Предисловие

Теория игр является современным разделом теории принятия решений, имеющим разнообразные приложения в социально-экономических, политических, организационных, экологических процессах. Предмет ее изучения - конфликтные ситуации, в которых сталкиваются интересы участников. По существу все аспекты человеческой деятельности затрагивают в той или иной степени интересы разных сторон и поэтому относятся к области теории игр. Однако в настоящее время методы теории игр в реальных процедурах управления (в первую очередь при построении организационных систем, формировании хозяйственного механизма и процедур политических переговоров, социально-экономического планирования и прогнозирования) широко не используются. Это объясняется как отсутствием теоретико-игровой подготовки у специалистов по управлению, так и тем, что классические игровые модели слишком абстрактны и с трудом адаптируются к реальным процессам управления и принятия решений.

В настоящее время различные разделы теории игр входят в программы обязательных и специальных курсов многих высших учебных заведений. Однако изучение и преподавание этой дисциплины сопряжено с серьезными трудностями, связанными с недостатком необходимой литературы.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой изложение современных аспектов теории игр и ее приложений. По объему и содержанию оно соответствует курсу "Исследование операций и теории игр", читаемому студентам специальности "Прикладная математика". Данное учебное пособие состоит из пяти глав и библиографического списка.

В первой главе, имеющей вводный характер, приводятся основные определения, классификация и математические модели задач принятия решений, принципы оптимальности.

Вторая глава посвящена играм в нормальной форме.

Предметом третьей главы являются смешанные расширения игр.

В четвертой главе рассматриваются кооперативные игры, арбитражные схемы.

Пятая глава посвящена вычислительным аспектам теории игр.

Каждая глава снабжена задачами и упражнениями для самостоятельной работы.

Настоящее учебное пособие написано не только с целью восполнения недостатка учебной литературы, но и с целью облегчить труд студентов в изучении основ теории игр, нового, весьма перспективного и бурно развивающегося раздела исследования операций.

Глава 1. Основные понятия теории игр

Первая глава носит характер неформального введения в теорию игр. Здесь указываются содержательные мотивы возникновения теоретико-игровых задач, обсуждаются основные понятия теории игр и ее место среди других математических дисциплин.

§ 1.1. Теория игр как раздел теории принятия решений

Теория игр как раздел математики возникла сравнительно недавно. Она связана с такими концептуальными понятиями как принятие решений, исследование операций, конфликт, принцип оптимальности и т. д.

Принятие решении - это достаточно широкое понятие. С точки зрения математического описания под **принятием решения** понимается выбор из не которого множества U элемента u**.** При этом определяется правило выбора $u \in U$ и целесообразность выбора.

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений называется **теорией исследования операций**. Таким образом, задачей теории исследования операций является построение количественных методов анализа процессов принятия решений во всех областях человеческой деятельности. Эта деятельность должна быть, во-первых, целенаправленна, т. е. направлена на достижение определенной цели или целей, и, во-вторых, при предварительном анализе целесообразности должны быть использованы количественные методы, т. е. формализованные (математические) модели.

Совокупность целенаправленных действий, т. е. действий, направленных на достижение некоторых целей, называется операциейией. Термины "операцияя", "исследование операций" впервые были введены при формализованном анализе военных операций. В настоящее время круг задач, входящих в теорию исследоаания операций, значительно расширен. Однако введенная ранее терминология устоялась и сохранилась.

При анализе операции следует ввести понятия оперирующей стороны и исследователя операций. **Оперирующей стороной** называется лицо или совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к поставленной цели.

Общепринятым аналогом оперирующей стороны является лицо, принимающее решение **(ЛПР). Исследователь операций** проводит исследование в интересах оперирующей стороны. Он преследует ту же цель, но сам, как правило, не принимает окончательного решения, а дает научно-обоснованные рекомендации, т. е. проводит качественный и количественный анализ и обосновывает целесообразность принятия тех или иных решений. Ответственность за принятие решений и окончательный выбор лежит на оперирующей стороне.

Исследователь операций и оперирующая сторона могут иметь различную информацию, так как во время анализа предстоящей операции и ее проведения информация может меняться, поступать в динамике. Кроме того, время для исследований может быть также различно.

Совпадение интересов оперирующей стороны и исследователя операций должно быть основано на хорошо построенном организационно-экономическом механизме, заинтересовывающем исследователя операций поддерживать именно те цели, которые преследует оперирующая сторона.

Рассмотрим простейшую модель исследования операций. Она включает: U — множество значений контролируемых факторов, которые выбираются оперирующей стороной; А - множество значений неконтролируемых факторов α, которые выбираются партнерами по операции или определяются внешней средой ("природой"); функцию $g(u, \alpha)$, отражающую целенаправленность действий оперирующей стороны (например, стремление к максимизации этой функции водностью описывает интересы оперирующей стороны и, соответственно, исследователя операций).

Примером неконтролируемых факторов, выбираемых целенаправленно партнерами по операции, являются военные действия противника, экономические планы взаимодействующих экономических субъектов и т. п. Если неконтролируемые факторы определяются "природными" условиями, то в этом случае модель исследования операций можно свести к модели взаимодействия с разумным партнером. Действительно, если исследователь операции и оперирующая сторона осторожны, то они считают, что природные факторы "выбираются" природой из условия минимизации целевой функции g.

Конфликтом (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон.

Он может быть задан следующими компонентами:

1) перечнем субъектов, участвующих в конфликте;

2) определением множеств их выборов;

3) интересами (мотивами), определяющими выбор.

Кроме того, при моделировании конфликта очень важно описать информационную обстановку, т. е. всю информацию, которая уже имеется у субъектов конфликта и может поступать со временем. Также необходимо учитывать возможность обмена информацией, добывания ее и добровольной передачи информации одним субъектом другому. Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой**. Таким образом, **теория игр** - это математическая теория принятия решений в условиях конфликта. Из этого определения следует, что теория игр есть важная часть теории исследования операций, изучающая вопросы принятия решений в конфликтных ситуациях.

Основной задачей игр является не описание, а разрешение конфликтов, т.е. построение компромиссных взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон.

Если удается формализовать (смоделировать) конфликт и определить **принцип оптимальности,** т.е. принцип выбора оптимального решения в игре, то получается математическая задача, которую можно решать математическими методами, без учета ее содержательной постановки.

В теории игр используется разнообразный и хорошо разработанный математический аппарат (теория множеств, теория вероятностей, топология, теория функций, теория дифференциальных уравнений, методы оптимизации, вариационное исчисление, динамическое программирование, оптимальное управление и др.). Однако следует подчеркнуть, что математические модели теории игр (теоретико-игровые модели) имеют свою специфику. Они описывают процесс принятия решений, которые трудно формализовать. Поэтому в рамках теории игр развивается специфический математический аппарат, направленный на моделирование процессов принятия решений в сложных социально-экономических, политических и прочих конфликтах. При этом возникают новые ранее не изученные математические задачи.

Как в любой математической дисциплине, в теории игр прослеживается несвязанное развитие двух направлений:

1) "чисто" математическое, определяемое внутренней логикой развития теории игр;
2) прикладное, ориентированное на широкий круг практически интересных задач.

Возникновение теории игр и термина "игра" связано с попыткой использовать математику в задачах анализа ситуаций, возникающих в азартных играх, анализа конфликтных ситуаций в военном деле, при принятии решений в условиях неопределенности, поиска компромисса в неантагонистических конфликтах и т.д.

При анализе возможностей приложений теории игр следует обратить внимание на то, что при моделировании конфликтных ситуаций, например процессов принятия решений в сложных социально-экономических системах, трудность вызывает формализация мотивации поведения этой системы.

Сложность практических задач анализа конфликтных ситуаций приводит к необходимости использования современных методов анализа и вычислительной техники. Для решения задач принятия решений оказывается недостаточным ограничиться какой-то одной "универсальной" моделью или даже системой моделей. Необходимо иметь "инструмент" - системный проблемно-ориентированный комплекс, представляющий собой систему (сеть) ЭВМ и математическое обеспечение (система моделей, методов, алгоритмов и программ), ориентированную на решение конкретных классов проблем. Для создания и использования такого мощного инструмента необходимо привлечение коллектива людей различных (далеко не родственных) специальностей: системных аналитиков, специалистов в прикладной области, математиков, программистов и т. д. Фактически построение такого инструмента эквивалентно построению языка общения всех участвующих в работе специалистов и ЛПР.

§1.2. Основные понятия и классификация игр

Теория игр занимается исследованием математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях. Формальное описание принятия решений удобно разбить на две части:

1) математическая модель конфликтной ситуации или игра — описание конфликтной ситуации, включающее в себя описание субъектов, принимающих решения, их возможностей и интересов;

2) принцип оптимальности - описание правил рационального поведения игроков.

Оптимальность и неоптимальность того или иного исхода конфликта зависит от интересов и возможностей его участников. В этом смысле принцип оптимальности является функцией игры. Можно рассматривать различны принципы оптимальности, но если один из них выбран, то для каждой игры можно однозначно указать множество ее рациональных исходов.

Математическая модель конфликта и принцип оптимальности дают полное описание принятия решений в условиях конфликта. Именно в этом смысл они весьма тесно взаимосвязаны. Однако на начальной стадии обучения проще их рассматривать отдельно.

Задать игру можно различными способами. Здесь нам удобно воспользоваться **нормальной формой** описания игр. Другие способы задания игр будут рассмотрены в последующих главах.

В описании игры можно выделить следующие элементы:

1) коалиции действий - совокупность действующих совместно в данной конфликтной ситуации субъектов;

2) коалиции интересов - множество одинаково заинтересованных в исходе конфликта сторон;

3) множества возможных выборов каждой из коалиций действия;

4) описание предпочтений каждой из коалиций интересов;

5) множество возможных исходов конфликта.

Появление слова "коалиция" указывает на тот факт, что участниками конфликта могут быть не только отдельные лица, но и большие, сложно организованные группы лиц. Коалиции действия и интересов могут не совпадать. Например, пассажиры самолета бывают заинтересованы в его скорейшем прибытии к месту назначения и, таким образом, образуют коалицию интересов, однако они не могут предпринять никаких действий, направленных на достижение этой цели, т. е. не являются коалицией действия. Если коалиция действия совпадает с коалицией интересов, то такую монолитную коалицию можно считать одним лицом, поэтому ее называют игроком. Если все коалиции действия совпадают с соответствующими коалициями интересов, то игру называют **бескоалиционной**, а ее участников - **игроками**.

Множество возможных исходов конфликта определяет совместные ограничения на действия участников конфликта. Если такие ограничения задаются формально (в виде прямого произведения множеств), то соответствующую называют **игрой без запрещенных ситуаций,** если эти ограничения существенны, то **— игрой с запрещенными ситуациями.**

Для принятия решений необходимо обладать определенной информацией. При этом как сам выбор из множества стратегий, так и ожидаемый результат зависят в значительной степени от информации, которой обладает игрок к моменту принятия решения: о множествах выбора, мотивах поведения или принципе оптимальности игроков, о природных неопределенных факторах, той информации, которую сейчас игрок не имеет, но которая будет поступать к нему, в том числе та, которой он будет обладать в результате добровольного обмена или ее добывания. Поэтому целесообразно дать общее определена **стратегии.** Если множество Bi описывает информацию, которую коалиция (игрок) i использует при принятии решений, то под стратегией будем понимать отображение $u_i\colon B_i \to U_i$, где U_i - множество выборов или управлений коалиции действия i. В результате выбора каждой коалиции действия элемента и множества управлений определяется **исход конфликта.** Соответственно выбор коалициями действия стратегии определяет ситуацию в множестве стратегий $U=\prod_{i=1}^{n} U_i$. Таким образом, можно трактовать множество управлений U как "физические", а множество стратегий U как "физические" и информационные возможности.

Заинтересованность j-го субъекта формализуется, как правило, функцией выигрыша, которая определяется отображением $g_j\colon U \to R$, где U - множество исходов. Выбор стратегии или управления определяется принципом оптимальности.

Таким образом, для описания конфликтной ситуации необходимо задал систему

$Г=\{N, K_g, K_и, \{U_i\}_{i \in K_g}, \{g_j\}_{j \in K_и}, S\}$,

где

N -множество игроков,

K_g - множество коалиций действия,

$K_и$ - множество коалиций интересов,

Ui - множество выборов коалиции $i \in K_g$,

g_j - функция выигрыша коалиции $j \in K_и$,

S - множество возможных исходов игры.

Игры, как и все задачи исследования операций бывают статическими и динамическими.

Фиксация параметров, а также различная их суперпозиция позволяют классифицировать игры. Рассмотрим основные классы теоретико-игровых моделей.

В качестве первого классификационного признака возьмем множество игроков. Различают игры 2-х лиц и игры n лиц (n>2). Игры 2-х лиц называются **антагонистическими,** если игроки преследуют противоположные цели. Если в антагонистической игре игрок 1 стремится максимизировать свой выигрыш g_1, то целью игрока 2 является минимизация выигрыша игрока 1, так что $g_1 = -g_2$. Поэтому антагонистическую игру можно задать следующим образом:

$Г=(U_1,U_2,g)$,

где g - выигрыш игрока 1.

Антагонистические игры получаются не только при описании конфликтов типа военных, но и при описании игры с природой, когда исследователь операции или оперирующая сторона проявляет осторожность при принятии решений в условиях неопределенности.

Можно говорить так же о неантагонистических играх 2-х лиц ($g_1 \neq -g_2$). Другой важный принцип классификации связан с вопросом о допустимости образования тех или иных коалиций. Если в игре образование коалиций недопустимо, то такая игра называется **бескоалиционной.** Она определяется заданием множества игроков, пространств их стратегий и набором их функций выигрыша.

К бескоалиционным играм могут быть сведены также игры, в которых $К_g$=$К_и$. В истинно же коалиционных играх разрешены такие коалиции, что $К_g \neq К_и$. Среди подобных игр наиболее распространены **кооперативные игры,** в которых образуется одна коалиция. Целью этой коалиции является максимизация суммарного выигрыша, с тем чтобы впоследствии разделить его между членами коалиции по соглашению.

Отдельный класс составляют игры с бесконечным числом игроков.

Следующим признаком классификации являются стратегии. Если множество стратегий всех игроков конечно, то игра называется **конечной.** Когда хотя бы одно из множеств U_i , $i=\overline{1,n}$, бесконечно, игра называется **бесконечной.** Для теоретического анализа более удобны конечные игры, однако они имеют меньшую практическую ценность, чем бесконечные.

Игры можно квалифицировать и в соответствии с формой их задания. При этом различают позиционные игры и игры в нормальной форме. Если процесс принятия решений описывается в виде динамического процесса, где игроки выбирают свои стратегии последовательно по шагам, обладая при этом определенной информацией при каждой шаге выбора стратегии, то такие игры называются **позиционными.** Классическим примером такой игры являются шахматы. Если в динамических играх конфликт моделируется дифференциальными уравнениями, то такие игры называют **дифференциальными.** Если же в игре стратегия представлена как одноактный выбор, то такая игра считается заданной в **нормальной форме.**

Интерес представляют игры с **непрерывными функциями выигрышей:** классы выпуклых, вогнутых, выпукло-вогнутых игр.

Кроме упомянутых классов существует множество их модификаций. С достаточно полной классификацией игр, равно как и с другими важными вопросами теории, можно ознакомиться, например, в [1].

При проведении предварительного анализа конфликта использование исходных множеств управлений U_i может привести к нежелательному для оперирующей стороны результату: либо решения не существует, либо (если это решение существует) количественная оценка этого решения неудовлетворительна. Тогда целесообразно расширить класс используемых управлений. Расширения класса стратегий можно добиться путем расширения либо области определения функции (информированности игроков), либо за счет расширения множества значений, т. е. физических возможностей. Достаточно традиционным способом расширения множества значений является использование выпуклой оболочки множества управлений путем перехода в пространство вероятностных мер. Исходные элементы множества U_i называются **чистыми стратегиями,** а их произвольная выпуклая комбинация (мера) **— смешанной стратегией.**

Существует два способа реализации смешанных стратегий:

1) введение искусственной рандомизации, т. е. использование функции распределения на исходном множестве управлений;

2} введение повторения, т.е. проведения конфликта многократно.

При этом с определенной частотой выбирают некоторые элементы исходного множества. В обоих способах соответствующим образом определяются функции выигрыша.

При расширении класса стратегий прежде всего преследуется задача не построения более сложной модели конфликтной ситуации, адекватно отражающей реальность, а осмысленного и целенаправленного изменения реальности и построения соответственно этой усложненной реальности более сложной модели конфликтной ситуации. При этом следует учитывать и затраты на расширение множества стратегий: проведение повторных операций, увеличение информированности и т. д. Далее эти затраты должны быть соотнесены с тем выигрышем, который можно получить дополнительно за счет расширения класса стратегий.

Наиболее интересная постановка проблемы расширения класса стратегий связана с увеличением информированности игроков. Действительно, чем больше неопределенность, тем больше разброс в ожидаемом результате при реализации выбранной стратегии. Таким образом, оказывается очень выгодно делать ситуацию более определенной. Для этого необходимо четко фиксировать ожидаемую информацию, уметь ее структурировать с целью возможности ее математической записи, оценивать результаты реализации стратегий, построенных в заданной информации, и, наконец, видеть пути увеличения объема информации и оценивать, с одной стороны, ее результат и, с другой стороны, затраты на получение дополнительной информации.

§ 1.3. Принципы оптимальности

Важнейшей характеристикой выбранного решения является целесообразность, или в более строгой формулировке, оптимальность этого решения. Под принципом оптимальности φ понимается отображение $\varphi : \Gamma \rightarrow 2^{U}$, которое ставит в соответствие игре Γ (или некоторому классу игр) подмножество множества ее исходов. При этом $\varphi(\Gamma)$ обозначает решение задачи или реализацию принципа оптимальности. При анализе игры существуют две взаимосвязанные проблемы:

1) сделать оптимальный выбор**;**

2) оценить результат при сделанном выборе.

Для конфликта, в котором участвуют не менее двух игроков, понятие оптимального решения не может быть определено однозначно, т. е. в общем случае игр n лиц отсутствует единое и объективное понятие оптимальности. Таким образом, целесообразно анализировать конкретные, более частные виды конфликта, где такое понятие оптимальности формализуется полностью, либо удается максимально расширить возможности формализации этого понятия.

Рассмотрим примеры полной формализации принципа оптимальности.

Для игры в случае полной независимости игроков функции выигрышей имеют вид $g_i(u) = g_i(u_i)$, $i = 1,n$. При этом множество исходов равняется прямому произведению множеств выборов $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$. Тогда для любого игрока оптимальным выбором естественно считать только выбор из множества элементов $\left[\begin{array}{l} u_i \in Arg \max g_i(u_i), \\ \quad u_i \in U_i, \end{array}\right.$ реализующих максимум функций $g_i(u_i)$. Данная игра эквивалентна задаче оптимизации.

Так же единственным образом определяется оптимальность в играх многих лиц, для которых $g_i(u) = g(u)$ для **всех** i, т. е. в играх с совпадающими интересами игроков. При разумном поведении игроков (обмене информации, координации усилий по выбору соответствующих стратегий) задача также сводится к задаче оптимизации.

Термин "оптимальный выбор" однозначно понимается при исследовании антагонистической игры $\Gamma = <U,V,g(u,v)>$, в которой существует седловая точка, т.е. выполняется равенство

$$\min_{u_2} \max_{u_1} g(u_1,u_2)= \min_{u_1} \max_{u_2} g(u_1,u_2)= g(u_1^0,u_2^0)\ .$$

Обратим внимание на то, что в приведенных примерах фактически задачи выбора оптимального решения и оценки ожидаемого результата взаимосвязана, так. как при выборе оптимального решения однозначно определяется ожидаемый результат (выигрыш) игроков.

В общем случае игры многих лиц такая однозначность отсутствует, что не только усложняет решение игры, но и привносит принципиальную трудность в определение оптимального, или рационального выбора.

Отсутствие однозначного соответствия между выбранными стратегиями и оцениваемым выигрышем иллюстрирует следующий пример.

Пусть функция выигрыша имеет вид

$$g_i\ (u) = f_i(u_i) + \psi_i(u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n)\ .$$

Пусть игроки стремятся максимизировать свои функции выигрыша и не имеют информации о действиях партнеров. Тогда выбор оптимальной стратегии не представляет труда и в некотором смысле однозначен. Но оценка получаемого выигрыша не однозначна. Действительно, выигрыш игрока будет зависеть от выбора всех оставшихся.

Таким образом, принцип оптимальности является наиболее сложным и важным при принятии решений. Выбор того или иного принципа оптимальности неоднозначен. Причины этой неоднозначности заключаются в природе конфликтной ситуации. В связи с этим принцип оптимальности должен отвечать следующим условиям:

1) должен быть таким, чтобы существовал оптимальный выбор, т. е. отображение φ не приводило к пустому множеству рациональных выборов;

2) должен максимально сужать степень неопределенности как в множестве выборов, так и в оценке ожидаемого результата;

3) должен быть прост и понятен, чтобы можно было практически вычислить множество рациональных решений и оценить с большой степенью точности ожидаемый выигрыш; более того, полученные результаты должны хорошо интерпретироваться на содержательном уровне;

4) должен обладать устойчивостью, т. е. решение игры должно мало меняться при небольшом изменении параметров модели конфликтной ситуации;

большинство используемых принципов оптимальности являются неустойчивыми и нуждаются в некоторой коррекции или регуляризации.

Между выбором принципа оптимальности и информированностью игроков в конфликтной ситуации существует тесная связь. Например, пусть игрок i при выборе своей стратегии u_i из множества U_i будет знать выбор оставшихся игроков. Тогда он может, максимизируя функцию выигрыша, выбрать свою стратегию в виде абсолютно оптимальной стратегии $u_i^a(u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n)$ из условия

$$g_i((u_1,\dots,u_{i-1}, u_i^a(\cdot),u_{i+1},\dots,u_n)=\max_{u_i\in U_i} g_i(u_1,\dots,u_n).$$

Более того, в этом случае однозначно оценивается и выигрыш игрока i.

Рассмотрим игру, в которой функции выигрыша и множества выборов имеют вид

$$\left[\begin{array}{l} g_1(u_1,u_2)=u_1+u_2, \\ g_2(u_1,u_2)=u_1\cdot u_2, \\ U_i=[-1,1], i=1,2. \end{array}\right.$$

Пусть игрок 1 знает множества выборов и функции выигрыша обоих игроков. В этой игре игроку 1 в качестве стратегии, максимизирующей его выигрыш, нужно выбрать такую стратегию, которая включала бы в себя в качестве составного элемента сообщение информации о своем выборе игроку 2. Тогда, выбирая $u_1 = 1$ и сообщая об этом игроку 2, игрок 1 в условиях этой информации может оценить свой выигрыш как максимально возможный.

Таким образом, в приведенных примерах информация о конфликтной ситуации и возможность добровольного обмена информацией полностью и однозначно определяют оптимальное поведение игроков.

При выборе принципа оптимальности проявляются тенденции **изоляционизма** и **коллективизма.** Изоляционизм заключается в стремлении каждого игрока к тому, чтобы выбор его оптимального решения в минимальной степени зависел от других игроков. Как правило, это достигается введением нового вспомогательного критерия эффективности игрока i, в минимальной степени зависящей от $u_j, j\neq i$. В идеале вспомогательный критерий имеет вид $\Psi_i(u_i)$.

Коллективизм основан на координации усилий с целью получения большего выигрыша каждым игроком. Координация усилий может заключаться, например, в выборе общей цели — общего критерия эффективности для группы (коалиции) игроков.

Заметим, что переход к индивидуальному принципу оптимальности общепринято использовать в моделях, в которых функции выигрыша игроков содержат случайные параметры. Тогда функцию выигрыша заменяют ее математическим ожиданием.

В случае антагонистической игры или игры с природой игрок вместо функции $g_1(u_1,u_2)$ максимизирует $\Psi(u_i) = \min\limits_{u_2 \in U_2} g_1(u_1,u_2)$. Такой принцип оптимальности принято называть **принципом максимина.** Принципу максимина, или принципу максимального гарантированного результата, можно придать более широкий содержательный смысл. Так называемый обобщенный принцип максимального гарантированного результата в полной мере учитывает имеющуюся информацию, а также информацию, которая может поступить в процессе принятия решений. Так, в предыдущем примере антагонистической игры при использовании принципа максимального гарантированного результата первый игрок имел информацию о своей функции выигрыша и множестве выборов, а самое главное, он имел информацию о множестве выборов своего партнера. В этих условиях независимо от функции выигрыша партнера игрок 1 гарантированно может получить

$$\max_{u_1 \in U_1} \min_{u_2 \in U_2} g_1(u_1,u_2).$$

Для более конкретного описания обобщенного принципа максимального гарантированного результата рассмотрим ситуацию, когда на базе исходной игры $\Gamma = <\{1,2\};\ U_1, U_2, g_1, g_2>$ мы рассмотрим ее расширение $<\{1,2\};$ $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2>$.

Предположим, что существует проекция: $\pi:\ \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \to U_1 \times U_2$. При этом считаем, что игрок 1 знает функцию выигрыша g_1, множество выборов U_1, множество стратегий $\tilde{U}_1$, что говорит об информированности его о действиях партнеров. Далее он знает об аналогичной информированности о нем партнера, т. е. имеет информацию о множестве $\tilde{U}_2$. Наконец, пусть он знает правило поведения партнера, т. е. множество $R(\tilde{u}_1)$ рациональных выборов при фиксированной стратегии $\tilde{u}_1 \in \tilde{U}_1$. Тогда максимальный гарантированный результат игрока 1 определяется величиной

$$L_1 = \max_{\tilde{u}_1 \in \tilde{U}_1} \min_{\tilde{u}_2 \in R(\tilde{u}_1)} \tilde{g}_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2).$$

Приведенные примеры иллюстрируют важность фиксации информированности игроков друг о друге. От информированности зависит рациональный выбор игроков и ожидаемый результат.

Величина L_i может не устроить исследователя операции или оперирующую сторону (игрока i). Тогда у игрока i есть, по крайней мере, два способа поведения: либо снова индивидуально попытаться добыть еще какую-то информацию, чтобы расширить свои возможности, либо вступить в коллективные действия. Подчеркнем, что игроки будут вступать в коалиции только тогда, когда им может быть предложен выигрыш не меньше того, который они могут получить индивидуально, независимо от взаимодействия с другими партнерами.

Основными свойствами рациональности коллективных принципов оптимальности являются:

- **Выгодность** (индивидуальная выгодность). По крайней мере, необходимо, чтобы каждому игроку в коалиции был дан выигрыш не меньший, чем L_i, который он может обеспечить (гарантировать) себе сам.
- **Устойчивость.** Устойчивость понимается в том смысле, что никому из игроков не выгодно уклоняться от принятых на себя обязательств.
- **Справедливость.** Справедливость, как правило, понимается как некоторая симметричность в положении игроков, т. е. в некотором смысле их равноправие.

Одним из общепринятых коллективных принципов оптимальности является **ситуация равновесия.**

Ситуация u^0 называется ситуацией равновесия, если выполнены следующие условия для любого i:

$$g_i(u^0) = \max_{u_i \in U_i} g_i(u_1^0, \ldots, u_{i-1}^0, u_i, u_{i+1}^0, \ldots, u_n^0).$$

Это определение отражает одно из основных свойств коллективного решения -свойство устойчивости. Действительно, ни одному из игроков не приносит дополнительной выгоды отклонение от равновесной ситуации, если партнеры ее придерживаются.

Основные недостатки ситуации равновесия:

1) она не всегда существует;
2) в случае неединственности ситуации равновесия нет разумного основания выбора одной из них;
3) могут существовать неравновесные ситуации, в которых выигрыши

   всех игроков превышают их выигрыши в ситуации равновесия.

Стандартным способом устранения первого недостатка является расширение класса стратегий путем введения смешанных стратегий, либо использование дополнительной информированности.

Значительно большую трудность представляет наличие нескольких ситуаций равновесия.

Рассмотрим игру, которую в литературе называют "семейный спор". В этой игре множество выборов игроков конечно и состоит из двух элементов. Функции выигрыша игроков задаются соответственно матрицами:

$$M_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Игрок 1 выбирает строки, игрок 2 - столбцы с целью получения максимально возможного выигрыша.

В этой игре имеется две ситуации равновесия с выигрышами (2,1) и (1,2), которые реализуются при выборе игроками одинакового номера строк и столбцов. Например, в одной из равновесных ситуаций (u_1^0=1, u_2^0=1), в которой игрок 1 выбирает первую строку, а второй игрок - первый столбец, игрок 1 получает выигрыш, равный 2, а игрок 2 - единице. Трудность принятия решения заключается в том, что в этом примере ситуации равновесия неэквивалентны. Первому игроку более выгодна ситуация равновесия (1,1), а второму - (2,2). Более того, если даже один из игроков захочет "уступить" партнеру, то нет никакой гарантии, что партнер не поступит точно также, в результате чего оба получат по нулю. Именно поэтому ситуация равновесия, вообще говоря, не является индивидуальным способом выбора решения. Действительно, для их реализации необходима договоренность придерживаться ситуации равновесия вообще, а в случае их неединственности - о выборе конкретного решения из множества устойчивых.

Выбор ситуации равновесия более или менее удовлетворителен, если ситуация равновесия u° единственная и строгая, т. е. для любого i и любой $v_i \neq u_i^0$

$$g_i(u^0)>g_i(u_1^0,\dots,u_{i-1}^0,v_i,u_{i+1}^0,\dots,u_n^0).$$

Однако и в этом случае могут быть выборы и более выгодные, чем в равновесной ситуации для всех игроков одновременно.

Примером может служить хорошо известная задача "дилемма заключенного", в которой игроки стремятся максимизировать выигрыш, заданный в виде следующих матриц:

$$M_1=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 1\end{pmatrix}; \qquad M_2=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Единственной и строгой ситуацией равновесия в этой игре является ситуация, приводящая к выигрышам (1,1), равному максиминному выигрышу для каждого игрока.

Однако более выгодной (но не устойчивой) является ситуация, которой соответствует выигрыш (5,5).

Ситуации, при отклонении от которых один или несколько игроков могут получить строго больший выигрыш только за счет своих партнеров, называются **ситуациями, оптимальными по Парето.**

Дадим строгое определение этого понятия.

Определение 1.1. *Ситуация u^n называется оптимальной по Парето, если не существует $u \in U$, для которого выполняются неравенства $g_i(u) \geq g_i(u^n)$, причем хотя бы одно из них строгое.*

Выбор оптимальной по Парето точки относится к коллективным принципам принятия рациональных решений.

Однако множество оптимальных по Парето точек содержит, как правило, более одного элемента. Поэтому возникает вопрос о выборе конкретной точки из этого множества. Именно вследствие этого необходимы дополнительные предположения и схемы, приводящие к однозначному и "справедливому" исходу.

Обобщением понятия ситуации равновесия по Нэшу является понятие ξ-равновесия Ситуация называется **ситуацией ξ - равновесия,** если для любой коалиции игроков $S \in \xi$ невыгодно отклоняться от этой ситуации, когда остальные игроки придерживаются выбранных стратегий. Ситуация называется **ситуацией сильного равновесия, если** $\xi = 2^N$, т. е. от ситуации не выгодно отклоняться ни одной коалиции, в том числе коалиции из всех игроков.

- **Замечание 1.** Анализ выгодности вступления в коалицию должен проводиться с учетом возможного изменения взаимной информированности игроков, а следовательно, и изменения класса их стратегий. Таким образом, эта задача в значительной степени усложняется. Однако именно здесь можно добиться наиболее интересных с прикладной точки зрения результатов. Например, можно при более сложных стратегиях получать ситуации, одновременно являющиеся ситуациями равновесия по Нэшу и оптимальными по Парето. Эти эффекты хорошо реализуются в динамических играх.
- **Замечание** 2. При коллективных принципах оптимальности решения одним из важных моментов является выбор общего критерия. Например, для некоторого класса игр введение общего критерия в виде взвешенной суммы критериев игроков и его максимизация приводят к тому, что, меняя коэффициенты, можно получить все точки из множества точек, оптимальных по Парето. Выбор свертки с определенными параметрами удобен потому, что эта параметры подлежат неформальному обсуждению и выбору партнерами по коалиции. Например, если выбрать свертку $g_s(u) = \min\limits_{i \in S} \lambda_i\, (g_i(u) - g_i^0)$, то выигрыш коалиции S интерпретируется следующим образом. Величина g_i^0 является нижней гранью результата, на который может согласиться игрок. В частности, это может быть максимальный гарантированный результат, который он получит индивидуально. Тогда параметры λ_i можно интерпретировать как выбор некоторого предпочтения между игроками.