятие **функции выигрыша** K_i, игрока i, положив ее значение в каждой ситуации u равным значению выигрыша h_i в окончательной позиции партии $x_0,x_1,\ldots,x_k$, соответствующей ситуации $u = (u_1,\ldots, u_i ,\ldots, u_n)$, т.е.

$$K_i(u_1,...,u_i,...,u_n) = h_i(x_k), i = 1,...,n.$$

Функции $K_i, i = 1,...,n$ определены на множестве ситуаций $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$. Таким образом, построив множества стратегий игроков U_i, и определив на декартовом произведении функции выигрыша $K_i, i = 1,...,n$, получаем игру в нормальной форме

$$\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}),$$

где $N = \{1,...,i,...,n\}$- множество игроков, U_i – множество стратегий игрока i, K_i – функция выигрыша игрока i, $i = 1,...,n$.

В главе 2 было введено понятие равновесия по Нэшу для игры n лиц в нормальной форме. Для конечных игр с полной информацией справедливо следующее утверждение: любая конечная игра с полной информацией имеет ситуацию равновесия. Оказывается, что для многошаговых игр можно усилить понятие равновесия, вводя понятие абсолютного равновесия [10].

Определение 3.2. *Ситуация равновесия по Нэшу* $u^* = (u_1^*,...,u_n^*)$ *называется ситуацией абсолютного равновесия по Нэшу в игре Г, если для любого* $z \in X$ *ситуация* $(u^*)^z = ((u_1^*)^z,...,(u_n^*)^z)$ *где* $(u_i^*)^z$ *- сужение стратегии* u_1^* *на подыгру* Γ_z *(т.е. игра на подграфе G основной игры), является ситуацией равновесия по Нэшу в подыгре* Γ_z .

Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 3.1. *В любой многошаговой игре с полной информацией на конечном древовидном графе существует ситуация абсолютного равновесия по Нэшу.*

Рассмотрим пример построения абсолютного равновесия по Нэшу.

Пример 3.1. Пусть игра Г происходит на графе, изображенном на рисунке 3.1, и пусть N = {1,2}. Определим множества очередности. Для этого изобразим вершины множества X_1 в виде кружков, а вершины множества X_2 - в виде квадратиков. Выигрыши игроков записаны в окончательных позициях.

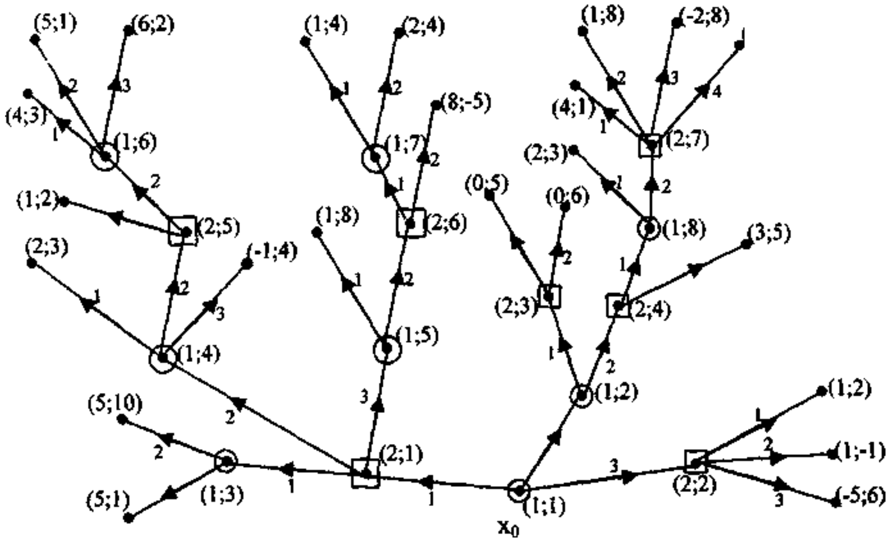

Рис. 3.1.

Перенумеруем двойными индексами позиции, входящие в множества X_1 и X_2, а дуги, выходящие из каждой вершины, – одним индексом. Выбор в вершине *x* эквивалентен выбору следующей вершины $x' \in F_x$, поэтому будем предполагать, что стратегии указывают в каждой вершине номер дуги, по которой следует двигаться дальше. Например, стратегия

$u_1 = (2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1)$ игрока 1 предписывает ему выбор дуги 2 в вершине 1, дуги 1 – в вершине 2 и т. д. Так как множество очередности игрока 1 состоит из восьми вершин, то его стратегия представляет собой восьмимерный вектор. Аналогично, любая стратегия игрока 2 представляет собой семимерный вектор.

Обозначим через v_1(x), v_2(x) выигрыши в подыгре Г, в некоторой фиксированной ситуации абсолютного равновесия. Сначала решаем под $Г_{1.6}$, $Г_{1.7}$, $Г_{2.7}$. Как легко убедиться, v_1 (1.6) = 6, v_2 (1.6) = 2, v_1 (1.7) = 2, v_2 (1.7) = 4 v_1(2.7) = l, v_2 (2.7) = 8. Далее решаем подагры $Г_{2.5}$, $Г_{2.6}$, $Г_{1.8}$. В подыгре $Г_{2.5}$ два равновесия но Нэшу, поскольку игроку 2 безразлично, какую альтернативу брать. Вместе с тем его выбор оказывается существенным для игрока 1, поскольку при выборе игроком 2 левой дуги игрок 1 выигрывает +1, а при выборе игроком 2 второй дуги +6. Отметим это обстоятельство и предположим, что игрок 2 “благожелателен” и выбирал в позиции (2.5) правую дугу. Тогда v_1(2.5) = v_1(1.6) = 6, v_2(2.5) = v_2(1.6) = 2, v_1(2.6) = v_1(1.7) = 2, v_2(2.6) = v_2(1.7) = 4, v_1(1.8) = 2, v_2(1.8) = 3. Далее решаем игры $Г_{1.3}$, $Г_{1.4}$, $Г_{2.3}$, $Г_{1.5}$, $Г_{2.4}$. В подыгре $Г_{1.3}$ два равновесия по Нэшу, поскольку игроку 1 безразлично, какую альтернативу выбрать. Вместе с тем его выбор оказывается существенным для игрока 2, так как при выборе игроком 1 левой альтернативы он выигрывает +1, а при выборе правой +10. Предположим, что игрок 1 “благожелателен” и выбирает в позиции (1.3) правую альтернативу. Тогда v_1(1.3) = 5, v_2(1.3) = 10, v_1(1.4) = v_1(2.5) = 6, v_2(1.4) = v_2(2.5) = 2, v_1(1.5) = v_1(2.6) = 2, v_2(l .5) = v_2(2.6) = 4, v_1(2.3) = 0, v_2(2.3) = 6, v_1(2.4) = 3, v_2(2.4) = 5. Далее решаем игры $Г_{2.1}$, $Г_{1.2}$, $Г_{2.2}$: v_1(2.1) = v_1(1.3) = 5, v_2(2.1) = v_2(1.3) = 10, v_1(l,2) = v_1(2.4) = 6, v_1(2.4) = 3, v_2(1.2) = v_2(2.4) = 5, v_1(2.2) = -5, v_2(2.2) = 6.Теперь решаем игру $Г = Г_{1.1}$. Здесь v_1(1.1) = v_1(2.1) = 5, v_2(1.1) = v_2(2.1) = 10.

В результате получаем ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу (u_1^*, u_2^*), где

$$u_1^* = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1), \quad u_2^* = (1, 3, 2, 2, 2, 1, 2). \qquad (3.1)$$

В ситуации (u_1^*, u_2^*) игра развивается по пути (1.1), (2.1), (1.3). В процессе построения отмечено, что стратегии u_i^*, i = 1, 2, “доброжелательны” в том смысле, что игрок i при совершении своего хода, будучи в равной степени заинтересован в выборе последующих альтернатив, выбирает ту из них, которая более благоприятна для другого игрока.

В игре Г существуют ситуации абсолютного равновесия, в которых выигрыши игроков будут другими. Для построения таких равновесий достаточно снять условие “доброжелательности” игроков и заменить его обратным условием “недоброжелательности”. Обозначим через $\overline{v_1}(x)$, $\overline{v_2}(x)$ выигрыши игроков в подыгре $Г_x$

при использовании игроками "недоброжелательного" равновесия. Тогда, проведя предыдущую процедуру построения абсолютного равновесия, имеем $\overline{v_1}(1.1) = \overline{v_1}(1.2) = 3$, $\overline{v_2}(1.1) = \overline{v_2}(1.2) = 5$. Получаем новую ситуацию равновесия по Нэшу

$$\overline{u_1^*} = (2, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1), \quad \overline{u_2^*} = (3, 3, 2, 2, 1, 1, 3). \tag{3.2}$$

Выигрыши обоих игроков в ситуации (3.2) меньше таковых в ситуации (3.1). Ситуация (3.2), так же как и ситуация (3.1), является ситуацией абсолютного равновесия.

Многошаговые игры с полной информацией определены на конечном древовидном графе, в котором каждый из игроков в момент совершения своего хода точно знает, в какой позиции или в какой вершине дерева он находится. Именно поэтому вводится понятие стратегии игрока i как однозначной функции u_i(x), которая определена на множестве очередности X_i со значениями в множестве F_x. Если же игроки при совершении своих выборов не знают точно позиции, в которой они совершают ход, или могут лишь предполагать, что эта позиция принадлежит некоторому подмножеству А множества очередности X_i, то реализация стратегии игрока как функции от $x \in X_i$, невозможна. Таким образом, желание усложнить информационную структуру игры неизбежно приведет к изменению понятия стратегии. Важную роль здесь играет понятие информационного множества. Проиллюстрируем это на примерах [12].

Пример 3.2. (Игра антагонистическая). Делая 1-й ход, игрок 1 выбирает число из множества $\{1,2\}$. Второй ход делает игрок 2. Зная выбор игрока 1, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. Третий ход опять делает игрок 1. Зная выбор игрока 2 и помня свой выбор, он выбирает число из множества $\{1,2\}$. На этом игра прекращается и игрок 1 получает выигрыш К, где функция определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &K(1,1,1) = -3, && K(2,1,1) = 4, \\ &K(1,1,2) = -2, && K(2,1,2) = 1, \\ &K(1,2,1) = 2, && K(2,2,1) = 1, \\ &K(1,2,2) = -5, && K(2,2,2) = 5. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Граф игры изображен на рисунке 3.2.

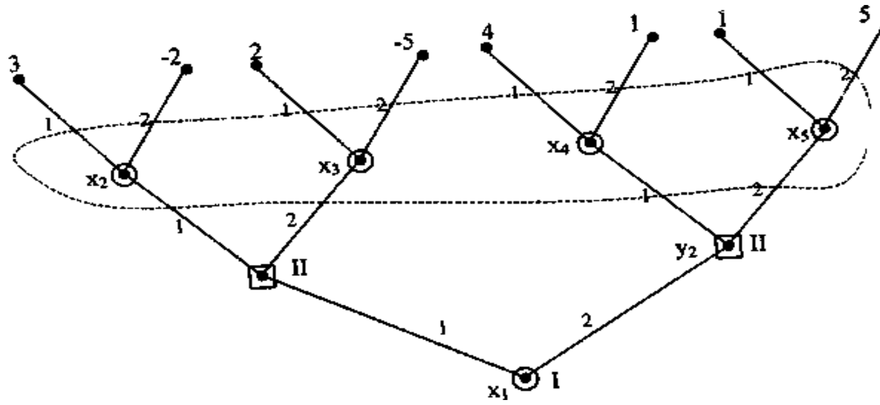

Рис. 3.2

Стратегия игрока 1 $u_1(.)$ задается пятимерным векторов $u_1(.) = \{u_1(x_1), u_1(x_2), u_1(x_3), u_1(x_4), u_1(x_5)\}$, предписывающим выбор одного из чисел {1,2} в каждой позиции множества *X*. Аналогично стратегия игрока 2 $u_2(.) = \{u_2(y_1), u_2(y_2), u_2(y_3), u_2(y_4), u_2(y_5)\}$ Таким образом, у игрока 1 в этой игре 32 стратегии, а у игрока 2-4 стратегии. Соответствующая нормальная форма игры имеет матрицу размера 32×4, которая имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях (это следует из теоремы 3.1). Можно убедиться, что значение рассматриваемой игры равно 4. Игрок 1 имеет четыре оптимальные чистые стратегии: (2,1,1,1,2), (2,1,2,1,2), (2,2,1,1,2), (2,2,2,1,2), у игрока 2 – две оптимальные стратегии: (1,1), (2,1).

Пример 3.3. Изменим информационные условия примера 3.2. Игра антагонистическая. Делая первый ход, игрок 1 выбирает число из множества {1,2}. Второй ход делает игрок 2. Зная выбор игрока 1, он выбирает число из множества {1,2}. Третий ход делает игрок 1. Не зная выбора игрока 2 и забыв свой выбор, он выбирает число из множества {1,2}. На этом игра прекращается и выигрыш определяется по формуле (3.3), так же как и в игре примера 3.2. Граф игры не изменяется, однако находясь в узлах x_2, x_3, x_4, x_5 (на 3-м ходе игры), игрок 1 не может определить, в каком из этих узлов он на самом деле находится, но, зная очередность хода (3-й ход), он уверен, что не находится в узле x_1. На рис. 3.2 обведем узлы x_2, x_3, x_4, x_5 пунктирной линией. Объединение этих узлов в одно множество иллюстрирует их неразличимость для игрока 1.

Множества, на которые разбиты узлы, называются информационными множествами.

Состояние информации игрока 2 не изменилось, поэтому множество его стратегий то же, что и в примере 3.2: (1,1), (1,2), (2,1) (2,2). Информационное состояние игрока 1 изменилось. На 3-м шаге игры он знает лишь номер этого шага, но не знает позиции, в которой находится. Поэтому он выбирает одно из двух чисел {1,2} независимо от реализовавшейся позиции. Его стратегия представляет собой пару чисел (i, j), $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\}$, где число i выбирается в позиции x_1, а число j на 3-м шаге одинаково во всех позициях x_2, x_3, x_4, x_5. Таким образом, $j = u(x_2, x_3, x_4, x_5)$.В данной игре у обоих игроков по четыре стратегии и матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

В этой игре нет ситуации равновесия в чистых стратегиях. Нижняя и верхняя цены игры $\underline{v} = 1$, $\overline{v} = 4$. По сравнению с примером 3.2 гарантированный выигрыш игрока 1 уменьшается. Это вызвано ухудшением информационного состояния.

Изменяя информационные условия, можно получить другие варианты игры примера 3.2.

Теперь приведем формальное определение многошаговой позиционной игры.

Определение 3.3. *Многошаговая позиционная игра* n *лиц* Γ *определяется:*

1) *заданием древовидного графа* G *с начальной вершиной* x_0*, называемой начальной позицией игры;*
2) *разбиением множества всех вершин* X *на* $n + 1$ *множество* $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$*, где* X_i *– множество очередности* i*-го игрока,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, а* $X_{n+1} = \{x\colon F_x = \varnothing\}$ *– множество окончательных позиций;*
3) *заданием вектор-функции* $K(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x))$ *на множестве* X_{n+1}*; функция* $h_i(x)$ *– называется выигрышем* i *-го игрока;*
4) *подразбиением каждого множества* X_i *на непересекающиеся подмножества* X_i^j *– называемые информационными множествами* i*-го игрока.*

§ 3.2. Иерархические игры

Важным подклассом неантагонистических многошаговых игр являются иерархические игры. Они моделируют конфликтно управляемые системы с иерархической структурой. Такая структура определяется последовательностью уровней управления, следующих друг за другом в порядке определенного приоритета. В математической постановке иерархические игры классифицируются по числу уровней и характеру вертикальных связей. Простейшей из них является двухуровневая система, схема которой изображена на рис. 3.3.

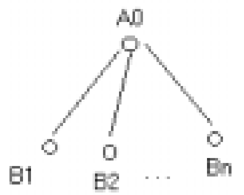

рис. 3.3

Двухуровневая конфликтно управляемая система функционирует следующим образом. Управляющий (координирующий)центр A_0 находящийся в первом уровне иерархии, выбирает вектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ из заданного множества управлений U, где u_i – управляющее воздействие центра на подчиненные ему подразделения B_i, $i = 1, 2,..., n$, находящиеся на втором уровне иерархии. В свою очередь, B_i, $i = 1, 2, ..., n$, выбирают управления $v_i \in V_i(u_i)$, где $V_i(u_i)$ – множество управлений подразделения B_i, предопределенное управлением u центра A_0. Таким образом, управляющий центр имеет право первого хода и может ограничивать возможности подчиненных ему подразделений, направляя их действия в нужное русло. Цель центра A_0 заключается в максимизации по u функционала $K_0(u, v_1, ..., v_n)$, а подразделения B_i, $i = 1, 2,..., n$, обладая собственными целями, стремятся максимизировать по v_i, функционалы $K_i(u_i, v_i)$.

Формализуем эту игру как бескоалиционную игру Г (n+1) -го лица (административного центра A_0 и производственных подразделений $B_1,..., B_n$) в нормальной форме.

Пусть игрок A_0 выбирает вектор $u \in U$, где

$$U = \left\{ u = (u_1, ..., u_n) : u_i \geq 0, u_i \in R^l, i = 1, ..., n, \sum_{i=1}^{n} u_i \leq b \right\} -$$

множество стратегий. Вектор u_i интерпретируется как набор ресурсов l наименований, выделяемых центром A_0 для 1-го производственного подразделения, b – общее количество ресурсов.

Каждый из игроков B_i, зная выбор A_0, выбирает вектор $v_i \in V_i(u_i)$, где

$$V_i(u_i) = \left\{ v_i \in R^m : v_i A_i \leq u_i + \alpha_i, v_i \geq 0 \right\} \tag{3.4}$$

Вектор v_i, интерпретируется как производственная программа i-го производственного подразделения по различным видам продукции; A_i –производственная или технологическая матрица i-го производственного подразделения ($A_i \geq 0$); α_i – вектор наличных собственных ресурсов i-го производственного подразделения ($\alpha_i \geq 0$).

Под стратегиями игрока B_i, в игре Г понимают множество функций $v_i(.)$, ставящих в соответствие каждому элементу u_i $:(u_l,...,u_i,..., u_n) \in U$ вектор $v_i(u_i) \in V_i(u_i)$. Множество таких функций обозначают через V_i, i = l,..., n.

Для игрока A_0 функция выигрыша имеет вид

$$K_0(u, v_1(.),...,v_n(.)) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i(u_i),$$

где $a_i \geq 0, a_i \in R^m$ – фиксированный вектор, i = l,..., n; $a_i v_i(u_i)$ – скалярное произведение векторов a_i и $v_i(u_i)$. Функция выигрыша игрока B_i

$$K_i(u, v_i(.),...,v_n(.)) = c_i v_i(u_i),$$

где $c_i \geq 0, c_i \in R^m$ – фиксированный вектор, i = l,..., n.

Таким образом, игра Г имеет вид

$$\Gamma = (U, V_1,...,V_n, K_0, K_1,...,K_n).$$

Построим ситуацию равновесия по Нэшу в игре Г.

Пусть – решение задачи параметрического линейного программирования (параметром является вектор u_i)

$$\max_{v_i \in V_i(u_i)} c_i v_i = c_i v_i^*(u_i), i = 1,...,n, \tag{3.5}$$

а $u^* \in U$ – решение задачи

$$\max_{u \in U} K_0(u, v_1^*(.),...,v_n^*(.)). \tag{3.6}$$

Предположим, что максимумы в (3.5) и (3.6) достигаются. Заметим, что (3.6) – задача нелинейного программирования с существенно разрывной целевой функцией (максимизация ведется по u, а $v_i^*(u_i)$, вообще говоря, – разрывные функции параметра u_i). Покажем, что точка является ситуацией равновесия в игре Г. Действительно,

$$K_0(u^*, v_1^*(.),...,v_n^*(.)) \geq K_0(u^*, v_1^*(.),...,v_n^*(.)), u \in U.$$

Далее, при всех i = l,..., n справедливо неравенство

$$K_i(u^*, v_1^*(.),...,v_n^*(.)) = c_i v_i^*(u_i^*) \geq c_i v_i(u_i^*) = K_i(u^*, v_1^*(.),...,v_{i-1}^*(.), v_i(.), v_{i+1}^*(.),...,v_n^*(.))$$

для любого $v_i(.) \in V_i$ v,(.). Таким образом, никому из игроков A_0, B_1, ..., B_n невыгодно в одностороннем порядке отклоняться от ситуации $(u^*, v_i^*(.),...,v_n^*(.))$, т. е. она является равновесной. Эта ситуация также устойчива против отклонения от нее любой коалиции $S \subset \{B_1,...,B_n\}$, поскольку выигрыш Кi, i-го игрока не зависит от стратегии $v_j(.), j \in \{1,...,n\}, j \neq i$.

§ 3.3. Смешанные расширения. Основная теорема матричных игр.

В общем случае антагонистическая игра (даже матричная) не имеет цены. В такой ситуации решающим становится вопрос информированности игроков о выборе противника. Без его конкретизации нельзя определить решение игры. Различные варианты уточнения информированности приводят к расширению множеств стратегий. Одним из наиболее традиционных подходов является введение случайности в выбор игроков. При этом считается, что конкретный выбор каждого игрока не может быть известным противнику.

Если множество чистых стратегий игрока U состоит из конечного числа точек $u_1, \ldots, u_n$, то **смешанной стратегией** называется вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$, где p_i – вероятность выбора чистой стратегии u_i, $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Формально чистую стратегию можно рассматривать как смешанную стратегию, задаваемую вектором, i-я компонента которого равна 1, а все остальные - 0, поэтому множество чистых стратегий является подмножеством множества смешанных стратегий. Множество $S_n = \left\{ p = (p_1, \ldots, p_n) / p_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$ называется **n-мерным симплексом**. Если ассоциировать U с единичными векторами (вершинами симплекса), то $U \subset S_n$, т. е. множество смешанных стратегий представляет собой расширение множества чистых стратегий.

Рассмотрим общую матричную игру

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{Vmatrix} \qquad (3.7)$$

Введем смешанные стратегии для обоих игроков. Смешанной стратегией игрока 1 в матричной игре (3.7) является вектор

$$p = (p_i, \ldots, p_n), p_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

где p_i - вероятность выбора i-й чистой стратегии ($i = \overline{1,n}$);

смешанной стратегией игрока 2 – вектор

$$q = (q_i, \ldots, q_m), q_j \geq 0, j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1,$$

где q_j - вероятность выбора j -й чистой стратегии ($j=\overline{1,m}$).

Функция выигрыша игрока 1 как математическое ожидание в соответствии с формулами теории вероятностей имеет вид

$$h(p,q)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_iq_j=\langle p,Aq\rangle. \qquad (3.8)$$

Множество смешанных стратегий игрока 1

$$S_n=\left\{p=(p_1,...,p_n)\,|\,p_i\geq 0, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right\}. \qquad (3.9)$$

Множество смешанных стратегий игрока 2

$$S_m=\left\{q=(q_1,...,q_m)\,|\,q_j\geq 0,\ j=\overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m}q_j=1\right\}. \qquad (3.10)$$

Совокупность $\{S_n,S_m,h(p,q)\}$ называется **смешанным расширением матричной игры**. Чистые стратегии игроков являются подмножествами множеств смешанных стратегий (вершинами симплексов S_n и S_m). Выбору i-й чистой стратегии соответствует вектор p с компонентами $p_i = 1$, $p_k = 0$, $k \neq i$ (аналогично для игрока 2). Функция h на множествах чистых стратегий принимает значение a_{ij}.

В смешанных стратегиях **нижней ценой матричной игры** называется величина

$$\max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m}h(p,q), \qquad (3.11)$$

верхней ценой – величина

$$\min_{q\in S_m}\max_{p\in S_n}h(p,q), \qquad (3.12)$$

Докажем, что нижняя и верхняя цены матричной игры в смешанных стратегиях всегда равны между собой (их общее значение v называется **ценой матричной игры**). Достижимость нижних и верхних граней в (3.11), (3.12) вытекает из непрерывности функции $h(p,q)$ на компактах S_n, S_m и непрерывности функций $\min\limits_{q\in S_m}h(p,q)$ и $\max\limits_{p\in S_n}h(p,q)$.

Теорема 3.2 (основная теорема матричных игр фон Неймана). Любая матричная игра имеет цену (в смешанных стратегиях), а игроки имеют оптимальные смешанные стратегии, т. е.

$$v=\max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m}h(p,q)=\min_{q\in S_m}\max_{p\in S_n}h(p,q)=\min_{q\in S_m}h(p^\circ,q)=\max_{p\in S_n}h(p,q^\circ)=h(p^\circ,q^\circ) \qquad (3.13)$$

Доказательство. Согласно теореме о необходимых и достаточных условиях существования седловой точки утверждение данной теоремы эквивалентно утверждению о существовании седловой точки у функции $h(p,q)$ на $S_n \times S_m$. Последнее вытекает из теоремы о существования седловой точки у вогнуто-выпуклой функции. Действительно, множества S_n и S_m являются, очевидно, выпуклыми замкнутыми ограниченными подмножествами пространств R^n и R^m, функция $h(p,q)$ непрерывна по p, q и линейна по p, q, и, следовательно, является вогнуто-выпуклой. Таким образом, выполнены все условия теоремы о существовании седловой точки у вогнуто-выпуклой функции и существует такая точка (p°, q°), что $h(p,q^\circ) \le h(p^\circ,q^\circ) \le h(p^\circ,q) \quad \forall p,q$. Из теоремы о необходимых и достаточных условиях существования седловой точки вытекает, что p° реализует $\max\limits_{p\in S_n}\min\limits_{q\in S_m} h(p,q)$, q° реализует $\min\limits_{q\in S_m}\max\limits_{p\in S_n} h(p,q)$, и нижняя и верхняя цены игры в смешанных стратегиях равны между собой, что и требовалось доказать.

§ 3.4. Свойства оптимальных стратегий матричных игр.

Рассмотрим некоторые свойства оптимальных стратегий матричных игр, необходимые в дальнейшем для обоснования методов решения.

В следующих теоремах формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности стратегий.

Теорема 3.3. *Пусть v – цена матричной игры, тогда для того, чтобы* p° *была оптимальной стратегией игрока 1, необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(p^\circ,q) \ge v \quad \forall q \in S_m \tag{3.14}$$

Аналогично, для того, чтобы q° *была оптимальной стратегией игрока 2, необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(p,q^\circ) \le v \quad \forall p \in S_n \tag{3.15}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть p° – оптимальная стратегия, т.е.

$$\min_{q\in S_m} h(p^\circ,q) = \max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m} h(p,q) = v,$$

отсюда следует (3.14).

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (3.14), тогда

$$\min_{q\in S_m} h(p^\circ,q) \ge v = \max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m} h(p,q),$$

откуда

$$\min_{q\in S_m} h(p^{\circ},q) = \max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m} h(p,q),$$

т.е. p° – оптимальная стратегия.

Доказательство для игрока 2 аналогично.

Далее понадобятся обозначения

$$h(i,q) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \tag{3.16}$$

$$h(p,j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \tag{3.17}$$

Выражение (3.16) представляет собой выигрыш игрока 1 при использовании им i-й чистой стратегии, тогда как игрок 2 использует смешанную стратегию q; выражение (3.17) – выигрыш игрока 1 при использовании им смешанной стратегии p, тогда как игрок 2 использует чистую j-ю стратегию.

Следствие. *Пусть v – цена матричной игры, тогда для того, чтобы p° была оптимальной стратегией игрока 1, необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(p^{\circ},j) \ge v,\ j = \overline{1,m} \tag{3.18}$$

Аналогично, для того, чтобы q° была оптимальной стратегией игрока 2, необходимо и достаточно, чтобы

$$h(i,q^{\circ}) \le v, i = \overline{1,n} \tag{3.19}$$

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из теоремы 3.3, так как множество чистых стратегий является подмножеством множества смешанных стратегий.

Для доказательства **достаточности** возьмем произвольную смешанную стратегию q игрока 2, умножим неравенства (3.18) на соответствующие компоненты вектора q и сложим полученные неравенства. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} h(p^{\circ},j) q_j \ge v \sum_{j=1}^{m} q_j = v,$$

но

$$\sum_{j=1}^{m} h(p^{\circ},j) q_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i^{\circ} q_j = h(p^{\circ},q),$$

значит выполнено (3.14) и p° – оптимальная стратегия.

Доказательство для игрока 2 аналогично.

Теорема 3.4. *Для того, чтобы v было ценой игры, а p° и q° – оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$h(p,\ q^{\circ}) \leq\ v \leq\ h(\ p^{\circ},q) \quad \forall p,q \tag{3.20}$$

Доказательство. Необходимость. Если v – цена игры, а p° и q° – оптимальные стратегии, то $(\ p^{\circ}, q^{\circ})$ – седловая точка функции и h по основной теореме матричных игр $h(\ p^{\circ}, q^{\circ}) = v$, откуда следует (3.20).

Достаточность. Положим в левой части неравенства (3.20) $p = p^{\circ}$, а в правой части $q = q^{\circ}$. Тогда $h(\ p^{\circ}, q^{\circ}) \leq v \leq h(\ p^{\circ}, q^{\circ})$, откуда $h(\ p^{\circ}, q^{\circ}) = v$. Подставив в (3.20) вместо v равное ему значение $h(\ p^{\circ}, q^{\circ})$, получим, что $(\ p^{\circ}, q^{\circ})$ является седловой точкой функции h. Значит по основной теореме матричных игр p°, q° – оптимальные стратегии, v – цена игры.

Следствие. *Для того, чтобы v было ценой игры, а p°, q° – оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно, чтобы*

$$h(i,\ q^{\circ}) \leq\ v \leq\ h(\ p^{\circ},\ j) \quad \forall i,\ j$$

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 3.3.

Теорема 3.5 (о свойствах оптимальных стратегий). *Пусть p° и q° – произвольные оптимальные стратегии, а v – цена игры. Тогда, если $p_i^{\circ} > 0$, то $h(i,\ q^{\circ}) = v$; если $q_j^{\circ} > 0$, то $h(\ p^{\circ},\ j) = v$. Кроме того, имеют место равенства*

$$\min_{1\le j\le m} h(p^{\circ}, j) = \max_{p\in S_n}\min_{1\le j\le m} h(p, j) = \min_{q\in S_m}\max_{1\le i\le m} h(i,q) = \max_{1\le i\le n} h(i,q^{\circ}) = v\,. \tag{3.21}$$

Доказательство. Так как q° – оптимальная стратегия, v – цена игры, то согласно (3.1 9) имеем $h(i,q^{\circ}) \le v, i = \overline{1,n}$.

Предположим противное: существует такое i_1, что $p_i^{\circ} > 0$, $h(i,\ q^{\circ}) < v$, тогда $p_{i_1}^{\circ} h(i_1,q^{\circ}) < p_{i_1}^{\circ} v; \quad p_{i_1}^{\circ} h(i_1,q^{\circ}) \le p_i^{\circ} v; \quad \forall i \ne i_1$.

Суммируя эти неравенства с учетом того, что одно из них строгое, получим

$$\sum_{i=1}^{n} h(i,q^{\circ}) p_i^{\circ} = h(\ p^{\circ}, q^{\circ}) < \sum_{i=1}^{n} v p_i^{\circ} = v\,.$$

Пришли к противоречию, так как $(\ p^{\circ}, q^{\circ})$ – седловая точка и $h(\ p^{\circ}, q^{\circ}) = v$. Аналогично доказывается утверждение если $q_j^{\circ} > 0$, то $h(\ p^{\circ},\ j) = v$.

Далее имеем

$$h(p,\ q) = \sum_{j=1}^{m} h(p, j) q_j \ \ge \sum_{j=1}^{n} \left[\min_{1\le j\le m} h(p, j)\right] q_j = \min_{1\le j\le m} h(p, j) \sum_{j=1}^{m} q_j = \min_{1\le j\le m} h(p, j) \quad \forall q,$$

поэтому $\min\limits_{q\in S_m} h(p,q) \geq \min\limits_{1\leq j\leq m} h(p,j)$.

С другой стороны, так как множество чистых стратегий является подмножеством множества смешанных стратегий, то $\min\limits_{q\in S_m} h(p,q) \geq \min\limits_{1\leq j\leq m} h(p,j)$.

Следовательно,

$$\min_{q\in S_m} h(p,q) = \min_{1\leq j\leq m} h(p,j),$$

откуда

$$\max_{p\in S_n}\min_{1\leq j\leq m} h(p,j) = \max_{p\in S_n}\min_{q\in S_m} h(p,q) = \mathrm{v} = \min_{q\in S_m} h(\overset{\circ}{p},q) = \min_{1\leq j\leq m} h(\overset{\circ}{p},j).$$

Аналогично доказываются и остальные равенства (3.21).

Следствие. *Если существует цена игры в чистых стратегиях, то она совпадает с ценой игры в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Пусть $\underline{v} = \max\limits_{1\leq i\leq n}\min\limits_{1\leq j\leq m} a_{ij} = \overline{v} = \min\limits_{1\leq j\leq m}\max\limits_{1\leq i\leq n} a_{ij}$.

Так как

$$\max_{1\leq i\leq n}\min_{1\leq j\leq m} a_{ij} \leq \max_{p\in S_n}\min_{1\leq j\leq m} h(p,j) = \underline{v}$$

и

$$\min_{1\leq j\leq m}\max_{1\leq i\leq n} a_{ij} \geq \min_{q\in S_m}\max_{1\leq i\leq m} h(i,q) = \overline{v},$$

то всегда $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$, где v – цена игры в смешанных стратегиях. Из равенства $\underline{v} = \overline{v}$ следует, что $\underline{v} = v = \overline{v}$, что и требовалось доказать.

Определение 3.4. *Вектор* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *доминирует вектор* $\beta = (\beta_1,\ldots, \beta_n)$, *если* $\alpha_i \geq \beta_i$, $i = \overline{1,n}$, *и строго доминирует, если* $\alpha_i > \beta_i$, $i = \overline{1,n}$. *Некоторая линейная комбинация векторов* $\alpha^1,\ldots, \alpha^k$ *доминирует (строго доминирует) вектор* β, *если существуют такие числа* $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$, *что вектор* $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha^i$ *доминирует (строго доминирует) вектор* β. *При этом говорят, что вектор* β *доминируется вектором* α *или линейной комбинацией.*

Теорема 3.6 (принцип доминирования). *Если* i_0*-я строка матрицы игры доминируется некоторой линейной комбинацией остальных строк, то существует такая оптимальная стратегия* $\overset{\circ}{p}$ *игрока 1, что* $\overset{\circ}{p}_{i_0} = 0$. *Если* i_0*-я строка строго доминируется некоторой линейной комбинацией остальных строк, то для любой оптимальной* *стратегии* p° *игрока 1 выполняется* $p^\circ_{i_0}$ *= 0. Аналогично, если* j_0*-й столбец матрицы игры доминирует (строго доминирует) некоторую линейную комбинацию остальных столбцов, то существует такая (любая) оптимальная стратегия* q° *игрока 2, что* $q^\circ_{j_0}$ *=0.*

Доказательство. Пусть сначала доминирование нестрогое, а p^* – произвольная оптимальная стратегия игрока 1, тогда $\alpha(p^*, j) \geq v \quad \forall j$. По условию существуют такие $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, что $a_{i_0 j} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij}$, $j = \overline{1,m}$ $(\lambda_{i_0} = 0)$.

Введем вектор p° с компонентами $p^\circ_i = p^*_i + \lambda_i p^*_{i_0}, i \neq i_0$, $p^\circ_{i_0} = 0$.

Тогда

$$h(p^\circ, q) = \sum_{i \neq i_0} a_{ij} p^*_i + p^*_{i_0} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \geq \sum_{i \neq i_0} a_{ij} p^*_i + p^*_{i_0} a_{i_0 j} = h(p^*, j) \geq v \quad \forall j$$

Следовательно, p° – оптимальная стратегия, для которой $p^\circ_{i_0} = 0$. Пусть теперь доминирование строгое, т.е. существуют такие $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_{i_0} = 0$, что

$$a_{i_0 j} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij}, \quad j = \overline{1,m} \tag{3.22}$$

Пусть q° – произвольная оптимальная стратегия игрока 2. Умножим неравенства (3.22) на q°_j и сложим. Так как хотя бы одно $q^\circ_j > 0$, то

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} q^\circ_j < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_i q^\circ_j \leq \max_{p \in S_n} h(p, q^\circ) = v$$

Значит $h(i_0, q^\circ) < v$, откуда по теореме о свойствах оптимальных стратегий для любой оптимальной стратегии p° игрока 1 выполняется равенство $p^\circ_{i_0} = 0$.

Аналогично доказательство для игрока 2.

В соответствии с принципом доминирования при решении матричной игры (нахождении цены и оптимальных стратегий) можно предварительно вычеркивать доминируемые строки и доминирующие столбцы, сокращая размерность задачи.

§ 3.5. Свойства равновесия

В настоящее время выбор ситуации равновесия по Нэшу наиболее широко используется в теории игр. Это объясняется, по крайней мере, тремя причинами:

1) равновесный принцип оптимальности является, по-видимому, наиболее естественным с содержательной точки зрения "симметричным" принципом оптимальности и наиболее часто используется в прикладных исследованиях;

2) он сравнительно прост, но в тоже время обладает рядом существенных свойств, присущих другим, более сложным принципам оптимальности;

3) для ряда задач исследования операций (например, для иерархических игр) решение можно свести к изучению ситуации равновесия в некоторой вспомогательной игре.

Напомним определение понятия равновесия. Пусть

$$\Gamma = \langle \{1, \ldots, n\}, U_1, \ldots, U_n, g_1, \ldots, g_n \rangle \text{ – игра в нормальной форме.}$$

Определение 3.5. *Ситуация $u = (u_1, \ldots, u_n)$ является ситуацией равновесия тогда и только тогда, когда для любого i и любой стратегии $v_i \in U_i$, i-го игрока имеет место неравенство*

$$g_i(u_1,\ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1},\ldots, u_n) \le g_i(u_1,\ldots, u_n).$$

Дадим содержательную интерпретацию введенного понятия. Наиболее естественно этот принцип оптимальности выглядит при следующих обстоятельствах. Участники конфликта собираются вместе и каким-то образом выбирают приемлемую для всех ситуацию. Заключив необязательное соглашение придерживаться этой ситуации, игроки расходятся и каждый принимает окончательное решение о выборе своего управления, предполагая, что остальные участники конфликта соблюдают условия соглашения. Выбранная в начале ситуация является равновесной по Нэшу, если ни одному из игроков не выгодно в одиночку отклоняться от нее. Таким образом, ситуации равновесия по Нешу – это те ситуации, которые устойчивы к отклонениям отдельных игроков. Игрок, отклоняющийся от ситуации равновесия, оказывается в положении «унтер-офицерской вдовы». Правда, следует заметить, что при этом могут пострадать и окружающие.

Отметим, что, с одной стороны, равновесность ситуации гарантирует устойчивость только по отношению к отклонениям отдельных игроков. Два или несколько игроков, объединившись в коалицию, могут увеличить свои выигрыши, уменьшив при этом выигрыши остальных участников конфликта, т. е. этот принцип оптимальности не учитывает возможности создания коалиций.

С другой стороны, ситуация равновесия не может быть результатом изолированных действий игроков. В нашей интерпретации мы предполагали возможность у игроков собраться вместе и выбрать некоторую ситуацию. Наличие такой возможности является принципиально важным моментом.

Переходя к обсуждению математических свойств ситуаций, отметим следующее. Задача исследования ситуаций равновесия формально усложняется при увеличении числа игроков. Однако качественное усложнение этой задач при переходе от игр двух лиц к играм трех лиц наблюдается только в достаточно сложных ситуациях, например, при рассмотрении динамических игр. Качественного усложнения задачи при дальнейшем увеличении числа игроков вообще не происходит. Поэтому в дальнейшем большинство теорем будет формулироваться для общего случая игр n лиц, а примеры будут играми двух лиц.

Пусть $u = (u_1,\dots, u_n)$ – некоторая ситуация в игре Г и v_i стратегия i-го игрока в той же игре. Тогда $(u||Vi)$ будет обозначать ситуацию в игре Г:

$$(u|Vi) = (u_1,\dots, u_{i-1}, v_1, u_{i+1},\dots, u_n).$$

Рассмотрим свойства ситуаций равновесия для случая антагонистической игры, когда критерий игрока 2 $g_2(u_1, u_2) = -g_1(u_1, u_2)$. Определение ситуации равновесия дает два условия:

(u_1, u_2) – ситуация равновесия тогда и только тогда, когда

$$g_1(v_1, u_2) \le g_1(u_1, u_2)$$

и

$$g_2(u_1, v_2) \le g_2(u_1, u_2)$$

для любых v_1 и v_2.

Второе условие дает $g_1(u_1, v_2) \ge g_2(u_1, u_2)$.

Отсюда следует, что (u_1, u_2) – седловая точка функции g_1.

Можно проверить, что всякая седловая точка является ситуацией равновесия.

Таким образом, в антагонистической игре седловые точки и только они являются ситуациями равновесия. Выбор седловой точки (если они существуют) является единственным разумным решением. Но ситуации равновесия, так же как и седловые точки, существуют не всегда. Если же ситуация равновесия существует, то она может оказаться не единственной.

Пример 3.1 (семейный спор). Семейная пара решает вопрос, как провести свободный вечер. Игрок 1 (муж) предпочитает футбольный матч, а игрок 2 (жена) – балет. Однако обоим существенно интереснее провести вечер вдвоем, нежели порознь.

Ситуация описывается биматричной игрой:

	Ф	Б
Ф	(2; 1)	(-1; -1)
Б	(-1; -1)	(1; 2)

В этой игре есть две ситуации равновесия: (Ф, Ф) и (Б, Б), причем выигрыши игроков в них заметно отличаются. Равновесные стратегии не взаимозаменяемы, поэтому ситуации равновесия не могут быть реализованы как результат индивидуальных (независимых) действий игроков.

Предположим, что оба игрока стремятся к ситуации равновесия, но не могут договориться заранее о выборе одной из них. Тогда игрок 1 может выбрать свою равновесную стратегию Ф, а игрок 2 – другую равновесную стратегию Б. В результате вместо ситуации равновесия игроки получат ситуацию, в которой оба игрока имеют минимальный выигрыш.

Рассмотренная игра симметрична, поэтому на ее примере особенно хорошо видно еще одно достоинство нашего принципа оптимальности – его «справедливость». Принцип оптимальности дает два решения: одно выгоднее для игрока 1, другое - для игрока 2, но в целом ни один из игроков не обижен. В других играх множество ситуаций равновесия не столь симметрично и выигрыши у одного из игроков в ситуациях равновесия могут быть гораздо выше, чем у другого, но это будет результатом разницы возможностей игроков, а отнюдь не несправедливости принципа оптимальности.

Ответ на вопрос, насколько хорошие выигрыши получают игроки в ситуациях равновесия неоднозначен.

Пример 3.4 (дилемма заключенного). Два подозреваемых взяты под стражу и изолированы один от другого. Каждый имеет две возможности: признаться (П) в инкриминируемом им преступлении или нет (Н).

Если один из игроков признается в преступлении, то второй будет сразу освобожден, и вся тяжесть вины ляжет на первого.

Если оба не признаются, то они будут освобождены за недоказанностью, но по прошествии достаточно длительного времени.

Если же оба признаются, то на каждого ляжет только часть вины, хотя и оба будут наказаны.

Ситуация описывается биматричной игрой:

	П	Н
П	(1; 1)	(3; 0)
Н	(0; 3)	(2; 2)

В этой игре одна ситуация равновесия (П, П). Однако она не слишком хороша: если игроки выберут ситуацию (Н, Н), то выигрыши обоих будут улучшены. Мы видим, что в этой игре множество паретооптимальных точек и множество ситуаций равновесия не пересекаются. Таким образом, коллективной рациональности от ситуаций равновесия ожидать, вообще говоря, не приходится.

Однако индивидуальная рациональность имеет место. *Исход u называется индивидуально рациональным, если для любого i справедливо неравенство*

$$g_i(u) \geq \max_{w_i \in U_i} \min_{v \in U} g_i(v \| w_i)$$

где минимум берется по всем ситуациям $v \in U_1 \times \ldots \times U_n = U$ *; величина* L_i *– максимальный гарантированный результат, который может обеспечить себе i-й игрок, независимо от действий партнеров.*

Лемма 3.1. *Всякий равновесный исход u индивидуально рационален.*

Доказательство. Согласно определению ситуации равновесия, для любого i и любой стратегии w_i имеем неравенство

$$g_i(u) \geq g_i(u \| w_i) \geq \min_{v \in U} g_i(v \| w_i).$$

Так как w_i выбирается произвольно, то $g_i(u) \geq \max_{w_i \in U_i} \min_{v \in U} g_i(v \| w_i)$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждения, дающие необходимые и достаточные условия равновесия.

Лемма 3.2. В игре n лиц Г существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда

$$J = \min_{(u_1,\ldots,u_n) \in U} \max_{1 \leq i \leq n} \max_{v_i \in U_i} \left[g_i(u \| v_i) - g_i(u) \right] = 0.$$

Доказательство. Очевидно, что для любых *i* и *u*

$$\max_{v_i \in U_i} \left[g_i(u \| v_i) - g_i(u) \right] > 0.$$

Значит $J \geq 0$.

Пусть в игре Г существует ситуация равновесия u. Тогда для любого *i* и любой стратегии v_i имеет место неравенство

$$g_i(u \| v_i) - g_i(u) \leq 0,$$

т.е.

$$\max_{1\le i\le n}\max_{v_i\in U_i}\left[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\right]\le 0 .$$

Тогда тем более $J \le 0$. Итак, если существует ситуация равновесия u, то $J = 0$.

Обратное. Пусть $J = 0$ и ситуация u реализует минимум в определении J. Тогда

$$\max_{1\le i\le n}\max_{v_i\in U_i}\left[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\right]= 0 .$$

Отсюда следует, что для любого i и любой стратегии v_i

$$g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\le 0 ,$$

т.е. u является ситуацией равновесия, что и требовалось доказать.

Согласно этой лемме задача поиска ситуаций равновесия сводится к вычислению минимакса, т.е. игра n лиц сводится к игре двух лиц, правда за счет усложнения (увеличения размерности) пространств стратегий.

Следующая лемма, в отличие от леммы 3.2, сохраняет хорошие аналитические свойства функций и поэтому удобнее в тех случаях, когда такие хорошие свойства есть. В более сложных ситуациях оказывается удобнее лемма 3.2.

Лемма 3.3. *В игре n лиц Г существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда*

$$J = \min_{(u_1,\dots,u_n)\in U}\ \max_{(v_1,\dots,v_n)\in V}\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\right]= 0 .$$

Доказательство. Преобразуем выражение для J. Так как $[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)]$ не зависит от v_j при $j\neq i$, то

$$J = \min_{(u_1,\dots,u_n)\in U}\sum_{i=1}^{n}\max_{v_i\in U_i}\left[g_i(u\|v_i)-g_i(u)\right],$$

но так как

$$\max_{v_i\in U_i}\left[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\right]\ge 0 ,$$

то всегда $J \ge 0$.

Пусть $J = 0$; u – ситуация, реализующая минимум в определении J.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\max_{v_i\in U_i}\left[g_i(u\,\|\,v_i)-g_i(u)\right]= 0 .$$

Так как все слагаемые здесь неотрицательны, то равенство суммы нулю возможно только тогда, когда каждое из них равно нулю, т.е.

$$\max_{v_i \in U_i}[g_i(u \| v_i) - g_i(u)] = 0$$

для любого i. Это значит, что для любой стратегии v_i; справедливо неравенство

$$g_i(u \| v_i) - g_i(u) \le 0,$$

т.е. u – ситуация равновесия.

Обратно, если u – ситуация равновесия, то

$$\sum_{i=1}^{n} \max_{v_i \in U_i}[g_i(u \| v_i) - g_i(u)] = 0,$$

так как каждое из слагаемых равно нулю. Но тогда $J < 0$, что в сочетании с уже доказанным неравенством $J \ge 0$ дает $J = 0$. Лемма доказана.

§ 3.6. Существование ситуаций равновесия в чистых и смешанных стратегиях.

Приведем доказательства двух классических теорем. Одна из них дает достаточные условия существования равновесия для непрерывных игр, другая в какой-то степени решает проблему существования для дискретных игр.

В основу доказательства обеих теорем положена теорема Л. Э. Брауэра о неподвижной точке,

Теорема 3.7. *Пусть X – компактное выпуклое множество из конечномерного евклидова пространства и пусть непрерывная функция f переводит X в X. Тогда существует точка $x \in X$ такая, что f(x)=x.*

Рассмотрим игру n лиц в нормальной форме:

$$\Gamma = <\{1, \ldots, n\}, U_1, \ldots, U_n, g_1, \ldots, g_n>$$

Игра Γ называется выпуклой, если выполнены следующие три условия:

1) для любого i множество U_i есть компактное выпуклое подмножество конечномерного евклидова пространства;

2) функции g_i ($i = \overline{1,n}$) непрерывны по совокупности своих аргументов;

3) при любом i и любых фиксированных значениях $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ функция g_i $(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ вогнута по аргументу v_i.

Лемма 3.4. *Пусть $U = U_1 \times \ldots \times U_n$. Определим функцию $G: U \times U \to R$, положив*

$$G(u, v) = \sum_{i=1}^{n} g_i(u \| v_i)$$

Для того, чтобы в игре Г существовала ситуация равновесия, достаточно, чтобы существовала точка $u \in U$ такая, что

$$G(u, u) \geq G(u, v) \qquad (3.23)$$

для любого $v \in U$.

Доказательство. Так как неравенство (3.23) справедливо для любого v, то оно справедливо и для $v = (u||w_i)$, где i и $w_i \in U_i$ произвольны. Но для такого v имеем

$$G(u, v) = \sum_{k \neq i} g_k(u) + g_i(u \| w_i) .$$

Очевидно,

$$G(u, u) = \sum_{k=1}^{n} g_k(u) ,$$

поэтому неравенство (3.23) в случае $v = (u|| w_i)$ равносильно неравенству

$$g_i(u) \geq g_i(u \| w_i) .$$

Поскольку i и w_i произвольны, то u – ситуация равновесия. Лемма доказана.

Теорема 3.8. *Всякая выпуклая игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия.*

Доказательство приводить не будем (см. [12]), а проиллюстрируем теорему на примере.

Рассмотрим игру двух лиц, в которой множество стратегий каждого игрока есть отрезок. В этом случае множество ситуаций представляет собой прямоугольник.

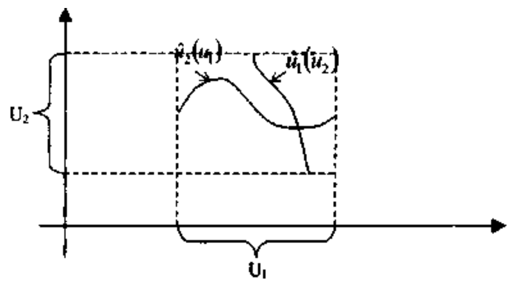

Рис. 3.4

Для каждого $u_1 \in U_1$ существует, по крайней мере, одна точка $\hat{u}_2(u_1)$ такая, что

$$g_2(u_1, \hat{u}_2(u_1)) = \max_{u_2 \in U_2} g_2(u_1, u_2) .$$

Аналогично, для каждого $u_2 \in U_2$ найдется точка $\hat{u}_1(u_2)$ такая, что

$$g_2(\hat{u}_1(u_2), u_2) = \max_{u_1 \in U_1} g_1(u_1, u_2) .$$

Если функции и непрерывны, то очевидно, что их графики пересекаются. Точка пересечения будет ситуацией равновесия.

Можно показать, что если функция g_1 строго вогнута по первому аргументу, то функция , определена однозначно и непрерывна. Аналогично, если функция g_2 строго вогнута по второму аргументу, то функция определена однозначно и непрерывна. Если функции g_1 и g_2 вогнуты, но не строго, то ситуация оказывается несколько более сложной, но некоторый аналог непрерывности все же будет иметь место.

Теорема 3.8 накладывает на рассматриваемую игру довольно жесткие условия. В частности, предположение о выпуклости множества U_i выводит из рассмотрения целый класс конечных игр. Во многих случаях ситуации равновесия могут отсутствовать. Как и в случае антагонистических игр, ситуацию удается подправить переходом к смешанному расширению игры. В общем случае для этого требуется сложный математический аппарат, поэтому мы рассмотрим конечные игры.

Имеется игра $\Gamma = <\{1, \ldots, n\}, U_1, \ldots, U_n, g_1, \ldots, g_n>$ с конечными множествами $U_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$.

Смешанной стратегией 1-го игрока является вероятностное распределение на множестве U_i, т.е. набор чисел $\overline{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^{m_i})$ таких, что $\alpha_i^j \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_i^j = 1$.

Набор $(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ смешанных стратегий называется ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в игре Г, если для любого i и любой смешанной стратегии $\overline{\beta}_i$ i-го игрока выполнено неравенство

$$\overline{g}_i\,(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) \geq \overline{g}_i\,(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{i-1}, \overline{\beta}_i, \overline{\alpha}_{i+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n),$$

где $\overline{g}_i$ – выигрыш игрока i в смешанных стратегиях (математическое ожидание).

Главным аргументом в пользу введения смешанных расширений является следующая теорема.

Теорема 3.9. *Во всякой конечной игре Г существует, по крайней мере,одна ситуация равновесия в смешанных стратегиях.*

Доказательство. В m_i - мерном евклидовом пространстве симплекс

$$U_i = \left\{ \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}\right) \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m_j} \alpha_j = 1 \right\}$$

является выпуклым компактным множеством.

Определим на декартовом произведении $U_1 \times \ldots \times U_n$ симплексов вещественнозначную функцию

$$\overline{g}_i\,(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n} g_i(i_1, \ldots, i_n)\alpha_{i_1}^1 \ldots \alpha_{i_n}^n .$$

Эта функция является, очевидно, линейной по $\overline{\alpha}_k$ при фиксированных $\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_{k-1},\overline{\alpha}_{k+1},...,\overline{\alpha}_n$, и, следовательно, вогнутой по $\overline{\alpha}_i$ при фиксированных остальных аргументах.

Рассмотрим игру

$$\overline{\Gamma} = <\{1, \dots, n\}, U_1,\dots, U_n, g_1,\dots, g_n>.$$

Так как игра $\overline{\Gamma}$ является выпуклой, то в ней существует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Но каждой чистой стратегии $(\alpha_i^1,...,\alpha_i^{m_i})$ i-го игрока в игре $\overline{\Gamma}$ можно поставить в соответствие смешанную стратегию $(\alpha_i^1,...,\alpha_i^{m_i})$ в игре Г. При этом выигрыш i-го игрока в игре $\overline{\Gamma}$ в ситуации ($\alpha_1,\dots, \alpha_n$) будет равен математическому ожиданию выигрыша i-го игрока в игре Г в случае, когда игроки зафиксируют свои смешанные стратегии $\alpha_1,\dots, \alpha_n$. Поэтому каждой ситуации равновесия в игре $\overline{\Gamma}$ в чистых стратегиях будет соответствовать ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре Г. Теорема доказана.

Упражнения и задачи

3.1. Пусть игрок 1 имеет две, а игрок 2 – три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1. В противном случае фишки выигрывает игрок 2. Изобразите игру в позиционной форме при условии одновременного выбора стратегий игроками, покажите информационные множества.

3.2. Пусть в игре с фишками (задача 3.1) первым ходит игрок 1, третий ход принадлежит игроку 2. Ни одна сторона не знает о выборе остальных. Постройте позиционную и нормальные формы двух вариантов игры. Сравните нормальные формы двух вариантов игры.

3.3. Пусть в игре с фишками (задача 3.1) первым ходит игрок 2, а игрок 1 знает, четное или нечетное число фишек выбрано игроком 2, но не знает какое именно нечетное. Постройте позиционную форму игры и изобразите информационные множества.

3.4 Пусть дана матрица игры $\begin{Vmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{Vmatrix}$, в которой в ситуации ($i$, j) первое число означает выигрыш игрока 1, а второе – выигрыш игрока 2. Изобразите дерево этой игры.

3.5. Опишите множество всех ситуаций равновесия по Нэшу в двухуровневой древовидной иерархической игре.

3.6. Постройте матрицу выигрышей игроков в игре примера 3.1 § 3.1. Найдите оптимальные чистые стратегии и значение получившейся матричной игры.

3.7. В игре примера 3.2 § 3.1, делая первый ход, игрок 1 выбирает число из множества $\{1, 2\}$. Второй ход делает игрок 2, который, не зная выбора игрока 1, выбирает число из множества $\{1, 2\}$. Далее, совершая 3-й ход, игрок 1 выбирает число из множества $\{1, 2\}$, зная выбор игрока 2 и помня свой выбор на первом шаге. Выигрыш определяется так же, как и в примере 3.2. Изобразите дерево игры и покажите информационные множества. Приведите к матричной форме и решите игру.