ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 1998, № 6, с. 104–121

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.9

НАСЛЕДСТВЕННО МИНИМАКСНЫЕ МАТРИЦЫ В МОДЕЛЯХ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА*

© 1998 г. А. А. Миронов, В. И. Цурков
Москва, МГАТУ им. К.Э. Циолковского, ВЦ РАН
Поступила в редакцию 30.07.98 г.

Рассматриваются задачи транспортного типа, в которых классические функционалы минимизации затрат на перевозки заменены на минимаксные. Разработан алгоритм решения некоторых таких задач и приведены конкретные модели.

Введение. Транспортные модели широко применяются в различных сферах деятельности. В терминах транспортной задачи формулируется большое количество содержательных задач, например: задача назначения, распределительная задача, задача о максимальном потоке и т.д. Задачам транспортного типа посвящена обширная литература, где разработаны методы решения указанных задач многих типов [1–5]. Особенно эффективны и точны эти методы в линейном случае. В нелинейном к настоящему времени нет общих точных методов оптимизации.

В разных областях исследования операций рассматривается смешанный экстремум-минимакс [6–11]. В настоящей работе минимаксный критерий применен к транспортным моделям.

Несколько десятилетий назад была поставлена классическая (линейная) транспортная задача, в которой были заданы пункты производства продукта и пункты потребления этого продукта. Рассматривалась проблема перевозки продукта с минимальными затратами [12]. Эта постановка повлекла за собой многочисленные распространения и обобщения.

В отличие от упомянутой постановки здесь критерий минимума затрат заменяется на минимаксный. В частности, на классе матриц с неотрицательными элементами и заданными суммами элементов строк и столбцов ищется матрица, у которой наибольший элемент является минимальным. Простота постановки претендует на то, чтобы эту задачу можно было также считать классической. Смысл минимаксного критерия в этом случае можно, например, интерпретировать следующим образом. Предположим, что время на перевозку продукта из пункта в пункт пропорционально количеству этого продукта. Тогда минимакс означает минимум по времени всех перевозок продукта в данной транспортной задаче. Отметим, что в этой работе приведены необходимые и достаточные условия единственности решения в указанной задаче транспортного типа.

Рассмотренная выше минимаксная транспортная постановка имеет много обобщений [13–16]. В статье построен ряд замкнутых транспортных моделей с минимаксными критериями. Построен также метод исследования транспортных многогранников [16, 17] (множеств матриц, задающих области определения транспортных задач) специальными уравнениями, называемыми характеристическими [13–16].

Центральное место работы – алгоритм вычисления элементов наследственно минимаксной матрицы. Матрица транспортного многогранника называется минимаксной, если ее наибольший элемент минимален. Наследственно минимаксная матрица – это такая минимаксная матрица, у которой любая подматрица является минимаксной для своего транспортного многогранника. Показано, что каждый транспортный многогранник содержит одну и только одну наследственно минимаксную матрицу и каждая матрица – единственное общее решение для всех задач транспортного типа с минимаксным критерием, рассматриваемых в настоящей работе [16].

1. Равномерные и минимаксные матрицы транспортных многогранников. Рассмотрим ограничения для замкнутой транспортной задачи [1–5]. Через R_+^n обозначим множество всех n-координатных векторов с неотрицательными координатами: $R_+^n = \{\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n: a_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$. Пусть векторы $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in R_+^n$ и $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_m) \in R_+^m$ имеют равные суммы координат

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \quad (1.1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 96-01-01079).

Условие (1.1) называется балансом или замкнутостью системы из пары векторов **A** и **B**. Для векторов $\mathbf{A} \in R^n$ и $\mathbf{B} \in R^m$ будем всегда предполагать $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_m)$. Пары векторов будем заключать в скобки и для множеств пар векторов с неотрицательными координатами применим обозначение $R_+^{n,m} = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) : \mathbf{A} \in R_+^n, \mathbf{B} \in R_+^m\}$. Для множества пар векторов, удовлетворяющих (1.1), положим

$$R_{+,=}^{n,m} = \left\{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) : (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_+^{n,m}, \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j\right\}.$$

Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$. Тогда векторы **A** и **B** определяют множество матриц замкнутой транспортной задачи, которое обозначим $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:

$$M(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left\{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) : x_{ij} \ge 0, 1 \le i \le n,\right.$$

$$\left. 1 \le j \le m, \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, 1 \le i \le n, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, 1 \le j \le m\right\}.$$

Матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ называется транспортным многогранником [16, 17]. Любая матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ называется матрицей-планом (транспортной задачи) или транспортной матрицей (относительно векторов **A** и **B**). Отметим, что любая матрица с неотрицательными элементами является транспортной относительно векторов, координаты которых являются суммами строк и столбцов этой матрицы.

Следующие свойства транспортных многогранников очевидны. Для любой пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$ справедливо: множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \varnothing$; матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ выпукло и ограничено; если n_1 и m_1 – количества положительных координат соответственно векторов **A** и **B**, то множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ состоит из единственной матрицы тогда и только тогда, когда $\min(n_1, m_1) \le 1$.

Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$, $c \in R$, $c \ge 0$ и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, если $x_{ij} \le c$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Для множества транспортных матриц с общим ограничением сверху всех элементов положим

$$M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}) : x_{ij} \le c,$$
$$1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}.$$

Матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ относится к классу усеченных транспортных многогранников [17]. Следующие свойства усеченных транспортных многогранников очевидны: матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 0) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда **A** и **B** – нулевые векторы; если $c < d$, то $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \subseteq M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; d)$; если $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$ и $a = \max\{a_i : 1 \le i \le n\}$, $b = \max\{b_j : 1 \le j \le m\}$, $d = \min(a, b)$, то любая транспортная матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; d)$ и $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; d)$; неравенства $\max\{a_i : 1 \le i \le n\} \le cm$ и $\max\{b_j : 1 \le j \le m\} \le cn$ являются необходимым условием для $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \neq \varnothing$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$.

Выделим специальный класс матриц из множеств $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, играющих важную роль в оптимизации для некоторых задач траспортного типа с минимаксным критерием [14–16].

Определение 1. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$. Матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ называется равномерной, если для ее элементов и координат векторов **A**, **B** справедливы следующие условия:

а) если $a_i = a_p$ и $b_j = b_q$, то $x_{ij} = x_{pq}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$;

б) если $a_i \ge a_p$ и $b_j \ge b_q$, то $x_{ij} \ge x_{pq}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Для множеств равномерных транспортных матриц введем обозначения:

$\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}) : X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – равномерная матрица$\}$,

$\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cap M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)\}$.

Множество $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})(\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c))$ называется равномерным (усеченным) транспортным многогранником. Очевидно, что $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subseteq M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \subseteq M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$. Следующий пример показывает, что $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \varnothing$.

Пример 1. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $R_{+,=}^{n,m}$ и S – сумма координат вектора **A** (и вектора **B**). Тогда матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$, где

$$x_{ij} = \begin{cases} a_i b_j / S, & S > 0, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m, \\ 0, & S = 0, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m, \end{cases}$$

принадлежит равномерному транспортному многограннику $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Рассмотрим произвольное матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Очевидно, что существует такое значение $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, при котором $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \neq \varnothing$ и $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \varnothing$, если $c < c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Определение 2. Величина [13–16]

$$c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min\{c : M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \neq \varnothing\}$$

называется минимаксом (минимаксным значением) транспортного многогранника (или множества) $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Легко видеть, что

$$c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \{\max_{i,j} : X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})\}.$$

Определение 3. Любая матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ называется минимаксной (транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$).

Пример 2. а) Пусть n_1 и m_1 – количества положительных координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$. Если $\min(n_1, m_1) \le 1$, то единственная матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ является равномерной, минимаксной и минимакс $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max\{x_{ij}: 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} = \min(\max\{a_i: 1 \le i \le n\}, \max\{b_j: 1 \le j \le m\})$.

б) Нетрудно убедиться, что транспортные матрицы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

принадлежат $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $\mathbf{A} = (5, 4, 2) \in R^3_+$, $\mathbf{B} = (3, 3, 2, 2, 1, 0) \in R^6_+$, и $X_1 = X_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 1)$, $X_2 = X_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)$. Так как в первой матрице невозможно уменьшить все элементы, равные единице, чтобы не выйти из множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, то X_1 – минимаксная матрица и $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$ – минимаксное значение. Также нетрудно убедиться, что матрица X_1 является равномерной.

в) Для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{4,4}_{+,=}$, где $\mathbf{A} = (6, 6, 4, 4)$ и $\mathbf{B} = (8, 8, 2, 2)$, множество равномерных матриц $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ устроено следующим образом (определение 1):

$$\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = $$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2+\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 2+\alpha & 2+\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 2-\alpha & 2-\alpha & \alpha & \alpha \\ 2-\alpha & 2-\alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} : 0 \le \alpha \le 1/2 \right\}.$$

Равномерный транспортный многогранник $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит равно две вершины – матрицы, соответствующие значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$, причем значение $\alpha = 0$ определяет минимаксную матрицу множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2$.

2. Модели транспортного типа с минимаксным критерием. Замкнутая транспортная задача формулируется следующим образом [1–5]. Пусть $U(n) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $V(m) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ – множества соответственно пунктов производств и потребления некоторого однородного продукта. Задана пара векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$. Координата a_i первого вектора $\mathbf{A}$ – это количество продукта, произведенного пунктом u_i, $1 \le i \le n$, а координата b_j второго вектора $\mathbf{B}$ – это количество продукта, потребляемого пунктом v_j, $1 \le j \le m$. Каждый пункт производства из $U(n)$ соединен некоторым маршрутом с любым пунктом потребления из $U(m)$. Любая матрица-план $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где x_{ij} – количество продукта, доставленного из пункта u_i в пункт v_j, называется матрицей перевозок.

Транспортная модель предназначена для выбора наиболее экономной матрицы перевозок $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, и критерием качества может являться суммарная стоимость всех перевозок, общее время всех перевозок, сумма налогов (или штрафов) при всех перевозках и т.д. Если $\varphi_{ij}(x)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ – заданные функции действительного переменного, то транспортной задачей является минимизация (или максимизация) функционала

$$\Phi(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x_{ij}),$$
$$X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

В классическом (линейном) случае минимизируется функционал

$$\Phi(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij},$$
$$X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из пункта u_i в пункт v_j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

Для примера приведем следующую известную задачу транспортного типа, в которой критерием качества является максимальное из времен, затраченных на все перевозки [1, 5]. Задана матрица (t_{ij}), $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, где t_{ij} – время (не зависящее от количества перевезенного продукта x_{ij}), необходимое для доставки продукта из пункта u_i в пункт v_j. Минимизируется функционал

$$T(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}, \quad X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Такая задача возникает, например, в случае перевозки скоропортящегося продукта.

Рассмотрим следующие конкретные модели с минимаксным критерием [14–16].

Модель А. В отличие от вышеприведенной задачи минимизации времени всех перевозок, в этой модели время t_{ij} перевозки продукта в количестве x_{ij} пропорционально количеству продукта с общим коэффициентом пропорциональности: $t_{ij} = t x_{ij}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, $t > 0$. Матрица, минимизирующая функционал

$$\Phi(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t) = t \max_{i,j} x_{ij}, \quad X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

является минимаксной (определение 3), а минимальное значение этого функционала определяется минимаксным значением $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (определение 2)

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t) = tc(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \\ = \Phi(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})), t).$$

В качестве иллюстрации здесь можно рассмотреть пример 2в). Ниже построены алгоритмы вычисления минимакса $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и элементов минимаксной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ (которая в общем случае определена неоднозначно).

Модель Б. По-прежнему полагаем, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$ и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – матрица перевозок. Пусть константа $t > 0$. Эту модель сформулируем на языке теории игр [18]. Множества пунктов $U(n)$ и $V(m)$ образуют систему производителей и потребителей. Положим, что при всех допустимых значениях i и j суммы налогов производителей и потребителей в "местные бюджеты" соответственно равны значениям

$$h_i' = t\max_j x_{ij}, \quad h_i'' = t\max_i x_{ij},$$

а величина налога в "общий бюджет" со всей системы производителей и потребителей равна

$$h = t\max_{i,j} x_{ij}.$$

Тогда общая величина налогов этой системы составит значение

$$H(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t) = t\left(\max_{i,j} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij}\right).$$

Так как каждому производителю и потребителю желательно заплатить налог меньшей величины, то между всеми участниками финансовых отношений (производители, потребители, налоговая инспекция) возникает конфликтная ситуация. Если производители и потребители смогут договориться и образовать коалицию против налоговой инспекции, то функционал $H(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t)$ может быть минимизирован.

Любая минимаксная и равномерная матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ минимизирует функционал $H(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t)$. В частности, построенная ниже наследственно минимаксная матрица – решение этой транспортной задачи.

Для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ примера 2 в) минимум функционала этой модели достигается матрицей из $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, соответствующей значению $\alpha = 0$, и

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} H(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t) = t(2 + 8 + 6) = 16t.$$

Заметим, что в рассматриваемой модели вопрос о целочисленности денежной единицы не учитывается. Отметим также, что при рациональности координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ существует минимизирующая функционал $H(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t)$ матрицы с рациональными элементами (а с вычислительной точки зрения рациональных чисел вполне достаточно). Следовательно, при соответствующем выборе единицы эта матрица и векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ могут рассматриваться как целочисленные.

Модель В. Здесь привлечем элементы теории вероятностей. Составной частью этой модели является модель А.

Через $\mathcal{M}(X)$ обозначим множество всех подматриц произвольной матрицы $X = X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Из комбинаторики известно, что n-элементное множество содержит 2^n всех подмножеств, одно из которых пустое. Так как каждая подматрица определена произвольными (непустыми) подмножествами строк и столбцов, то количество всех подматриц из множества $\mathcal{M}(X)$ равно $|\mathcal{M}(X)| = (2^n - 1)(2^m - 1)$ (через $|Q|$ обозначим количество элементов конечного множества Q).

В этой модели равновероятно выбирается любая подматрица Y матрицы $X = X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Критерий качества выбора подматрицы Y определяется функционалом $\Phi(Y, t)$ (модель А). Если матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$, то любая ее подматрица Y порядка $p \times q$ $(p \le n, q \le m)$ представляется в виде $Y = (x_{i_r j_t})$, где i_r, j_t – возрастающие последовательности индексов, $1 \le r \le p$, $1 \le t \le q$. Поэтому наибольшее время (время окончания) всех перевозок равно

$$\Phi(Y, t) = t\max\{x_{i_r j_t}: 1 \le r \le p, 1 \le t \le q\}.$$

Так как распределение вероятностей на множестве подматриц из $\mathcal{M}(X)$ является равномерным, то вероятность выбора подматрицы Y равна $1/((2^n - 1)(2^m - 1))$. Следовательно, величина

$$m(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t) = \frac{1}{(2^n - 1)(2^m - 1)} \sum_{Y \in \mathcal{M}(X)} \Phi(Y, t)$$

– математическое ожидание наибольшего времени всех перевозок для множества всех подматриц из $\mathcal{M}(X)$, где $X = X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – некоторая матрица множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Задача здесь – минимизация математического ожидания $m(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}), t)$ на транспортном многограннике $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Эта модель имеет единственное решение, определяемое наследственно минимаксной матрицей [16].

Можно убедиться, что матрица из $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ при $\alpha = 0$ примера 2 в) наследственно минимаксна. Поэтому эта матрица – решение модели B для пары векторов ((6, 6, 4, 4), (8, 8, 2, 2)).

Определим задачи транспортного типа с минимаксными критериями в настоящей работе. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из

$R^{n,m}_{+,=}$. Списком функционалов, минимизируемых на матрицах транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, является следующий:

$$\Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \max_{i,j} x_{ij}, \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij}, \tag{2.2}$$

$$\Phi_3(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max_j x_{ij}, \tag{2.3}$$

$$\Phi_4(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \max_{i,j} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij}, \tag{2.4}$$

$$\Phi_5(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \max_{i,j} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max_j x_{ij}, \tag{2.5}$$

$$\Phi_6(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_2(Y), \tag{2.6}$$

$$\Phi_7(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_3(Y), \tag{2.7}$$

$$\Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_1(Y), \tag{2.8}$$

$$\Phi_9(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_1(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_2(Y), \tag{2.9}$$

$$\Phi_{10}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_1(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \Phi_3(Y), \tag{2.10}$$

где $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $\mathcal{M}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ – множество всех подматриц матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Для функционалов (2.1)–(2.10) очевидно, что

$$\Phi_3(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_2(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_2(X(\mathbf{B}, \mathbf{A})),$$

$$\Phi_4(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_2(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})),$$

$$\Phi_5(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_3(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})),$$

$$\Phi_7(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_6(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_6(X(\mathbf{B}, \mathbf{A})),$$

$$\Phi_9(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_6(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})),$$

$$\Phi_{10}(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_7(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})).$$

Также легко видеть, что функционалы (2.1), (2.4) и (2.8) приведены ранее в моделях А, Б и В. Отметим также: так как $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – выпуклое множество (матриц) и функционалы (2.1)–(2.10) – выпуклые функции, то минимизацию указанных функционалов можно отнести к экстремальным выпуклым задачам [19].

3. Матрицы транспортных многогранников с общим ограничением для элементов и характеристические уравнения. Пусть $c \ge 0$ и $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $R^{n,m}_{+,=}$, для которой $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$. Из условия замкнутости (1.1) для векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ следует

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i>k} a_i \tag{3.1}$$

при каждом $k \in Z$, $1 \le k \le n$. Представим правую часть равенства (3.1) через координаты вектора $\mathbf{B}$ и элементы произвольной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$:

$$\sum_{i>k} a_i = \sum_{i>k} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i>k} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \left(b_j - \sum_{i=1}^{k} x_{ij} \right). \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sum_{b_j \ge ck} \left(b_j - \sum_{i=1}^{k} x_{ij} \right) \ge \sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck),$$

так как $x_{ij} \le c$ при всех i, j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck) - \sum_{i=1}^{k} a_i \ge 0.$$

Для произвольных векторов $\mathbf{A} \in R^n_+$, $\mathbf{B} \in R^m_+$ (условие замкнутости не предполагается), произвольного $c \ge 0$ и любого $k \in Z$, $0 \le k \le n$, введем функцию

$$\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck) - \sum_{i \le k} a_i. \tag{3.3}$$

Будем использовать специальные обозначения для целочисленных векторов, пар из них и целочисленных матриц

$$Z_+^n = \{\mathbf{A} \in R_+^n: a_i \in Z, 1 \le i \le n\},$$

$$Z_{+,=}^{n,m} = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}: \mathbf{A} \in Z_+^n, \mathbf{B} \in Z_+^m\},$$

и если $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in Z_{+,=}^{n,m}$, $c \in Z$, $c \ge 0$, то $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}): x_{ij} \in Z, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ и $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cap M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)\}$.

Выше получено, что неравенство $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ge 0$ при всех k, $1 \le k \le n$, является необходимым условием для $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$. Справедливо и обратное утверждение в предположении, что координаты вектора $\mathbf{A}$ упорядочены по невозрастанию. Множества таких векторов обозначим $\bar{R}_+^n = \{\mathbf{A} \in R_+^n: a_i \ge a_{i+1}, 1 \le i \le n-1$, если $n \ge 2\}$ и $\bar{Z}_+^n = \{\mathbf{A} \in \bar{R}_+^n: a_i \in Z, 1 \le i \le n\}$. Имеет место следующее утверждение [8, 9, 13–16].

Л е м м а 1. Множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ge 0$ для каждого k, $1 \le k \le n$, где $\mathbf{A} \in \bar{R}_+^n$.

Как указывалось выше, матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ относится к классу усеченных транспортных многогранников. В общем случае, если $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$, то задана матрица порядка $n \times m$ с неотрицательными элементами и здесь усеченным транспортным многогранником называется множество матриц

$$M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; (c_{ij})) = \{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}): x_{ij} \le c_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}.$$

В [17, 20] построены условия, при которых $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; (c_{ij})) \ne \varnothing$, и критерий для $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$, содержащийся в лемме 1, является следствием этих условий.

Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$ и $c \ge 0$. Раскроем матричный смысл функции (3.3), если $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$ (или $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$). Для вектора $\mathbf{B}$ и значения $k \in Z$, $1 \le k \le n$, обозначим $l_k(\mathbf{B}; c) = |\{j: b_j \ge ck, 1 \le j \le m\}|$ – количество координат вектора $\mathbf{B}$, неменьших величины ck. Тогда функция (3.3) примет вид

$$\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \sum_{b_j < ck} b_j + ckl_k(\mathbf{B}; c) - \sum_{i=1}^{k} a_i. \quad (3.4)$$

Для любой матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ (или из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$) значение $k \in Z$, $1 \le k \le n$, выделяет одну или две подматрицы: $\bar{X} = (x_{ij})$, $1 \le i \le k$, $b_j \ge ck$; $\bar{\bar{X}} = (x_{ij})$, $k < i \le n$, $b_j < ck$. Через $s(X)$ обозначим сумму элементов произвольной матрицы X. Легко видеть, что матрица $\bar{X}$ не существует при $l_k(\mathbf{B}; c) = 0$, а при $l_k(\mathbf{B}; c) = m$ или $k = n$ не существует матрица $\bar{\bar{X}}$. Заметим, если $k = n$, то, возможно, не существует матрица $\bar{X}$. В случае, если какая-то матрица X не существует, то положим $s(X) = 0$. Если $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$, то для любой матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ справедливы равенства

$$\sum_{b_j < ck} b_j = \sum_{b_j < ck} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_{ij},$$

$$\sum_{b_j < ck} b_j - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{b_j < ck} \sum_{i=1}^{k} x_{ij} +$$

$$+ \sum_{b_j < ck} \sum_{i > k} x_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{b_j \ge ck} x_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{b_j < ck} x_{ij} =$$

$$= \sum_{b_j < ck} \sum_{i < k} x_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{b_j \ge ck} x_{ij} = s(\bar{\bar{X}}) - s(\bar{X}).$$

Поэтому из (3.4) следует утверждение [14–16].

Л е м м а 2. Если $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$ (или $M_Z((\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing)$, то для любой матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ (или из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ при произвольном $k \in Z$, $1 \le k \le n$, справедливо соотношение

$$\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = ckl_k(\mathbf{B}; c) - s(\bar{X}) + s(\bar{\bar{X}}), \quad (3.5)$$

где $\bar{X} = (x_{ij})$, $1 \le i \le k$, $b_j \ge ck$, $\bar{\bar{X}} = (x_{ij})$, $k < i \le n$, $b_j < ck$.

Соотношения (3.5) при $1 \le k \le n$ являются тождествами для множества матриц из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$. Будем рассматривать эти тождества как уравнения от неизвестных элементов матрицы.

О п р е д е л е н и е 4. Уравнение (3.5) называется характеристическим для матриц множеств $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$.

Характеристические уравнения определяют общие свойства всех матриц из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$, а значения функции (3.3) (или (3.4)) определяют возможные различия между этими матрицами. Применение уравнений (3.5) позволяет строить матрицы из указанных множеств в зависимости от переменных $k \in Z$, $s(\bar{X})$ и $s(\bar{\bar{X}})$. Задавая значения переменным $s(\bar{X})$ и $s(\bar{\bar{X}})$ и “распределяя” эти значения по элементам подматриц $\bar{X}$ и $\bar{\bar{X}}$, исследование матричного множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ можно свести к исследованию множеств матриц с меньшими порядками. В частности, уравнения

(3.5) можно применить для построения всех матриц из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$.

Для любого вектора $\mathbf{A}$ из R_+^n через $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ обозначим вектор, образованный из вектора $\mathbf{A}$ упорядочиванием всех его координат по невозрастанию ($\tilde{\mathbf{A}} \in \bar{R}_+^n$). Из очевидного неравенства $\delta_k(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c) \le \delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ следует, что исследование матриц и матричных множеств характеристическими уравнениями наиболее удобно проводить, когда первый вектор $\mathbf{A} \in \bar{R}_+^n$.

Следствием леммы 2 является утверждение [14–16].

Л е м м а 3. Пусть $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$ и $\mathbf{A} \in \bar{R}_+^n$. Если при некотором $p \in Z$, $1 \le p \le n$, $cp \le \max\{b_j: 1 \le j \le m\}$, имеет место $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = 0$, то для элементов любой матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = (x_{ij})$ из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$ справедливо

$$x_{ij} = \begin{cases} c, & 1 \le i \le p, \ b_j \ge cp, \\ 0, & p < i \le n, \ b_j < cp, \end{cases}$$

и

$$x_{ij} = \begin{cases} c, & 1 \le i \le p, \ 1 \le j \le l_p(\mathbf{B}; c), \\ 0, & p < i \le n, \ l_p(\mathbf{B}; c) < j \le m, \end{cases} \tag{3.6}$$

где во втором случае вектор $\mathbf{B} \in \bar{R}_+^m$.

Приведем пример применения леммы 3 для исследования матриц усеченного транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c)$. Для множества пар векторов, координаты которых упорядочены по невозрастанию, введем обозначения: $\bar{R}_{+,=}^{n,m} = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}: \mathbf{A} \in \bar{R}_+^m, \mathbf{B} \in \bar{R}_+^m\}$ и $\bar{Z}_{+,=}^{n,m} = \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}_{+,=}^{n,m} \cap Z_{+,=}^{n,m}\}$.

П р и м е р 3. Рассмотрим векторы $\mathbf{A} = (11, 11, 11, 4, 3)$ и $\mathbf{B} = (12, 12, 10, 3, 3)$ и значение $c = 3$. Легко убедиться, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{Z}_{+,=}^{5,5}$.

Покажем, что $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) \ne \varnothing$. Для этого вычислим значения функции (3.4) (или (3.3)): $\delta_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 4$, $\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 2$, $\delta_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 0$, $\delta_4(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 3$, $\delta_5(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 0$. Так как $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) \ge 0$ при всех k, $1 \le k \le 5$, то $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) \ne \varnothing$, что следует из леммы 1.

Применим лемму 3. Здесь $p = 3$ и $l_3(\mathbf{B}; 3) = 3 > 0$. Из (3.6) следует, что

$$M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & x_{14} & x_{15} \\ 3 & 3 & 3 & x_{24} & x_{25} \\ 3 & 3 & 3 & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_{14} & x_{15} \\ x_{24} & x_{25} \\ x_{34} & x_{35} \end{pmatrix} \in \right. \tag{3.7}$$

$$\left. \in M(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3), \begin{pmatrix} x_{41} & x_{42} & x_{43} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} \end{pmatrix} \in M(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3) \right\},$$

где $\mathbf{A}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{B}_1 = (3, 3)$, $\mathbf{A}_2 = (4, 3)$, $\mathbf{B}_2 = (3, 3, 1)$. Таким образом, исследование множества матриц с порядком 5×5 сводится к рассмотрению множеств матриц, порядки которых 3×2 и 2×3.

Каждое из множеств $M_Z(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3)$ и $M_Z(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3)$ легко построить, так как любой возможный столбец матрицы первого множества и любая возможная строка второго множества полностью определяют свои матрицы

$$M_Z(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{3.8}$$

$$M_Z(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Если в формуле (3.7) матричные множества $M(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3)$ и $M(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3)$ заменить на множества $M_Z(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3)$ и $M_Z(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3)$, то получим полный список целочисленных матриц из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$. Так как матрицы в различных множествах из (3.8) независимы, то количество всех целочисленных матриц из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$ равно

$$|M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)| = $$
$$= |M_Z(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3)| \times |M_Z(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3)| = 49.$$

Приведем еще один пример, где используется лемма 2.

П р и м е р 4. Легко проверить неотрицательность функции (3.3) для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{Z}^{7,9}_{+,=}$, где $\mathbf{A} = (14, 14, 13, 10, 8, 4, 3)$, $\mathbf{B} = (12, 12, 10, 10, 8, 6, 4, 2, 2)$ и $c = 2$. Поэтому (лемма 1) $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)$, $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2) \neq \varnothing$. При вычислении функции (3.3) можно убедиться, что $\delta_4(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2) = \min\{\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)\colon 1 \le k \le 7, l_k(\mathbf{B}; 2) > 0\} = 3$. Так как $l_4(\mathbf{B}; 2) = 5$, то характеристическое уравнение (3.5) при $k = 4$ имеет вид

$$3 = 40 - s(\bar{X}) + s(\bar{\bar{X}}), \qquad (3.9)$$

где $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – произвольная матрица из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)$ и $\bar{X} = (x_{ij})$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 5$, $\bar{\bar{X}} = (x_{ij})$, $5 \le i \le 7$, $6 \le j \le 9$. Применяя уравнение (3.9), оценим снизу количество матриц из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)$.

Обозначим $\bar{s} = s(\bar{X})$ и $\bar{\bar{s}} = s(\bar{\bar{X}})$. Так как $40 - \bar{s} \ge 0$ и $\bar{\bar{s}} \ge 0$, то уравнение (3.9) имеет четыре целочисленных решения $\bar{s}$, $\bar{\bar{s}}$: 40, 3; 39, 2; 38, 1; 37, 0. Оценкой снизу для количества матриц из $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)$ является количество решений r четырех систем уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\beta_{ij} = 37 + q, \\ \sum_{i=5}^{7}\sum_{j=6}^{9}\beta_{ij} = q, \end{cases}$$

$$q \in Z, \quad 0 \le q \le 3, \quad \beta_{ij} \in Z, \quad 0 \le \beta_{ij} \le 2.$$

Через $r(q)$ обозначим количество решений системы, а через $r_1(q)$ и $r_2(q)$ – количества решений первого и второго уравнений системы при $q \in Z$, $0 \le q \le 3$. Так как уравнения системы независимы, то $r(q) = r_1(q)r_2(q)$ и $r = r_1(0)r_2(0) + r_1(1)r_2(1) + r_1(2)r_2(2) + r_1(3)r_2(3)$. Количества переменных первого и второго уравнения системы соответственно равны 20 и 12 и значения $r_k(q)$, $1 \le k \le 2$, $0 \le q \le 3$, легко вычислить

$$r_1(0) = C_{20}^3 + 2C_{20}^2 = 1520, \quad r_2(0) = 1,$$

$$r_1(1) = C_{20}^2 + 2C_{20}^1 = 210, \quad r_2(1) = C_{12}^1 = 12,$$

$$r_1(2) = C_{20}^1 = 20, \quad r_2(2) = C_{12}^2 + C_{12}^1 = 78,$$

$$r_1(3) = 1, \quad r_2(3) = C_{12}^3 + 2C_{12}^2 = 352.$$

После арифметических вычислений получим, что $r = 5952$ и $|M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2)| \ge 5952$.

4. Формула вычисления минимаксного значения. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$. Минимакс матричного множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ можно выразить функцией (3.3), и в лемме 3 заключены условия для минимаксного значения [14–16].

Л е м м а 4. Величина c является минимаксным значением множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (т.е. $c = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$), где $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $R^{n,m}_{+,=}$ тогда и только тогда, когда

а) $\delta_k(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c) \ge 0$ при всех k, $1 \le k \le n$,

б) существует такое $p \in Z$, $1 \le p \le n$, для которого $cp \le \max\{b_j\colon 1 \le j \le m\}$ и $\delta_p(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\delta_k(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c)$ непрерывна относительно координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и значения c. Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ фиксированы, то при каждом $k \in Z$, $1 \le k \le n$, функция (3.3) является неубывающей относительно переменной c, причем эта функция строго возрастает при $0 \le c \le \max\{b_j/k, 1 \le j \le m\}$. Отсюда и из леммы 1 следует справедливость леммы 4.

П р и м е р 5. Для матриц транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – пара векторов примера 3, минимакс $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 3$, что следует из леммы 4. Для этой же пары векторов формула (3.7) выражает все минимаксные матрицы.

Построим алгоритм вычисления минимакса $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$ [14–16]. Очевидно, что $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = c(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$. Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$. Так как $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – нулевые векторы, то положим $b_1 > 0$ (и $a_1 > 0$).

Отметим индексы тех координат вектора $\mathbf{B}$, при которых отмеченные координаты больше последующих (если $b_1 > b_m$), и положим m' – индекс последней положительной координаты вектора $\mathbf{B}$: $T(\mathbf{B}) = \{k \in Z\colon 1 \le k \le m-1, b_k > b_{k+1}\} \cup \{m'\}$ – множество отмеченных индексов. Положим $t = |T(\mathbf{B})|$ и $T(\mathbf{B}) = \{k_i\colon 1 \le i \le t, k_i < k_{i+1}, 1 \le i \le t-1$ (если $t > 1$)$\}$. Рассмотрим систему соотношений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{k_i}(b_j - c(k, k_i)k) - \sum_{i=1}^{k} a_i = 0, \\ c(k, k_i)k \le b_{k_i}, \\ c(k, k_i)k > b_{k_i+1}, \ i \ne t, \end{cases} \qquad (4.1)$$

$$1 \le k \le n, \quad 1 \le i \le t,$$

с единственной неизвестной величиной $c(k, k_i)$. Если решение $c(k, k_i)$ этой системы существует, то оно единственно. Если при некоторых значения k и k_i система (4.1) не имеет решений, то положим

$c(k, k_i) = 0$. Наибольшее из решений систем в (4.1) является минимаксом [14–16].

Теорема 1. Минимаксным значением произвольного транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ является $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max\{c(k, k_i): 1 \le k \le n, k_i \in T(\mathbf{B})\}$.

Доказательство. Пусть c – такое значение, что при некотором $k \in Z$, $1 \le k \le n$, справедливо $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ge 0$ (значение c существует, так как матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ограничено). Покажем, что $c \ge c(k, k_i)$ при каждом i, $1 \le i \le t$. Очевидно, что можно предположить $c(k, k_i) > 0$. Так как $c(k, k_i)$ – решение системы (4.1), то

$$\sum_{j=1}^{k_i} (b_j - c(k, k_i)k) = \sum_{b_j \ge c(k, k_i)k} (b_j - c(k, k_i)k).$$

Поэтому из первого соотношения в (4.1) и неравенства

$$\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck) - \sum_{i=1}^{k} a_i \ge 0$$

следует, что

$$\sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck) \le \sum_{b_j \ge c(k, k_i)k} (b_j - c(k, k_i)k).$$

Последнее неравенство возможно только в случае $c \ge c(k, k_i)$.

Если $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ge 0$ при всех k, $1 \le k \le n$, то очевидно, что $c \ge c(k, k_i)$, $1 \le k \le n$, $k_i \in T(\mathbf{B})$. Следовательно, $c \ge c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \ge \max\{c(k, k_i): 1 \le k \le n, k_i \in T(\mathbf{B})\}$. Так как $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \ge 0$ при каждом k, $1 \le k \le n$, и существует $p \in Z$, $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})p \le b_1$, $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$ (лемма 4), то $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \max\{c(k, k_i): 1 \le k \le n, k_i \in T(\mathbf{B})\}$.

Теорема 1 (вместе с системой (4.1)) содержит алгоритм вычисления минимакса.

Пример 6. Для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $\mathbf{A} = (18, 18, 10, 6)$ и $\mathbf{B} = (12, 12, 12, 8, 4, 4)$, очевидно, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{Z}^{4,5}_{+,=}$. Определим минимакс $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и построим минимаксную матрицу из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Воспользуемся теоремой 1, содержащей формулу вычисления минимакса. Легко видеть, что $T(\mathbf{B}) = \{3, 4, 6\}$ и $t = 3$. Так как $\mathbf{A} \in R^4$, то обратимся 12 раз к системе (4.1): вычислим значения $c(k, k_i)$, где $1 \le k \le 4$ и $k_i \in \{3, 4, 6\}$. Подробно остановимся на вычислении значений $c(2, 3)$, $c(2, 4)$, $c(3, 3)$, $c(3, 4)$

$$\begin{cases} 52 - 3(12 - 2c(2, 3)) - 36 = 0, \\ 8 < 2c(2, 3) \le 12, \end{cases}$$

$$c(2, 3) = 0$$

$$\begin{cases} 52 - 3(12 - 2c(2, 3)) - (8 - 2c(2, 4)) - 36 = 0, \\ 4 < 2c(2, 4) \le 8, \end{cases}$$

$$c(2, 4) = 7/2;$$

$$\begin{cases} 52 - 3(12 - 3c(3, 3)) - 46 = 0, \\ 8 < 3c(3, 3) \le 12, \end{cases}$$

$$c(3, 3) = 10/3;$$

$$\begin{cases} 52 - 3(12 - 3c(3, 4)) - (8 - 3c(3, 4)) - 46 = 0, \\ 4 < 3c(3, 4) \le 8, \end{cases}$$

$$c(3, 4) = 0.$$

Напомним, что $c(k, k_i) = 0$, если система (4.1) не имеет решений. Аналогично вычисляются остальные значения: $c(1, 3) = 0$, $c(1, 4) = 0$, $c(1, 6) = 3$, $c(2, 6) = 0$, $c(3, 6) = 0$, $c(4, 3) = 3$; $c(4, 4) = 0$, $c(4, 6) = 0$. Из теоремы 1 следует, что $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 7/2$.

Так как $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = c(2, 4)$, то $\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 7/2) = 0$ и $l_2(\mathbf{B}; 7/2) = 4$. Применяя лемму 3, получим

$$M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3, 5) =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & x_{15} & x_{16} \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_{15} & x_{16} \\ x_{25} & x_{26} \end{pmatrix} \in \right.$$

$$\in M(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3, 5),$$

$$\left. \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \in M(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3, 5) \right\}$$

– множество минимаксных матриц транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $\mathbf{A}_1 = (4, 4)$, $\mathbf{B}_1 = (4, 4)$, $\mathbf{A}_2 = (10, 6)$, $\mathbf{B}_2 = (5, 5, 5, 1)$ и, в частности,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1; 3, 5),$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2; 3, 5).$$

В этом примере любая матрица из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3, 5)$ минимизирует функционал (2.1) на множестве матриц из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $\min\Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 3, 5$.

Л е м м а 5. Для произвольного транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ справедливо

$$\min_{X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})} \Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) =$$

$$= \Phi_1(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))) = c(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Ниже построена одна из минимаксных матриц – наследственно минимаксная, минимизирующая функционал (2.1) и являющаяся решением модели А.

5. Критерий единственности минимаксной матрицы транспортного многогранника. Выясним условия для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$, при которых множество минимаксных матриц $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ состоит из единственной матрицы. Для этого упорядочим координаты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ по невозрастанию, т.е. перейдем к паре векторов $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$. Из рассмотрения исключим тривиальный случай, когда множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ состоит из одной матрицы.

Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$, где $n, m \geq 2$ и $a_2, b_2 > 0$. В этом случае $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит бесконечное количество матриц. Предположим, что известен минимакс $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Тогда существует $p \in Z$, $1 \leq p \leq n$, $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})p \leq b_1$ и $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$ (лемма 4). Предположим также, что $p + 1 \leq n$ и $\delta_{p+1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$. Рассмотрим случай $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})(p + 1) \leq b_1$. Воспользуемся леммой 3, которая полностью определяет некоторые элементы любой минимаксной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Напомним, что так как $\mathbf{B} \in \bar{R}^m_+$, то $l_k(\mathbf{B}; c) = \max\{j: 1 \leq j \leq m, b_j \geq ck\}$ при $b_1 \geq ck$. При $c = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, из леммы 3 следует

$$x_{ij} = \begin{cases} c, & 1 \leq i \leq p, \ 1 \leq j \leq l_p(\mathbf{B}; c), \\ 0, & p < i \leq n, \ l_p(\mathbf{B}; c) < j \leq m, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} c, & 1 \leq i \leq p+1, \ 1 \leq j \leq l_{p+1}(\mathbf{B}; c), \\ 0, & p+1 < i \leq n, \ l_{p+1}(\mathbf{B}; c) < j \leq m \end{cases}$$

для любой матрицы $(x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$. Тем самым определена $p + 1$-я строка произвольной матрицы из рассматриваемых

$$x_{p+1\,j} = \begin{cases} c, & 1 \leq j \leq l_{p+1}(\mathbf{B}; c), \\ b_j - cp, & l_{p+1}(\mathbf{B}; c) < j < l_p(\mathbf{B}; c), \\ 0, & l_p(\mathbf{B}; c) < j \leq m. \end{cases}$$

Последняя формула вычисления элементов матрицы справедлива и при $p = 0$, так как в этом случае $b_1 > 0$ и $\delta_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$.

Рассмотрим случай $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})(p + 1) > b_1$. Так как $\delta_{p+1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$, то из (3.3) следует

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{p+1} a_i = 0.$$

Тогда замкнутость системы из векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ показывает, что $a_i = 0$, $p + 1 < i \leq n$. Поэтому из соотношений $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})p \leq b_1$ и $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$ следует, что

$$x_{ij} = \begin{cases} b_j - cp, & i = p+1, \ 1 \leq j \leq l_p(\mathbf{B}; c), \\ 0, & i = p+1, \ l_p(\mathbf{B}; c) < j \leq m, \\ 0, & p+1 < i \leq n, \ 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

где $c = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Тем самым доказано следующее утверждение [15].

Т е о р е м а 2. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$, где $n, m \geq 2$ и количество положительных координат каждого вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ превосходит единицу. Если $\delta_k(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$ при всех k, $1 \leq k \leq n$, то множество минимаксных матриц $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ состоит только из одной матрицы.

Если пара векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то для построения единственной минимаксной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ следует упорядочить координаты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ по невозрастанию, применяя лемму 3, построить единственную минимаксную матрицу $\tilde{X}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \in M(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$, а затем перестановкой строк и столбцов матрицы $X(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ получить матрицу $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

П р и м е р 7. Для векторов $\mathbf{A} = (37, 22, 12)$ и $\mathbf{B} = (12, 12, 11, 9, 7, 6, 5, 3, 3, 2, 1)$ легко видеть, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{Z}^{3,11}_{+,=}$. Если $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $\bar{R}^{n,m}_{+,=}$, то для минимакса очевидно $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq \max(a_1/m, b_1/n)$. В нашем случае $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq \max(37/11, 12/3) = 4$. Можно проверить, что $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 4) = 0$ при всех k, $1 \leq k \leq 3$. Следовательно, $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4$ (лемма 4) и множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит только одну минимаксную матрицу (теорема 2).

Применим три раза ($n = 3$) лемму 3. В строящейся матрице $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 4)$ отметим все элементы, равные 4 или 0, а остальные элементы оставим неопределенными. При этом выпишем над столбцами и слева у строк суммы элементов столбцов и строк

$$\begin{array}{c} \\ 37 \\ 22 \\ 12 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 12 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & x_{18} & x_{19} & x_{1,10} & x_{1,11} \\ 4 & 4 & 4 & 4 & x_{25} & x_{26} & x_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 4).$$

Из этого равенства неопределенные элементы вычисляются автоматически

$$X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– единственная матрица множества $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 4)$ этого примера.

Условия теоремы 2 содержатся в условиях следующей теоремы, которая определяет критерий единственности минимаксной матрицы. Если в теореме 2 автоматически вычисляются элементы строк, не определяемые леммой 3, то в теореме 3 автоматически вычисляются элементы и строк, и столбцов, не определяемые указанной леммой.

Для векторов $\mathbf{B} \in \bar{R}_+^m$ приведем новое обозначение, сравнив его с известным:

$$l(\mathbf{B}; c, k) = \begin{cases} \max\{j: b_j > ck, 1 \le j \le m\}, & b_1 > ck, \\ 0, & b_1 \le ck, \end{cases}$$

$$l_k(\mathbf{B}; c) = \begin{cases} \max\{j: b_j \ge ck, 1 \le j \le m\}, & b_1 \ge ck, \\ 0, & b_1 < ck. \end{cases}$$

Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – такая пара векторов из $\bar{R}_{+,=}^{n,m}$, что $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing$ и $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = 0$, $\delta_q(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) = 0$, где $1 \le p < q \le n$, $cq \le b_1$ и $q - p \ge 2$. Тогда $c = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (лемма 4). Предположим, что $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) > 0$ при всех k, $p < k < q$, и $l(\mathbf{B}; c, p) - l_q(\mathbf{B}; c) \le 1$. Отметим очевидность неравенства $l(\mathbf{B}; c, p) \ge l_q(\mathbf{B}; c)$. Лемма 3 и приведенные выше условия полностью определяют элементы любой матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ при $p < i \le q$, $1 \le j \le m$

$$x_{ij} = \begin{cases} c, & p < i \le q, \quad 1 \le j \le l_q(\mathbf{B}; c), \\ a_i - cl_q(\mathbf{B}; c), & p \le i \le q, \\ l_q(\mathbf{B}; c) < j < l(\mathbf{B}; c, p), \\ 0, & p \le i \le q, \quad l(\mathbf{B}; c, p) < j \le m, \end{cases}$$

где $c = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Средняя строчка построенной формулы существенна только в случае $l(\mathbf{B}; c, p) - l_q(\mathbf{B}; c) = 1$.

Приведенная конструкция расширяет условия теоремы 2, при которых множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ состоит из единственной матрицы. В следующей теореме заключен критерий единственности минимаксной матрицы (достаточность является следствием указанной конструкции и доказательства теоремы 2; доказательство необходимости условий опускается из-за ограниченности объема статьи).

Теорема 3. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$, где $n, m \ge 2$ и количество положительных координат каждого вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ больше единицы. Положим $p_0 = 0$ и $p_i \in Z$, $0 \le i \le t$, – все последовательные значения, при которых $c(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B})p_i \le b_1$ и $\delta_{p_i}(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$ (векторы $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ и $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m)$ построены из векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ упорядочиванием по невозрастанию их координат). Матричное множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ состоит из единственной минимаксной матрицы тогда и только тогда, когда $t \ge 1$ и $l(\tilde{\mathbf{B}}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}), p_{i-1}) - l_{p_i}(\tilde{\mathbf{B}}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \le 1$ в случае $p_i - p_{i-1} > 1$, $1 \le i \le t$, и $p_t + 1 = \max\{i: a_i > 0, 1 \le i \le n\}$ в случае $l(\tilde{\mathbf{B}}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}), p_t) > 1$.

Пример 8. Рассмотрим $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{Z}_{+,=}^{9,10}$, где $\mathbf{A} = (24, 17, 17, 16, 12, 8, 8, 2, 2)$ и $\mathbf{B} = (25, 21, 19, 14, 13, 8, 2, 2, 1, 1)$. Применяя лемму 4 можно убедиться, что $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 3$. Вычислив значения функции (3.3) при всех $k \in Z$, $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})k \le b_1 = 25$, определим все значения p_i, когда $\delta_{p_i}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = 0$: $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.

Вычислим разности $p_i - p_{i-1}$ и $l(\mathbf{B}; 3, p_{i-1}) - l_{p_i}(\mathbf{B}; 3)$, где $1 \le i \le 4 = t$

$$p_i - p_{i-1} \begin{cases} 1 - 0 = 1, & i = 1, \\ 4 - 1 = 3, & i = 2, \\ 5 - 4 = 1, & i = 3, \\ 7 - 5 = 2, & i = 4, \end{cases}$$

$$l(\mathbf{B}; 3, p_{i-1}) - l_{p_i}(\mathbf{B}; 3) = \begin{cases} 10 - 6 = 4, & i = 1, \\ 6 - 5 = 1, & i = 2, \\ 5 - 3 = 2, & i = 3, \\ 3 - 2 = 1, & i = 4. \end{cases}$$

Легко видеть, что $p_i - p_{i-1} > 1$ только в случаях $i = 2$ и $i = 4$. Но при этих значениях индекса имеет место $l(\mathbf{B}; 3, p_{i-1}) - l_{p_i}(\mathbf{B}; 3) = 1$. Так как в нашем случае $l(\mathbf{B}; 3, p_t) = l(\mathbf{B}; 3, p_4) = l(\mathbf{B}; 3, 7) = 1$, то множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$ состоит из единственной минимаксной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = (x_{ij})$. Следующие элементы этой матрицы определяет лемма 3 при $p = 1, 4, 5, 7$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 3, & i = 1, \ 1 \le j \le 6, \\ 0, & 2 \le i \le 9, \ \ 7 \le j \le 10, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 3, & 1 \le i \le 4, \ 1 \le j \le 5, \\ 0, & 5 \le i \le 9, \ \ 6 \le j \le 10, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 3, & 1 \le i \le 5, \ 1 \le j \le 3, \\ 0, & 6 \le i \le 9, \ \ 4 \le j \le 10, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 3, & 1 \le i \le 7, \ 1 \le j \le 2, \\ 0, & 8 \le i \le 9, \ \ 3 \le j \le 10. \end{cases}$$

В матрицу $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3) = (x_{ij})$ впишем все вычисленные элементы. Все остальные неопределенные элементы разбиваются на группы, располагающиеся в различных строках и столбцах, и автоматически вычисляются с помощью координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

$$\begin{array}{c} \\ 24 \\ 17 \\ 17 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 25 & 21 & 19 & 14 & 13 & 8 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{1,10} \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & x_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & x_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & x_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & x_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{81} & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{91} & x_{92} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} = X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$$

– единственная минимаксная матрица транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

В теореме 3 заключены условия единственности решения в модели A.

Т е о р е м а 4. Задача минимизации функционала (2.1) на матричном множестве $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$, $n, m \ge 2$ и $|\{i: a_i > 0, 1 \le i \le n\}|$, $|\{j: b_j > 0, 1 \le j \le m\}| \ge 2$, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ справедливы соотношения, содержащиеся в теореме 3.

6. Целочисленный минимакс. Рассмотрим пару векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in Z^{n,m}_{+,=}$ и значение $c \in Z$, $c \ge 0$.

О п р е д е л е н и е 5. Величина [13–16]

$$c_z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min\{c\colon c \in Z, M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c) \ne \varnothing\}$$

называется целочисленным минимаксом множества транспортных матриц $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Легко видеть, что

$$c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \{\max_{i,j} x_{ij} : X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})\}.$$

О п р е д е л е н и е 6. Любая матрица множества $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ называется целочисленной минимаксной.

П р и м е р 9. а) В примере 2 б) матрица X_1 – целочисленная минимаксная множества $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$.

б) Матрица из $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ при $\alpha = 0$ примера 2 в) является целочисленной минимаксной матричного множества $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2$.

в) Для пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ примера 3 легко проверить, что $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 2) = \varnothing$ (лемма 1). Поэтому $c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 3$ и формулы (3.7), (3.8) выражают все целочисленные минимаксные матрицы.

г) Каждое из множеств $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 4)$ и $M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 3)$ примеров 7 и 8 состоит из одной матрицы, являющейся целочисленной минимаксной.

Из леммы 1 и доказательства леммы 4 следует утверждение [14–16].

Л е м м а 6. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in Z^{n,m}_{+,=}$. Для целочисленного минимакса имеет место

$$c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \min\{c\colon c \in Z,$$
$$\min\{\delta_k(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B}; c)\colon 1 \le k \le n\} \ge 0\}.$$

Легко видеть, что в теореме 1 заключен алгоритм вычисления целочисленного минимакса.

Т е о р е м а 1'. Целочисленным минимаксом произвольного множества транспортных матриц $M_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ является $c_Z(\mathbf{A}, \mathbf{B}) =]c(\mathbf{A}, \mathbf{B})[$, где $]a[$ – наименьшее целое число, не меньшее a.

7. Минимизация равномерными матрицами. Рассмотрим функционалы (2.1) и (2.2). Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $R^{n,m}_{+,=}$ и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – любая матрица из $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Для произвольного $p, q \in Z$, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le m$, легко видеть, что

$$\Phi_2(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij} \ge \sum_{j=1}^{m} x_{pj} = a_p,$$

$$\Phi_3(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \sum_{j=1}^{m} \max_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max_j x_{ij} \ge \tag{7.1}$$

$$\ge \sum_{j=1}^{m} x_{pj} + \sum_{i=1}^{n} x_{iq} = a_p + b_q.$$

Поэтому $\Phi_2(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) \ge \tilde{a}_1$ и $\Phi_3(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) \ge \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1$, где $\tilde{a}_1 = \max\{a_i{:}\ 1 \le i \le n\}$ и $\tilde{b}_1 = \max\{b_j{:}\ 1 \le j \le m\}$ ($\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \in \bar{R}_+^n$, $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m) \in \bar{R}_+^m$). Но если $X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ($X(\mathbf{A},\mathbf{B})$ – равномерная матрица), то из определения 1 следует, что $\Phi_2(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \tilde{a}_1$ и $\Phi_3(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1$. Следствием этого и (7.1) является утверждение [14–16].

Л е м м а 7. Любая равномерная матрица $\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ для произвольной пары векторов $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in R_{+,=}^{n,m}$ минимизирует функционалы (2.2) и (2.3), причем

$$\min_{X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})} \Phi_2(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \Phi_2(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \tilde{a}_1,$$

$$\min_{X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})} \Phi_3(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \Phi_3(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1.$$

Свойство матрицы быть равномерной можно рассматривать как внутреннее свойство матрицы: если X – произвольная (транспортная) матрица, то ее элементы сами формируют единственную пару векторов $(\mathbf{A},\mathbf{B})$, относительно которой $X \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и матрица X, возможно, равномерна.

Решение задачи минимизации функционалов (2.6) и (2.7) основано на том, что свойство матрицы быть равномерной есть наследственное свойство. Непосредственно из определения 1 следует лемма.

Л е м м а 8. Пусть $X = (x_{ij})$ – произвольная равномерная матрица порядка $n \times m$. Тогда любая ее подматрица $Y = (x_{i_r j_t})$ порядка $p \times q$ ($1 \le p \le n$, $1 \le q \le m$), где i_r, j_t – возрастающие последовательности индексов, $1 \le r \le p$, $1 \le t \le q$, также является равномерной.

Рассмотрим пару векторов, координаты которых упорядочены по невозрастанию (что не ограничивает общности при минимизации функционалов (2.1)–(2.10)). Пусть $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \bar{R}_{+,=}^{n,m}$ и $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\tilde{x}_{ij})$, $X = X(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (x_{ij})$ – две произвольные матрицы, первая из которых равномерна ($\tilde{X} \in \tilde{M}(\mathbf{A},\mathbf{B})$, $X \in M(\mathbf{A},\mathbf{B})$). На однотипных подматрицах $\tilde{Y}$ и Y матриц $\tilde{X}$ и X (элементы подматриц $\tilde{Y}$ и Y имеют совпадающие индексы) исследуем функционал (2.2). Если $\tilde{Y} = (\tilde{x}_{i_r j_t})$ и $Y = (x_{i_r j_t})$, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le m$, $1 \le r \le p$, $1 \le t \le q$, то для значений $\Phi_2(\tilde{Y})$ и $\Phi_2(Y)$, учитывая (7.1) и равномерность матрицы $\tilde{Y}$, имеем

$$\begin{aligned}\Phi_2(\tilde{Y}) &= \sum_{t=1}^{q} \max_r \tilde{x}_{i_r j_t} = \sum_{t=1}^{q} \tilde{x}_{i_1 j_t},\\ \Phi_2(Y) &= \sum_{t=1}^{q} \max_r x_{i_r j_t} \ge \sum_{t=1}^{q} x_{i_1 j_t}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Из множества всех подматриц $\mathcal{M}(X)$ матрицы $X = (x_{ij})$ (порядка $n \times m$) выделим подмножество всех тех подматриц $\mathcal{M}_k(X)$, $1 \le k \le n$, у которых первая строка образована k-й строкой матрицы X:

$$\mathcal{M}_k(X) = \{Y = (x_{i_r j_t}){:}\ Y \in \mathcal{M}(X),\ i_1 = k\}.$$

Применяя последнее обозначение, значения функционала (2.6) от матриц $\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и $X(\mathbf{A},\mathbf{B})$ можно выразить через функционал (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_6(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B})) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_k(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2(\tilde{Y}),\\ \Phi_6(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{Y \in \mathcal{M}_k(X(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2(Y).\end{aligned} \tag{7.3}$$

В соотношениях (7.2), определяющих или ограничивающих значения функционала (2.2), участвуют по одному разу все элементы первых строк подматриц $\tilde{Y}$ и Y. Из (7.2) для внутренних сумм в (7.3) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_k(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2(\tilde{Y}) &= \sum_{(\tilde{x}_{i_r j_t}) \in \mathcal{M}_k(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2((\tilde{x}_{i_r j_t})) =\\ &= \sum_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_k(\tilde{X}(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \sum_{t=1}^{q} \tilde{x}_{k j_t},\\ \sum_{Y \in \mathcal{M}_k(X(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2(Y) &= \sum_{(x_{i_r j_t}) \in \mathcal{M}_k(X(\mathbf{A},\mathbf{B}))} \Phi_2((x_{i_r j_t})) \ge\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\geq \sum_{Y \in \mathcal{M}_k(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \sum_{t=1}^{q} x_{kj_t}.$$

Так как все элементы k-х строк рассматриваемых матриц равнозначны в (7.4), то произвольные элементы $\tilde{x}_{kj}$ и x_{kj}, $1 \leq j \leq m$, встречаются в правых частях из (7.4) по $2^{n-k}2^{m-1} = 2^{n+m-k-1}$ раз. Поэтому

$$\sum_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_k(\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \sum_{t=1}^{q} \tilde{x}_{kj_t} = 2^{n+m-k-1} \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_{kj} = 2^{n+m-k-1} a_k,$$
$$\sum_{Y \in \mathcal{M}_k(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))} \sum_{t=1}^{q} x_{kj_t} = 2^{n+m-k-1} \sum_{j=1}^{m} x_{kj} = 2^{n+m-k-1} a_k. \tag{7.5}$$

Из соотношений (7.3)–(7.5) и равенств

$$\Phi_3(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_2(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_2(X(\mathbf{B}, \mathbf{A})),$$
$$\Phi_7(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_6(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) + \Phi_6(X(\mathbf{B}, \mathbf{A}))$$

следует теорема о минимизации функционалов (2.6) и (2.7) [16].

Т е о р е м а 5. Любая равномерная матрица $\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$ минимизирует функционалы (2.6) и (2.7), причем

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_6(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_6(\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n+m-k-1} \tilde{a}_k,$$
$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_7(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_7(\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{k=1}^{n} 2^{n+m-k-1} \tilde{a}_k + \sum_{k=1}^{m} 2^{n+m-k-1} \tilde{b}_k, \tag{7.6}$$

где векторы $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ и $(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m)$ построены из координат векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ упорядочиванием по невозрастанию.

8. Минимизация равномерными минимаксными матрицами. Выше все подготовлено для минимизации функционалов (2.4), (2.5) и решения транспортной модели Б. Следующая теорема является следствием лемм 5 и 7 [16].

Т е о р е м а 6. Для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$ каждая минимаксная равномерная матрица $\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ из $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ минимизирует функционалы (2.4) и (2.5), причем

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_4(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_4(\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \tilde{a}_1,$$
$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_5(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_5(\tilde{X}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \tilde{a}_1 + \tilde{b}_1.$$

Напомним, что минимаксное значение $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = c(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ вычислено в теореме 1, а в следующем пункте построена одна из матриц множества $\tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

9. Наследственно минимаксная матрица транспортного многогранника. Произвольная транспортная матрица X однозначно определяет такие пару векторов $(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X)$ и транспортный многогранник $M(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X)$, что $X = X(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X) \in M(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X)$. Возможно, $X(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X) \in M(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X; c(\mathbf{A}_X, \mathbf{B}_X))$ и свойство матрицы являться минимаксной можно рассматривать как внутреннее свойство матрицы.

О п р е д е л е н и е 6. Транспортная матрица X называется наследственно минимаксной, если каждая ее подматрица Y (в частности, $Y = X$) является минимаксной, т.е. $Y \in M(\mathbf{A}_Y, \mathbf{B}_Y; c(\mathbf{A}_Y, \mathbf{B}_Y))$.

Очевидно, если множество $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит только одну матрицу, то эта матрица наследственно минимаксна.

Приведем алгоритм вычисления элементов наследственно минимаксной матрицы произвольного транспортного многогранника $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Будем предполагать упорядоченность координат векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ по невозрастанию, что не ограничивает общности. Этот алгоритм основан на последовательном вычислении минимаксов (теорема 1) и указания элементов матрицы, равных соответственно минимаксу или нулю (лемма 3). Отметим, что указанная лемма образует четыре (возможно, менее четырех) подматрицы матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$, две из которых полностью определены, а элементы остальных подматриц, принадлежащих конкретным транспортным многогранникам, не определены. Переобозначим исходную пару векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1)$ и $X_1^1 = X_1^1(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Алгоритм, построенный ниже, последовательно заполняет элементами искомую матрицу $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, циклически применяя следующий шаг [14–16].

Ш а г А. Применение теоремы 1 и леммы 3.

Пусть $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ – произвольная пара векторов из $\bar{R}^{r,t}_{+,=}$, где $\mathbf{D} = (d_1, \ldots, d_r)$ и $\mathbf{E} = (e_1, \ldots, e_t)$.

Ш а г 1. Для пары векторов $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ составить систему линейных ограничений (4.1) и вычислить минимакс $c(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ (теорема 1).

Ш а г 2. Выбрать любое (можно наименьшее) значение $p \in Z$, $1 \leq p \leq r$, при котором $c(\mathbf{D}, \mathbf{E})p \leq e_1$ и $\delta_p(\mathbf{D}, \mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) = 0$ (лемма 4).

Ш а г 3. Применением леммы 3 для некоторых элементов матрицы $Y(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = (y_{ij})$ из $M(\mathbf{D}, \mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))$ положить

$$y_{ij} = \begin{cases} c(\mathbf{D}, \mathbf{E}), & 1 \le i \le p, \ 1 \le j \le l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})), \\ 0, & p < i \le r, \ l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) < j \le t. \end{cases}$$

Вычисленные элементы образуют две подматрицы матрицы $Y(\mathbf{D}, \mathbf{E})$: $\bar{Y}(c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) = (y_{ij})$, $y_{ij} = c(\mathbf{D}, \mathbf{E})$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))$, и $\bar{\bar{Y}}(c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) = (y_{ij})$, $y_{ij} = 0$, $p < i \le r$, $l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) < j \le t$ (если $p = r$ или $l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) = t$, то матрица $\bar{\bar{Y}}(c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))$ не существует).

Ш а г 4. Выделить в матрице $Y(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ следующие из существующих подматриц с неопределенными элементами: $Y' = (y_{ij})$, $1 \le i \le p$, $l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) < j \le m$, и $Y'' = (y_{ij})$, $p < i \le r$, $1 \le j \le l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))$ (при $l_p(\mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) = m$ и $p = r$ соответственно матрицы Y' и Y'' не существуют).

Ш а г 5. Для всех из существующих подматриц Y' и Y'' определить пары векторов $(\mathbf{D}', \mathbf{E}')$ и $(\mathbf{D}'', \mathbf{E}'')$, такие, что $Y' = Y'(\mathbf{D}', \mathbf{E}') \in M(\mathbf{D}', \mathbf{E}')$ и $Y'' = Y''(\mathbf{D}'', \mathbf{E}'') \in M(\mathbf{D}'', \mathbf{E}'')$. При этом воспользоваться формулами

$$\mathbf{D}' = (d_1 - c(\mathbf{D}, \mathbf{E})l_p(\mathbf{B}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E})), \ldots, d_p - c(\mathbf{D}, \mathbf{E})l_p(\mathbf{B}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))),$$

$$\mathbf{E}'' = (e_{l_p(\mathbf{E};\, c(\mathbf{D}, \mathbf{E})) + 1}, \ldots, e_t),$$

$$\mathbf{D}'' = (d_{p+1}, \ldots, d_r),$$

$$\mathbf{E}' = (e_1 - c(\mathbf{D}, \mathbf{E})p, \ldots, e_{l_p(\mathbf{E};\, c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))} - c(\mathbf{D}, \mathbf{E})p).$$

Очевидно, что $(\mathbf{D}', \mathbf{E}') \in \bar{R}_{+,=}^{p,\, t - l_p(\mathbf{E};\, c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))}$ и $(\mathbf{D}'', \mathbf{E}'') \in \bar{R}_{+,=}^{r-p,\, l_p(\mathbf{E};\, c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))}$. Отметим, так как матрица $Y(\mathbf{D}, \mathbf{E}) \in M(\mathbf{D}, \mathbf{E}; c(\mathbf{D}, \mathbf{E}))$, то для построенных и существующих пар векторов имеет место $c(\mathbf{D}', \mathbf{E}')$, $c(\mathbf{D}'', \mathbf{E}'') \le c(\mathbf{D}, \mathbf{E})$. Шаг А завершен.

А л г о р и т м. Построение наследственно минимаксной матрицы [16].

Рассмотрим произвольную пару векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}_{+,=}^{n,m}$. Пусть $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – искомая матрица, первоначально с неопределенными элементами удовлетворяющая определению 6. При построении наследственно минимаксной матрицы будем циклически применять шаг А, заменяя вычисленными элементами соответствующие неопределенные элементы матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Напомним, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1)$ и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X_1^1(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1) = X_1^1$. Нижний индекс рассматриваемых пар векторов и матриц означает номер обращения к шагу А. Верхний индекс необходим, чтобы различить пары векторов и матриц, образовавшиеся применением шага А.

Ш а г 1. Положить $k = 1$.

Ш а г 2. Для всех существующих пар векторов $(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q)$ применить шаг А. Очевидно, что количество рассматриваемых пар векторов не превосходит 2^{k-1}, т.е. $1 \le q \le 2^{k-1}$. Причем это количество равно 2^{k-1}, если из каждой пары векторов при предыдущих применениях шага А (в случае $k > 1$) выделялись по две пары векторов. В результате этого для каждой пары векторов $(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q)$ получим следующее.

1. Две матрицы, $\bar{X}_k^q(c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q))$ и $\bar{\bar{X}}_k^q(c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q))$, где каждый элемент первой равен $c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q)$, а вторая матрица – нулевая (если она существует).

2. Две пары векторов (если эти пары существуют) $((\mathbf{A}_k^q)', (\mathbf{B}_k^q)')$, $((\mathbf{A}_k^q)'', (\mathbf{B}_k^q)'')$, удовлетворяющих условию замкнутости, с координатами, упорядоченными по невозрастанию. Матрицы с неопределенными элементами $(X_k^q)'$, $(X_k^q)''$ принадлежит соответственно транспортным многогранникам $M((\mathbf{A}_k^q)', (\mathbf{B}_k^q)')$ и $M((\mathbf{A}_k^q)'', (\mathbf{B}_k^q)'')$ (шаг 4 шага А).

Ш а г 3. Заменить элементами подматриц $\bar{X}_k^q(c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q))$ и $\bar{\bar{X}}_k^q(c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q))$ соответствующие неопределенные элементы строящейся матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Ш а г 4. Переобозначить построенные (и существующие) пары векторов и матрицы с неопределенными элементами

$$((\mathbf{A}_k^q)', (\mathbf{B}_k^q)') = (\mathbf{A}_{k+1}^q, \mathbf{B}_{k+1}^q), \quad (X_k^q)' = X_{k+1}^q,$$

$$((\mathbf{A}_k^q)'', (\mathbf{B}_k^q)'') = (\mathbf{A}_{k+1}^{q+2^{k-1}}, \mathbf{B}_{k+1}^{q+2^{k-1}}),$$

$$(X_k^q)'' = X_{k+1}^{q+2^{k-1}}.$$

Ш а г 5. Если новое множество пар векторов непусто, то перейти к шагу 2; в противном случае – следующий шаг.

Ш а г 6. Искомая матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ построена.

Покажем, что матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, построенная приведенным алгоритмом, является наследственно минимаксной. Отметим справедливость следующего утверждения для указанной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Л е м м а 9. Пусть $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ – пара векторов, полученная из произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in$

$\in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ упорядочиванием координат по невозрастанию. Если $\tilde{X}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ – матрица, построенная алгоритмом, то матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, образованная перестановкой строк и столбцов матрицы $\tilde{X}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$, является равномерной. В частности, если $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$, то равномерна матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Доказательство содержится в лемме 3 и шаге А.

Следующее утверждение дополняет лемму 3.

Лемма 10. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ и для некоторого $p \in Z$, $1 \le p \le n$, имеет место $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})p \le b_1$ и $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$. Рассмотрим значения $k, q \in Z$, где $1 \le k \le p$, $1 \le q \le l_p(\mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$:

а) если $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – такая транспортная матрица, что $x_{kq} < c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, то $\max\{x_{ij}: 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} > c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, т.е. матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ не является минимаксной ($X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \notin M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$;

б) если $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – минимаксная матрица и X' – любая ее подматрица, содержащая элемент с индексами k и q, то X' – минимаксная матрица.

Доказательство. Пункт а) является следствием леммы 3. Так как для минимаксной матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ справедливо $\max\{x_{ij}: 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} = x_{kq} = c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, то из пункта а) следует пункт б).

Перейдем к матрице, построенной алгоритмом.

Лемма 11. Если для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ элементы матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ вычислены алгоритмом, то $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – наследственно минимаксная матрица.

Доказательство. Рассмотрим любую подматрицу $Y = (x_{i_t j_t})$ матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X_1^1(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1)$. Если Y – нулевая матрица, то она минимаксна. Пусть матрица Y содержит положительные элементы. Так как матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ равномерна (лемма 9), то и подматрица Y – равномерная матрица (лемма 8). Поэтому из условий $\mathbf{A} \in \bar{R}^n_+$ и $\mathbf{B} \in \bar{R}^m_+$ следует, что $x_{i_1 j_1}$ – наибольший элемент подматрицы Y, причем $x_{i_1 j_1} > 0$.

Обратимся к алгоритму: при всех значениях k и q матрицы $X_k^q = X_k^q(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q)$ являются минимаксными. Пусть k – наибольший номер, при котором существует матрица X_k^q, содержащая элемент с индексами i_1 и j_1, и, следовательно, $x_{i_1 j_1} = c(\mathbf{A}_k^q, \mathbf{B}_k^q)$ (значение k можно определить и через указанное равенство). Удалим из подматрицы Y все нулевые строки и столбцы (если такие есть). Тогда, как следует из алгоритма, полученная подматрица является подматрицей матрицы X_k^q. Применяя лемму 10, получим, что Y – минимаксная матрица. Лемма доказана.

Из последней леммы следует утверждение.

Лемма 12. Любой транспортный многогранник $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит наследственно минимаксную матрицу.

В алгоритме построения наследственно минимаксной матрицы имеется неопределенность в выборе значения $k \in Z$, при котором $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$. Но все же этот алгоритм приводит к однозначно определенной матрице. Более того, справедлива лемма.

Лемма 13. Каждый транспортный многогранник $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит только одну наследственно минимаксную матрицу.

Доказательство. Не ограничивая общности, положим, что $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$. Пусть $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X_1^1(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1) = (x_{ij})$ и $X'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x'_{ij})$ – наследственно минимаксные матрицы, первая из которых построена приведенным выше алгоритмом. Если $n = 1$, то очевидно, что $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Предположим, что равенство матриц справедливо, если количество координат вектора $\mathbf{A}$ не превосходит n, и положим $\mathbf{A} \in \bar{R}^{n+1}_+$. Отметим, что обе матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ минимаксны и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $X'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Пусть при первом применении шага **А** в построении матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ выбрано значение $p \in Z$, $c(\mathbf{A}, \mathbf{B})p \le b_1$ и $\delta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = 0$. Из леммы 3 следует, что подматрицы (x_{ij}), (x'_{ij}), $1 \le i \le p$, $l_p(\mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) < j \le m$, и (x_{ij}), (x'_{ij}), $p < i \le n+1$, $1 \le j \le l_p(\mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$, принадлежат соответственно транспортным многогранникам $M(\mathbf{A}_2^1, \mathbf{B}_2^1)$ и $M(\mathbf{A}_2^2, \mathbf{B}_2^2)$. Из наследственной минимаксности выбранных подматриц и индуктивного предположения следуют соответствующие совпадения этих подматриц. Поэтому $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Тем самым полностью завершено доказательство следующей теоремы [16].

Теорема 7: а) каждый транспортный многогранник содержит одну и только одну наследственно минимаксную матрицу;

б) матрица $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, построенная алгоритмом, является наследственно минимаксной;

в) любая наследственно минимаксная матрица равномерна.

Для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ обозначим (единственную) наследственно минимаксную матрицу $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Матрица $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (которую можно построить алгоритмом) минимаксна и равномерна. Поэтому она минимизирует функционалы (2.1)–(2.7). Отметим также, если транспортный многогранник $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ содержит единственную минимаксную матрицу $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ (теоремы 2 и 3), то эта матрица наследственно минимаксна и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}; c(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Пример 10. Применением алгоритма построим наследственно минимаксную матрицу $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, где $\mathbf{A} = (31, 26, 13, 8)$ и $\mathbf{B} = (21, 21, 15, 8, 8, 3, 2)$.

Шаг A для пары векторов $(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{B}_1^1) = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ определит следующее: минимаксное значение $c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 6$, причем $p = 2$, $l_2(\mathbf{B}; 6) = 3$, $\delta_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}; 6) = 0$; матрицу

$$X_1^1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ 6 & 6 & 6 & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{41} & x_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой подматрицы X_2^1 и X_2^2 имеют неопределенные элементы, причем $X_2^1 \in M(\mathbf{A}_2^1, \mathbf{B}_2^1)$, $X_2^2 \in M(\mathbf{A}_2^2, \mathbf{B}_2^2)$, где $\mathbf{A}_2^1 = (13, 8)$, $\mathbf{B}_2^1 = (8, 8, 3, 2)$, $\mathbf{A}_2^2 = (13, 8)$, $\mathbf{B}_2^2 = (9, 9, 3)$.

Применим шаг A для пар векторов $(\mathbf{A}_2^1, \mathbf{B}_2^1)$ и $(\mathbf{A}_2^2, \mathbf{B}_2^2)$. Получим, что $c(\mathbf{A}_2^1, \mathbf{B}_2^1) = 4$, $c(\mathbf{A}_2^2, \mathbf{B}_2^2) = 5$ и

$$X_2^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & x_{16} & x_{17} \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий раз шаг A можно не применять, так как подматрицы с неопределенными элементами матриц X_2^1 и X_2^2 являются 1-строчными: $x_{16} = 3$, $x_{17} = 2$, $x_{33} = 3$, $x_{41} = x_{42} = 4$. Наследственно минимаксная матрица построена

$$X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Минимизация наследственно минимаксными матрицами. Рассмотрим функционал (2.8). Очевидно, что задача минимизации этого функционала на множестве матриц транспортного многогранника имеет решение.

Обратимся к матричному понятию равномерности. Непосредственно из определения 1 следует лемма.

Лемма 14. Любая транспортная матрица, не являющаяся равномерной, имеет подматрицу из четырех элементов, которая также не является равномерной.

Следующее утверждение, основанное на лемме 14, содержит условие, при котором возможно уменьшить значение функционала (2.8).

Лемма 15. Пусть $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная транспортная матрица, не являющаяся равномерной. Тогда она имеет подматрицу из четырех элементов $Y = Y(\mathbf{A}_Y, \mathbf{B}_Y)$, для которой можно построить равномерную матрицу $Y' = Y'(\mathbf{A}_Y, \mathbf{B}_Y)$ $(Y, Y' \in M(\mathbf{A}_Y, \mathbf{B}_Y))$, такую, что справедливо следующее. Если $X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – матрица, образованная из матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ заменой подматрицы Y на подматрицу Y', то для функционала (2.8) имеет место $\Phi_8(X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})) < \Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Доказательство. Пусть подматрица Y не является равномерной. Множества всех подматриц $\mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}(X')$ матриц $X = X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $X' = X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ разобьем на подмножества в зависимости от количеств элементов подматриц Y и Y', содержащихся в этих подматрицах:

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}_0(X) \cup \mathcal{M}_1(X) \cup \mathcal{M}_2(X) \cup \mathcal{M}_4(X),$$
$$\mathcal{M}(X') = \mathcal{M}_0(X') \cup \mathcal{M}_1(X') \cup \mathcal{M}_2(X') \cup \mathcal{M}_4(X'),$$

где индекс $i \in \{0, 1, 2, 4\}$ означает количество элементов из Y и Y', содержащихся в соответствующих подматрицах (очевидно, что $\mathcal{M}_3(X) = \mathcal{M}_3(X') = \varnothing$).

Напомним, что функционал (2.8) выражается через функционал (2.1) от подматриц

$$\Phi_8(X) = \sum_{T \in \mathcal{M}(X)} \Phi_1(T) = \sum_{i \in \{0, 1, 2, 4\}} \sum_{T \in \mathcal{M}_i(X)} \Phi_1(T),$$

$$\Phi_8(X') = \sum_{T' \in \mathcal{M}(X')} \Phi_1(T') = \sum_{i \in \{0, 1, 2, 4\}} \sum_{T' \in \mathcal{M}_i(X')} \Phi_1(T').$$

Равенство $\sum_{T \in \mathcal{M}_0(X)} \Phi_1(T) = \sum_{T' \in \mathcal{M}_0(X')} \Phi_1(T')$ очевидно при любом выборе подматрицы Y. Непосредственно показывается, что можно выбрать и построить подматрицы Y и Y', такие, для которых справедливо следующее:

$$\sum_{T \in \mathcal{M}_4(X)} \Phi_1(T) > \sum_{T' \in \mathcal{M}_4(X')} \Phi_1(T'),$$

$$\sum_{T \in \mathcal{M}_2(X)} \Phi_1(T) > \sum_{T' \in \mathcal{M}_2(X')} \Phi_1(T'),$$

$$\sum_{T \in \mathcal{M}_1(X)} \Phi_1(T) \ge \sum_{T' \in \mathcal{M}_1(X')} \Phi_1(T').$$

Следовательно, $\Phi_8(X'(\mathbf{A}, \mathbf{B})) < \Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$.

Следствием этой леммы является утверждение.

Лемма 16. Матрица, минимизирующая функционал (2.8), должна быть равномерной.

Следующая теорема – одна из основных в статье. Она несложно доказывается индукцией по количеству координат первого вектора из пары векторов применением леммы 16 [16].

Теорема 8. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – произвольная пара векторов из $R^{n,m}_{+,=}$. Задача минимизации функционала (2.8) на матричном множестве $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет единственное решение, определяемое наследственно минимаксной матрицей $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_8(X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})), \quad (10.1)$$

причем $\Phi_8(X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})) < \Phi_8(X(^*\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ при $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Из теоремы 8 следует, что наследственно минимаксная матрица – единственное решение в модели В.

Следующее утверждение является очевидным следствием теорем 5 и 8 и леммы 16 [16].

Теорема 9. Для произвольной пары векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in R^{n,m}_{+,=}$ наследственно минимаксная матрица $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ является единственным решением задач минимизации функционалов (2.9) и (2.10) на транспортном многограннике $M(\mathbf{A}, \mathbf{B})$: при $k = 9$ или $k = 10$ имеет место

$$\min_{X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in M(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \Phi_k(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \Phi_k(X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})), \quad (10.2)$$

причем $\Phi_k(X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})) < \Phi_k(X(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$, если $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Тем самым показано следующее [16].

Теорема 10. Наследственно минимаксная матрица – это единственная матрица, минимизирующая одновременно все функционалы (2.1)–(2.10).

Значение функционала (2.8) от равномерной матрицы легко записать. Пусть $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \bar{R}^{n,m}_{+,=}$ и $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \tilde{M}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Для любой подматрицы Y матрицы $X(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ наибольший элемент расположен в первых строке и столбце. Если i и j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, – произвольные индексы, то количество подматриц, для которых эти индексы определяют наибольший элемент, равно $2^{n-i} \times 2^{m-j} = 2^{n+m-i-j}$. Поэтому

$$\Phi_8(X(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 2^{n+m-i-j} x_{ij},$$

где $X(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x_{ij})$ – равномерная матрица. Следовательно, доказана теорема [16].

Теорема 11. Если наследственно минимаксная матрица $\tilde{X}^*(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = (x^*_{ij})$ образована перестановкой строк и столбцов наследственно минимаксной матрицы $X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (x^*_{ij})$, то

$$\Phi_8(X^*(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 2^{n+m-i-j} \tilde{x}^*_{ij}. \quad (10.3)$$

Учитывая (7.6), (10.1), (10.2), формула (10.3) определяет наименьшие значения функционалов (2.8)–(2.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
2. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
3. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Высшэйш. шк., 1994.
4. *Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш.* Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1977.
5. *Триус Е.Б.* Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Сов. радио, 1967.
6. *Демьянинов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
7. *Моисеев Н.Н.* Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979.
8. *Миронов А.А.* О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов // ДАН. 1992. Т. 324. № 5.
9. *Миронов А.А.* Обобщенные графы с ограничениями для степеней вершин // ДАН. 1993. Т. 333. № 4.
10. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи. I // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 4.
11. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи. II // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 6.
12. *Хичкок* (*Hitchcock F.L.*). Distribution of a product from several sources to numerour loalities // J. math. phys. 1941. V. 20.
13. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Класс распределительных задач с минимаксным критерием // ДАН. 1994. Т. 336. № 1.
14. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Транспортные и сетевые задачи с минимаксным критерием // РАН. Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 1.
15. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Транспортные задачи с минимаксным критерием // ДАН. 1996. Т. 346. № 2.
16. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Минимакс в транспортных задачах. М.: Наука, 1997.
17. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
18. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.
19. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
20. *Гейл* (*Gale D.*). A theorem on flow in network // Pacific J. Math. 1957. V. 7.