РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА

В.А. Горелик, В.И. Ерохин

ОПТИМАЛЬНАЯ МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО МИНИМУМУ ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЫ

Москва 2004

УДК 512.643:519.85

Ответственный редактор
Чл.-корр. РАН Ю.Н. Павловский

В монографии приведено систематизированное описание методов решения задач оптимальной многопараметрической (матричной) коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений с критериями оптимальности, построенными с использованием евклидовой нормы. Исследуются задачи коррекции, в которых часть элементов матрицы коэффициентов системы или часть элементов расширенной матрицы зафиксированы (задачи с фиксированными строками, задачи с фиксированными столбцами и задачи с совокупностью фиксированных строк и столбцов). Предлагаются модификации для критерия оптимальности коррекции с помощью взвешивании элементов матрицы коррекции как посредством ее левого и правого умножения на невырожденные весовые матрицы, так и с использованием индивидуальных неотрицательных весов для каждого элемента. Анализируются необходимые и достаточные условия существования решения задач матричной коррекции, вид оптимальных матриц коррекции и вид множеств решений скорректированных систем. Формулируются возможные обобщения и модификации постановок задач матричной коррекции, а также способы их регуляризации, особенно актуальные в условиях, когда задачи матричной коррекции в классической постановке решений не имеют. Рассматривается связь задач матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений по минимуму евклидовой нормы с классическим и обобщенным методом наименьших квадратов, а также связь модифицированных (регуляризованных) задач коррекции с классической регуляризацией систем линейных алгебраических уравнений по Тихонову, регуляризованным обобщенным методом наименьших квадратов и с Nongeneric TLS.

Рецензенты: А.А. Петров,
А.Г. Тимушев

Научное издание

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ....- 4 -

1. Постановки задач ....- 6 -

2. Сингулярное разложение, задача о матричной аппроксимации, наилучшей в смысле минимума евклидовой нормы, и задача $Z_{total}(A,b)$ ....- 8 -

3. Псевдообращение, классический метод наименьших квадратов и задача о минимальной по евклидовой норме матрице, разрешающей систему $Ax = b$ при фиксированных x и b ....- 11 -

4. Условия существования решения задач матричной коррекции и вид множеств решений скорректированных систем ....- 15 -

5. Дополнительные сведения о задачах $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, альтернативные формулировки необходимых и достаточных условий существования решения ....- 96 -

6. Использование взвешенной евклидовой нормы в задачах $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ ....- 128 -

7. Регуляризация задач матричной коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы ....- 145 -

8. Численные примеры ....- 163 -

9. Замечания, краткие исторические сведения и комментарии к списку литературы....- 183 -

Литература....- 188 -

Введение

Несовместные системы линейных алгебраических уравнений представляют собой частный случай несовместных моделей. В классическом смысле подобные модели лишены интереса, поскольку с их помощью невозможно напрямую (непосредственно) получить содержательную информацию об исследуемом объекте. В то же время в современной математике уже не ставится под сомнение содержательность проблемы коррекции несовместных моделей. Достаточно очевидно, что несовместность любой модели, и в том числе линейной, может быть обусловлена неточностью или неопределенностью исходных данных (например, при обработке результатов физического эксперимента), а также некорректностью требований, предъявляемых к модели (или к объекту). Так, в линейном программировании (ЛП) при рассмотрении прикладных задач экономического характера несовместность системы ограничений может быть вызвана несогласованностью ресурсов с плановым заданием. В указанном контексте решение задачи коррекции несовместной модели позволяет получить необходимую информацию как о полезном сигнале, так и о шуме, если речь идет об обработке наблюдений, или выявить «узкие места», если речь идет, например, о задачах линейного программирования.

Данная работа посвящена исследованию методов оптимальной многопараметрической коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений с критериями, основанными на евклидовой матричной норме. Подобная тематика тесно связана с двумя направлениями: обобщенным методом наименьших квадратов, основная гипотеза которого заключается в предположении о нормально распределенных ошибках в зависимых и независимых переменных линейной модели, и коррекцией системы ограничений несобственной задачи ЛП в канонической форме.

В первых трех главах изложены постановки основных задач, а также приведены некоторые сведения из линейной алгебры, такие, как сингулярное разложение, задача аппроксимации некоторой матрицы матрицей меньшего ранга, псевдообращение и лемма Тихонова о решении с минимальной евклидовой нормой системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной матрицы, которые составляют, наряду с методом множителей Лагранжа, основу используемого математического аппарата.

Четвертая глава содержит исследование необходимых и достаточных условий существования решения ряда задач оптимальной матричной коррекции по минимуму евклидовой нормы, а также вида множества решений соответствующих скорректированных систем. Указанные задачи отличаются друг от друга видом множества фиксированных элементов корректируемых матриц. Так, рассматриваются задачи коррекции с фиксированными строками, фиксированными столбцами и совокупностью фиксированных строк и столбцов в матрице коэффициентов и в расширенной матрице исследуемой системы. При этом удается показать, что решение более сложных задач сводится к решению вспомогательных задач двух типов – задаче коррекции расширенной матрицы системы и задаче коррекции матрицы коэффициентов (левой части системы).

Пятая глава посвящена более детальному исследованию двух упомянутых выше задач. В ней приведены альтернативные формулировки необходимых и достаточных условий существования решения, необходимые и достаточные условия единственности решения, а также ряд утверждений, характеризующих только необходимые или только достаточные условия и некоторые неравенства, связывающие нормы оптимальных матриц коррекции с нормами невязок метода наименьших квадратов. Связь задач матричной коррекции с методом наименьших квадратов прослеживается и в задаче нахождения «аналога нормального решения» на множестве решений скорректированной системы.

В шестой главе модифицируется критерий оптимальности задач коррекции расширенной матрицы системы и коррекции матрицы коэффициентов (левой части системы) – вместо классической евклидовой нормы рассматривается взвешенная евклидова норма. Вариантов взвешивания два. В первом варианте используется левое и правое умножение невырожденных весовых матриц на матрицу коррекции. При этом с помощью замены переменных удается модифицированные задачи свести к задачам, рассмотренным в четвертой главе. Во втором варианте используются индивидуальные неотрицательные весовые коэффициенты для каждого элемента матрицы коррекции. При данной модификации не удается использовать математический аппарат глав 2-4. В качестве возможного варианта решения задачи коррекции предлагается построение специальным образом выполненное преобразование задачи к задаче нелинейного метода наименьших квадратов. При этом для целевой функции преобразованной задачи удается в замкнутом виде получить формулы для вычисления частных производных первого и второго порядка, что открывает возможность построения вычислительного алгоритма Ньютоновского типа.

В седьмой главе рассматривается проблема регуляризации исследуемых задач матричной коррекции. В частности, проблема регуляризации исследуется в условиях, когда задачи матричной коррекции в классической постановке решений не имеют. Раскрывается связь задач матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений по минимуму евклидовой нормы с классическим и обобщенным методом наименьших квадратов, а также связь модифицированных (регуляризованных) задач коррекции с классической регуляризацией систем линейных алгебраических уравнений по Тихонову, регуляризованным обобщенным методом наименьших квадратов и с Nongeneric TLS.

Восьмая глава содержит численные примеры к наиболее интересным и неочевидным утверждениям четвертой главы, касающихся задач с некорректируемыми строками и столбцами матриц (расширенных матриц) исследуемых систем.

В девятой главе в очень сжатой форме представлены комментарии к изложенному в монографии материалу, содержащие библиографические ссылки на работы, материал которых в той или иной форме был использован авторами. Указанные ссылки не могут, к сожалению авторов, претендовать на полноту, в особенности для зарубежных работ, посвященных обобщенному методу наименьших квадратов и его модификациям.

1. Постановки задач

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b\,, \tag{1.1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$, $\operatorname{rank} A = r$ и соотношения между параметрами m, n, r произвольные. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{X}}(A,b) \triangleq \{x \,|\, Ax \equiv b\}$ - множество решений системы (1.1). Указанная система будет интересовать нас в наибольшей степени тогда, когда выполнено условие

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(A,b) = \varnothing\,. \tag{1.2}$$

Введя в рассмотрение матрицу $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $h \in \mathbb{R}^m$ и используя запись $\|\cdot\|_E$ для обозначения евклидовой матричной нормы, можно рассмотреть задачу

$$Z_{total}(A,b): \ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,\,b+h)\neq\varnothing} \left(= z_{total}(A,b)\right), \tag{1.3}$$

которую назовем задачей коррекции расширенной матрицы коэффициентов системы (1.1) по минимуму евклидовой нормы. При этом $z_{total}(A,b)$ - численное значение нижней грани евклидовой нормы матрицы $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}$ в задаче $Z_{total}(A,b)$. Если нижняя грань целевой функции в задаче $Z_{total}(A,b)$ достигается, будем говорить, что задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение, которое будем обозначать как $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right)$, где $\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right) = \operatorname*{Arg\,min}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,\,b+h)\neq\varnothing} \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E$. В противном случае будем говорить, что задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения.

Очевидно, что задача матричной коррекции несовместной системы (1.1) в постановке (1.3) не может быть универсальным ответом для всего многообразия проблем, возникающих в практических приложениях и связанных с несовместностью систем линейных алгебраических уравнений. Поэтому рассмотрим некоторые модификации задачи $Z_{total}(A,b)$, которые, с одной стороны, несколько приблизят нас к потребностям практики, а с другой стороны, будут объединены общими методами теоретического исследования, использующими специфические свойства евклидовых векторных и матричных норм, и сходными вычислительными алгоритмами.

Одно из направлений подобных модификаций задачи $Z_{total}(A,b)$ - фиксированные (не подверженные коррекции) строки и столбцы в расширенной матрице системы (1.1). Как будет показано ниже, особую роль в этом классе задач играет задача

$$Z_{fix\{b\}}(A,b):\ \|H\|_E \to \inf_{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{b\}}(A,b)\right). \tag{1.4}$$

При этом обозначения оказываются несколько более компактными, если не делить матрицу $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ на блоки, а, наоборот, произвести ее окаймление дополнительными матричными и векторными блоками и рассматривать задачи вида:

$$Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right):\ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \end{bmatrix}, b+h\right)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)\right), \tag{1.5}$$

$$Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right):\ \|H\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \end{bmatrix}, b\right)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)\right), \tag{1.6}$$

$$Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right):\ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix}\right)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \tag{1.7}$$

$$Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right):\ \|H\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \tag{1.8}$$

$$Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right):\ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix}\right)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \tag{1.9}$$

$$Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right): \ \|H\|_E \to \inf_{\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \neq \varnothing} \ , \qquad (1.10)$$
$$\left(= z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right)$$

где $S \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $T \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{l \times k}$, $d \in \mathbb{R}^{l}$. В задачах (1.5)-(1.6) и (1.9)-(1.10) $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix}$, где $x_A \in \mathbb{R}^n$, $x_S \in \mathbb{R}^k$. Подсистема $Tx = d$ в задачах (1.7)-(1.8) и подсистема $\begin{bmatrix} T & U \end{bmatrix} x = d$ в задачах (1.9)-(1.10) предполагается совместной.

Второе направление модификации задачи $Z_{total}(A,b)$ заключается в ее регуляризации путем введения дополнительного ограничения на величину квадрата евклидовой нормы решения скорректированной системы:

$$\forall x \in \mathcal{X}(A+H, b+h) \Rightarrow \|x\| \le t \, , \qquad (1.11)$$

где $t > 0$ - некоторый параметр, запись $\|\cdot\|$ означает евклидову векторную норму. Аналогичным образом могут быть модифицированы и задачи (1.5)-(1.10).

2. Сингулярное разложение, задача о матричной аппроксимации, наилучшей в смысле минимума евклидовой нормы, и задача $Z_{total}(A,b)$

Введем и поясним некоторые дополнительные обозначения. Пусть $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - некоторая симметричная матрица. Как известно, (см., например, [27]), все ее собственные значения являются вещественными. Условимся некоторое собственное значение матрицы D обозначать как $\lambda(D)$. Минимальное собственное значение матрицы D будем обозначать как $\lambda_{\min}(D)$. Множество собственных векторов матрицы D, соответствующих собственному значению $\lambda_{\min}(D)$ будем обозначать как $\mathbf{X}_{\min}(D)$, множество *нормированных* (имеющих единичную евклидову норму) векторов матрицы D, соответствующих собственному значению $\lambda_{\min}(D)$ будем обозначать как $\bar{\mathbf{X}}_{\min}(D)$. Соответствующие множества собственных векторов, относящихся к произвольному $\lambda(D)$, будем обозначать как $\mathbf{X}(D,\lambda)$ и $\mathbf{X}(D,\lambda)$. Для множества (набора) собственных значений матрицы D будем использовать обозначение $\mathrm{eigenvals}(D)$. Для *кратности* некоторого собственного значения $\lambda(D)$ будем использовать обозначение $\mathrm{k}(\lambda, D)$. Напомним, что для вещественной симметричной матрицы геометрическая кратность собственного значения, определяемая как ранг системы собственных векторов, относящихся к данному собственному значению, совпадает с алгебраической кратностью, т.е., с кратностью соответствующего корня характеристического многочлена матрицы.

Кроме того, нам потребуются обозначения, связанные с *сингулярным разложением* матриц. Пусть $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - некоторая матрица ранга r. Пусть $q = \min\{m, n\}$. Соответствующие обозначения, которые мы собираемся обсудить, оказываются наиболее "нагруженными" при выполнении условия

$$1 < r < q, \tag{2.1}$$

которое и будет пока предполагаться. Как известно (см., например, [27]), для матрицы U возможно представление вида

$$U = V \Sigma W^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

где $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ - ортогональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы UU^{T}, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - ортогональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы $U^{\mathrm{T}}U$, $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, причем $\sigma_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$,

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{rr} > \sigma_{r+1,r+1} = \ldots = \sigma_{qq} = 0. \tag{2.3}$$

Заметим, что при выполнении условия $r = q$ соотношение (2.3) принимает вид

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{qq} > 0. \tag{2.4}$$

Следуя традициям, вместо σ_{ii} будем писать σ_i. Величины σ_i принято называть *сингулярными числами* матрицы U, а представление (2.2) – ее *сингулярным разложением*. В последующих выкладках окажется полезным специальное обозначение $\sigma_{\min}(U)$ для минимального сингулярного числа матрицы U.

Как несложно заметить, в силу соотношения (2.2),

$$U^{\mathrm{T}}U = W \Lambda W^{\mathrm{T}}, \tag{2.5}$$

$$UU^{\mathrm{T}} = V \mathrm{M} V^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, т.е., ненулевые собственные значения матриц $U^{\mathrm{T}}U$ и UU^{T} - это квадраты ненулевых сингулярных чисел матрицы U. В частности,

$$\lambda_{\min}(U^{\mathrm{T}}U) = \sigma_{\min}^2(U). \tag{2.7}$$

Для последующих выкладок нам будет полезна еще одна (эквивалентная выражению (2.2)) форма представления сингулярного разложения матрицы U:

$$U = \sum_{i=1}^{r} v_i \sigma_i w_i^{\mathrm{T}}, \tag{2.8}$$

где v_i - столбцы матрицы V, w_i - столбцы матрицы W. Для полноты изложения заметим, что если числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ различны, то векторы v_i и w_i определяются с точностью до знака. Если же для некоторого номера $1 \leq k < r$ имеем $\sigma_k = \sigma_{k+1} = \ldots = \sigma_{k+p}$, где $p > 1$, то векторы $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+p}$ и $w_r, w_{k+1}, \ldots, w_{r+p}$ определены не однозначно, а с точностью до соответствующего линейного подпространства. То же самое верно в отношении векторов

$v_{r+1},\dots,v_m$ и $w_{r+1},\dots,w_n$, соответствующих нулевым сингулярным числам матрицы U.

Сингулярное разложение тесно связано с двумя важнейшими матричными нормами: евклидовой и спектральной благодаря важному свойству *унитарной инвариантности* (см., например, [27]). Поскольку существуют разные подходы к введению понятия спектральной матричной нормы и изложению ее свойств, уточним, что в настоящей работе *определением* спектральной матричной нормы $\|U\|_2$ матрицы $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ считается формула

$$\|U\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}. \tag{2.9}$$

Утверждение 2.1. Евклидова матричная норма является унитарно-инвариантной.

Утверждение 2.2. Спектральная матричная норма является унитарно-инвариантной.

Поскольку мы условились иметь дело только с вещественными матрицами, утверждения 2.1 и 2.2 сводятся к утверждениям о неизменности евклидовой и спектральной нормы некоторой матрицы при умножении ее (слева или справа) на произвольную ортогональную матрицу.

Следствие 1.

$$\|U\|_E^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2. \tag{2.10}$$

Следствие 2.

$$\|U\|_2 = \sigma_1. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.10) и (2.11), разумеется, хорошо известны и давно уже относятся к разряду классических результатов линейной алгебры. Действительно, в силу формулы (2.2), $V^{\mathrm{T}}UW = \Sigma$. В силу утверждений 2.1 и 2.2 $\|U\|_E = \left\|V^{\mathrm{T}}UW\right\|_E = \|\Sigma\|_E$, $\|U\|_2 = \left\|V^{\mathrm{T}}UW\right\|_2 = \|\Sigma\|_2$. С учетом последних соотношений формула (2.10) следует из определений евклидовой матричной нормы и матрицы Σ. Формулу (2.11) можно обосновать, заметив, что для любого вектора x справедливо неравенство

$$\|\Sigma x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \le \sigma_1^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Имея в качестве инструментов соотношения (2.2)-(2.10), можно перейти к рассмотрению следующей задачи:

Задача о наилучшей (в смысле минимума евклидовой нормы) аппроксимации заданной матрицы матрицей меньшего ранга.

Пусть $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - некоторая матрица ранга $r > 0$. Требуется найти матрицу $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ранга $\tilde{r} < r$ и некоторую матрицу $\vartriangle U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, которые являются решением задачи

$$\tilde{U} + \vartriangle U = U,$$
$$\|\vartriangle U\|_E \to \min. \tag{2.12}$$

Утверждение 2.3. .Решение задачи (2.12) существует, не обязательно единственно, и может быть выражено формулами

$$\tilde{U}^* = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} v_i \sigma_i w_i^{\mathrm{T}}, \tag{2.13}$$

$$\vartriangle U^* = \sum_{i=\tilde{r}+1}^{r} v_i \sigma_i w_i^{\mathrm{T}}. \tag{2.14}$$

При этом

$$\left\|\vartriangle U^*\right\|_E^2 = \sum_{i=\tilde{r}+1}^{r} \sigma_i^2. \tag{2.15}$$

Неоднозначность решения задачи (2.12) имеет место в том случае, когда существуют некоторые целые неотрицательные числа p и q, хотя бы одно из которых отлично от нуля и такие, что $\sigma_{\tilde{r}-q} = \sigma_{\tilde{r}-q+1} = \ldots = \sigma_{\tilde{r}} = \ldots = \sigma_{\tilde{r}+p-1} = \sigma_{\tilde{r}+p}$. Как уже отмечалось выше, при этом наборы векторов $v_{\tilde{r}-q}, v_{\tilde{r}-q+1}, \ldots, v_{\tilde{r}}, \ldots, v_{\tilde{r}+p-1}, v_{\tilde{r}+p}$ и $w_{\tilde{r}-q}, w_{\tilde{r}-q+1}, \ldots, w_{\tilde{r}}, \ldots, w_{\tilde{r}+p-1}, w_{\tilde{r}+p}$ определены только с точностью до соответствующих линейных подпространств.

Наибольший интерес для последующих выкладок представляет случай $\tilde{r} = r - 1$. Имеет место следующее

Следствие 3. Решение задачи (2.12) при $\tilde{r} = r - 1$ существует, не обязательно единственно, и может быть выражено формулами

$$\tilde{U}^* = \sum_{i=1}^{r-1} v_i \sigma_i w_i^{\mathrm{T}}, \tag{2.16}$$

$$\vartriangle U^* = v_r \sigma_r w_r^{\mathrm{T}}, \tag{2.17}$$

$$\left\|\vartriangle U^*\right\|_E = \sigma_r. \tag{2.18}$$

Неоднозначность решения задачи (2.12) в этом случае, также как и в предыдущем, возникает тогда**,** когда существуют некоторые целые неотрицательные числа p и q, хотя бы одно из которых отлично от нуля и такие, что $\sigma_{r-1-q} = \sigma_{r-q} = \ldots = \sigma_{r-1} = \ldots = \sigma_{r-2+p} = \sigma_{r-1+p}$.

3. Псевдообращение, классический метод наименьших квадратов и задача о минимальной по евклидовой норме матрице, разрешающей систему $Ax = b$ при фиксированных x и b

В задачах линейной алгебры, требующих минимизации евклидовой нормы векторов и матриц весьма полезным теоретическим инструментом оказывается так называемая *псевдообратная матрица* или, как ее еще называют, *обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза.* Одним из способов определить данный объект являются приводимые ниже *уравнения Пенроуза*, в которых $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - исходная матрица и $A^{+} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - псевдообратная [10], [23]:

$$AA^{+}A = A, \tag{3.1}$$

$$A^{+}AA^{+} = A^{+}, \tag{3.2}$$

$$\left(AA^{+}\right)^{\mathrm{T}} = AA^{+}, \tag{3.3}$$

$$\left(A^{+}A\right)^{\mathrm{T}} = A^{+}A. \tag{3.4}$$

Для произвольной матрицы псевдообратная матрица, определенная уравнениями (3.1)-(3.4) существует и единственна. Заметим, что для нулевой матрицы размера $m \times n$ псевдообратной является нулевая матрица размера $n \times m$. Заметим также, что $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{\mathrm{T}}$ и $\left(A^{+}\right)^{+} = A$. Кроме того, используя (3.1)-(3.4), несложно убедиться, что если A - квадратная невырожденная матрица, то $A^{+} = A^{-1}$.

Псевдообратная матрица является удобным способом конструирования ортогональных проекторов в линейные подпространства, натянутые на столбцы и строки матрицы A, а также в линейные подпространства, являющиеся ортогональными дополнениями к указанным подпространствам. Обозначим $P_{columns(A)}$, $P_{rows(A)}$, $P^{\perp}_{columns(A)}$, $P^{\perp}_{rows(A)}$ проекторы соответственно в подпространство столбцов матрицы A, в подпространство строк матрицы A, в подпространство, являющееся ортогональным дополнением к подпространству столбцов матрицы A и в подпространство, являющееся ортогональным дополнением к подпространству строк матрицы A. Тогда можно записать:

$$P_{columns(A)} = AA^{+}, \tag{3.5}$$

$$P_{rows(A)} = A^{+}A, \tag{3.6}$$

$$P^{\perp}_{columns(A)} = I - AA^{+}, \tag{3.7}$$

$$P^{\perp}_{rows(A)} = I - A^{+}A. \tag{3.8}$$

Чтобы убедиться в том, что формулы (3.5)-(3.8) действительно описывают ортогональные проекторы в соответствующие линейные подпространства, достаточно использовать (3.1)-(3.2) вместе с самими формулами (3.5)-(3.8).

Определение (3.1)-(3.4) можно распространить и на векторы-столбцы и векторы-строки, рассматривая их как матрицы, состоящие из одного столбца или, соответственно, строки. Так, непосредственной проверкой соотношений (3.1)-(3.4) несложно убедиться, что для вектора-столбца $x \in \mathbb{R}^{n}$ псевдообратным будет вектор-строка $x^{+} \in \mathbb{R}^{n}$, определенный по формуле

$$x^{+} = \begin{cases} \dfrac{x^{\mathrm{T}}}{x^{\mathrm{T}}x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Хорошо известно, что нормальное псевдорешение несовместной системы линейных алгебраических уравнений вида (1.1) по методу наименьших квадратов, т.е., решение, минимизирующее евклидову невязки системы и само имеющее минимальную евклидову норму, существует, единственно и выражается формулой

$$\hat{x} = A^{+}b. \tag{3.10}$$

Обозначим множество МНК-решений системы (1.1) (т.е., таких решений, которые минимизируют квадрат евклидовой нормы вектора невязки указанной системы) как $\hat{\mathcal{X}}(A,b)$. Тогда можно записать, что для любой системы вида (1.1) $\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}(A,b)$. В то же время, описание произвольного элемента $\widehat{x}$ множества $\hat{\mathcal{X}}(A,b)$ для любой системы вида (1.1) дает формула [1]

$$\widehat{x} = \hat{x} + \left(I - A^{+}A\right)\vartriangle x = \hat{x} + P^{\perp}_{rows(A)}\vartriangle x, \tag{3.11}$$

где $\vartriangle x \in \mathbb{R}^n$ - произвольный вектор. Заметим, что если система (1.1) совместна, то

$$\hat{\mathcal{X}}(A,b) = \mathcal{X}(A,b).$$

Используя формулы (3.1), (3.5), (3.7) и (3.10), можно показать, что любой вектор $\widehat{x}$, заданный формулой (3.11), приводит к одному и тому же вектору невязки $\vartriangle b$:

$$\begin{gathered}\vartriangle b = b - A\widehat{x} = b - A\hat{x} - A\left(I - A^{+}A\right)\vartriangle x = \\ = b - AA^{+}b - A\left(I - A^{+}A\right)\vartriangle x = b - AA^{+}b = \\ b - P_{columns(A)}b = P^{\perp}_{columns(A)}b = b - A\hat{x}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Имеет смысл рассмотреть также вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора b в линейное подпространство, натянутое на столбцы матрицы A:

$$\hat{b} = A\hat{x} = AA^{+}b = P_{columns(A)}b. \tag{3.13}$$

Несложно убедиться, что выполняются условия

$$b = \hat{b} + \vartriangle b \tag{3.14}$$

и

$$\hat{b} \perp \vartriangle b. \tag{3.15}$$

В свою очередь, соотношения (3.14)-(3.15) позволяют использовать теорему Пифагора и записать:

$$\|b\|^2 = \|\hat{b}\|^2 + \|\vartriangle b\|^2, \tag{3.16}$$

откуда получаем полезное для последующих выкладок неравенство

$$\|\vartriangle b\| \le \|b\|. \tag{3.17}$$

Заметим, что равенство в (3.17) достигается тогда и только тогда, когда $\hat{b} \equiv 0$, $\vartriangle b \equiv b$, что, в свою очередь, при $b \neq 0$ возможно тогда и только тогда, когда либо матрица A является нулевой, либо когда вектор b ортогонален столбцам матрицы A.

Указанные выше свойства МНК-решений хорошо известны и востребованы. В то же время, к сожалению, меньше внимания привлекает к себе тот факт, что с помощью псевдообратных матриц можно находить нормальные псевдорешения матричных уравнений вида

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}, \tag{3.18}$$

т.е., уравнений, в которых $\mathrm{A}, \mathrm{X}, \mathrm{B}$ - произвольные матрицы согласованных размеров. Другими словами, справедливо следующее

Утверждение 3.1. [10] Пусть $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ - некоторые матрицы, где $m, n, k \geq 1$ - произвольные числа и ранг матрицы А также произволен. Тогда

$$\widehat{\mathrm{X}} = \mathrm{A}^{+}\mathrm{B} \quad - \tag{3.19}$$

нормальное псевдорешение системы (3.18), т.е., матрица, минимизирующая евклидову норму матрицы невязки $\mathrm{B} - \mathrm{AX}$ и сама имеющая минимальную евклидову норму.

Следствие. Если система (3.18) совместна, то матрица, вычисляемая по формуле (3.19), является нормальным решением указанной системы.

Теорема 3.1. (Лемма А.Н. Тихонова [24]) Пусть систему вида (1.1) необходимо разрешить относительно неизвестной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ при известных фиксированных векторах $x \in \mathbb{R}^{n}$, $x \neq 0$ и $b \in \mathbb{R}^{m}$, причем так, чтобы матрица A имела минимальную евклидову норму. Решение этой задачи существует, единственно и имеет вид

$$\widehat{A} = bx^{+}. \tag{3.20}$$

При этом

$$\left\|\widehat{A}\right\|_{E} = \frac{\|b\|}{\|x\|}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Перепишем систему (1.1) в виде

$$x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = b^{\mathrm{T}}. \tag{3.22}$$

Как несложно заметить, система (3.22) является частным случаем системы (3.18), где $\mathrm{A} = x^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathrm{X} = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathrm{B} = b^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$. Поскольку $\mathrm{A} \neq 0$, она совместна, а поскольку число переменных в ней больше числа уравнений, то она имеет бесконечное множество решений. В силу (3.9) и (3.19),

$$\widehat{A^{\mathrm{T}}} = \left(x^{\mathrm{T}}\right)^{+} b^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \widehat{A} = bx^{+}.$$

Теперь, по определению евклидовой матричной нормы и евклидовой векторной нормы,

$$\left\|\widehat{A}\right\|_{E}^{2} = \left(x^{\mathrm{T}} x\right)^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(b_i x_j\right)^{2} = \left(x^{\mathrm{T}} x\right)^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i^{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^{2} = \frac{\|b\|^{2}}{\|x\|^{2}}.$$

4. Условия существования решения задач матричной коррекции и вид множеств решений скорректированных систем

4.1. Задача $Z_{total}(A,b)$

Теорема 3.1 является достаточно удобным инструментом для решения задачи $Z_{total}(A,b)$ и ее модификаций. В частности, с его использованием удается показать, что справедлива следующая

Теорема 4.1.(О существовании и виде решения задачи $Z_{total}(A,b)$)

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (1.1)-(1.2). Тогда для оптимального значения целевой функции в задаче Z_{total} справедлива формула

$$z_{total}(A,b) = \lambda_{\min}^{1/2}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right). \qquad (4.1)$$

При этом задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$y^* \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \qquad (4.2)$$

такой, что

$$y_{n+1}^* \neq 0. \qquad (4.3)$$

При этом

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^{+} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right), \qquad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^*\right) = x^*, \qquad (4.5)$$

где

$$x^* = \frac{1}{y_{n+1}^*}\cdot\begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}. \qquad (4.6)$$

Доказательство.

1. Обоснование формулы (4.1).

Проведем, в соответствии с постановкой задачи $Z_{total}(A,b)$ коррекцию системы (1.1)-(1.2) в два этапа:

1) Предположим, что некоторый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ задан, причем

$$x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H, b + h\right), \qquad (4.7)$$

где $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ - некоторая, пока еще неизвестная матрица коррекции. Условие (4.7) можно переписать в виде

$$(A+H)x = b+h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Как несложно заметить, правая часть соотношения (4.8) имеет тот необходимый вид, который позволяет применить теорему 3.1 к нахождению матрицы $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}$ с минимальной евклидовой нормой. В соответствии с формулой (3.20) получаем:

$$\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{+}. \tag{4.9}$$

Заметим, что в силу теоремы 3.1 матрица $\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix}$, задаваемая формулой (4.9), существует и единственна. При этом в соответствии с формулой (3.21),

$$\left\|\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}. \tag{4.10}$$

2) Рассмотрим задачу

$$\left\|\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_x = \gamma. \tag{4.11}$$

В силу (4.10) задача $Z_{total}(A,b)$ эквивалентна задаче (4.11) и, в свою очередь, эквивалентна задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} \to \inf_x = \gamma,\ x^* \in \operatorname*{Arg\,inf}_x \dfrac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}, \\ \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^{+} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right). \end{cases}$$

(4.12)

Сделаем замену переменной. Пусть $\tilde{y} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$\frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \tilde{y}\right\|}{\|\tilde{y}\|} \to \inf_{\tilde{y}|\tilde{y}_{n+1}=1} (=\gamma). \tag{4.13}$$

Пусть $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ - некоторый вектор. Используя теорему Куранта-Фишера (см., например [9] или [26]), несложно показать, что

$$\gamma = \inf_{\tilde{y}|\tilde{y}_{n+1}=1} \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \tilde{y}\right\|}{\|\tilde{y}\|} = \min_{y} \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot y\right\|}{\|y\|} =$$

$$= \left(\min_{y} \frac{y^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} y}{y^{\mathrm{T}} y} \right)^{1/2} = \lambda_{\min}^{1/2} \left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \right). \tag{4.14}$$

При этом минимум в выражении (4.14) достигается на некотором векторе $y^* \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \right)$. Таким образом, формула (4.1) доказана.

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{total}(A,b)$.

Достаточность. Несложно показать, что при $y_{n+1}^* \neq 0$ решение задачи существует. Действительно, пусть x^* построен по формуле (4.6). Из условий $\|y^*\| = 1$ и $y_{n+1}^* \neq 0$ следует, что $\|x^*\| < +\infty$. В то же время, пусть матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ построена в соответствии с левой частью формулы (4.4). Эта формула аналогична формуле (3.20). Поэтому, в силу теоремы 3.1 и соотношения (4.14), для величины $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E$ справедлива формула, аналогичная формуле (3.21):

$$\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot y^*\right\|}{\|y^*\|} = \gamma. \tag{4.15}$$

Кроме того, непосредственной проверкой с использованием формулы (3.9) несложно установить, что справедливо соотношение, являющееся ослабленным вариантом формулы (4.5):

$$x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^*\right). \tag{4.16}$$

Используя (4.15) и (4.16), убеждаемся, что выполняется правая часть соотношения (4.4). Таким образом,

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right),$$

т.е., решение задачи $Z_{total}(A,b)$ существует.

Необходимость. Покажем теперь, что если не существует вектор $y^* \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ такой, что $y_{n+1}^* \neq 0$, то решение задачи $Z_{total}(A,b)$ не существует. Действительно, пусть $y_{n+1}^* = 0$ для любого вектора $y^* \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$, причем не будем исключать, что множество $y^* \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ возможно содержит бесконечное число векторов, определяемых с точностью до соответствующего линейного подпространства. Рассмотрим вектор

$$x(\delta,\vartriangle x) = \delta^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix} + \vartriangle x \tag{4.17}$$

где $\vartriangle x \in \mathbb{R}^n$ - произвольный вектор, $\delta \in \mathbb{R}$ - произвольное число. Построим матрицу $\begin{bmatrix} H(x(\delta,\vartriangle x)) & -h(x(\delta,\vartriangle x)) \end{bmatrix}$ по формуле

$$\begin{bmatrix} H(x(\delta,\vartriangle x)) & -h(x(\delta,\vartriangle x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix}^{+}, \tag{4.18}$$

и рассмотрим функцию

$$\Phi(x(\delta,\vartriangle x)) = \left\| \begin{bmatrix} H(x(\delta,\vartriangle x)) & -h(x(\delta,\vartriangle x)) \end{bmatrix} \right\|_E .$$

В силу теоремы 3.1 матрица $\begin{bmatrix} H(x(\delta,\vartriangle x)) & -h(x(\delta,\vartriangle x)) \end{bmatrix}$, задаваемая формулой (4.18), является минимальным по евклидовой норме решением уравнения

$$\begin{bmatrix} H(x(\delta,\vartriangle x)) & -h(x(\delta,\vartriangle x)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда, в частности, следует, что

$$x(\delta,\vartriangle x) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H(x(\delta,\vartriangle x)), b + h(x(\delta,\vartriangle x))\right) \tag{4.19}$$

и

$$\Phi(x(\delta,\vartriangle x)) = \frac{\left\| \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.20}$$

Из (4.17),(4.20) и непрерывности евклидовой векторной нормы следует, что

$\Phi(\delta,\vartriangle x)$ непрерывна при любых значениях $\vartriangle x$ и δ. В силу (4.14)

$$\Phi\left(x(\delta,\vartriangle x)\right) > \gamma \quad \forall\delta > 0,\ \forall\vartriangle x \neq 0.$$

В то же время,

$$\lim_{\substack{\delta\to 0,\\ \vartriangle x\to 0}} \Phi\left(x(\delta,\vartriangle x)\right) = \gamma,$$

но при этом

$$x(0,0) = \lim_{\substack{\delta\to 0,\\ \vartriangle x\to 0}} x(\delta,\vartriangle x) \in \operatorname*{Arg\,inf}_{x(\delta,\vartriangle x)} \Phi\left(x(\delta,\vartriangle x)\right),$$

$$\left\|x(0,0)\right\| = +\infty.$$

Заметим, что, несмотря на последнее соотношение в соответствии с формулами (4.17) и (3.9) следующий предел существует и может быть вычислен:

$$\lim_{\substack{\delta\to 0,\\ \vartriangle x\to 0}} \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\delta,\vartriangle x) \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \\ 0 \end{bmatrix}^{+} = y^* y^{*+}. \tag{4.21}$$

В силу (4.21) существует и матрица $\begin{bmatrix} H\left(x(0,0)\right) & -h\left(x(0,0)\right) \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H\left(x(0,0)\right) & -h\left(x(0,0)\right) \end{bmatrix} &= \lim_{\substack{\delta\to 0,\\ \vartriangle x\to 0}} \begin{bmatrix} H\left(x(\delta,\vartriangle x)\right) & -h\left(x(\delta,\vartriangle x)\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot y^* y^{*+}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Таким образом, существуют матрицы, сколь угодно близкие по значению евклидовой нормы к матрице $\begin{bmatrix} H\left(x(0,0)\right) & -h\left(x(0,0)\right) \end{bmatrix}$, корректирующие систему (1.1)-(1.2). Но их норма больше нормы $\begin{bmatrix} H\left(x(0,0)\right) & -h\left(x(0,0)\right) \end{bmatrix}$.

Покажем, что

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x(0,0)\right), b + h\left(x(0,0)\right)\right) = \\ &= \lim_{\substack{\delta\to 0,\\ \vartriangle x\to 0}} \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x(\delta,\vartriangle x)\right), b + h\left(x(\delta,\vartriangle x)\right)\right) = \varnothing, \end{aligned} \tag{4.23}$$

т.е., другими словами, что матрица $\begin{bmatrix} H\left(x(0,0)\right) & -h\left(x(0,0)\right) \end{bmatrix}$ уже не корректирует систему (1.1)-(1.2). Действительно, в силу (4.21)

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x(0,0)\right), b + h\left(x(0,0)\right)\right) \neq \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A\cdot\left(I-\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}^+\right),b\right)\neq\varnothing\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists u\in\mathbb{R}^n\left|A\cdot\left(I-\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}^+\right)\cdot u\equiv b.\right.$$

Но последнее соотношение означает, что вектор

$$\tilde{u}=\left(I-\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}^+\right)\cdot u$$

является решением несовместной системы (1.1) (противоречие).

Таким образом, мы показали, что задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор y^*, отвечающий условиям (4.2)-(4.3).

3. Обоснование формул (4.5)-(4.6).

Как было показано выше, при выполнении достаточных условий существования решения задачи $Z_{total}(A,b)$**,** вектор x^*, задаваемый формулой (4.6), действительно принадлежит множеству решений скорректированной системы $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*,b+h^*\right)$. Покажем теперь, что x^* является *единственным* элементом множества $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*,b+h^*\right)$.

Действительно, пусть задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение – матрицу коррекции $\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}$, построенную по формуле (4.4) с учетом формул (4.2) ,(4.3) и (4.6). Мы хотим показать, что множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*,b+h^*\right)$ состоит из единственного вектора x^*, задаваемого формулой (4.6). Доказательство проведем "от противного". Пусть вектор $\tilde{x}\neq x^*$ также принадлежит множеству $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*,b+h^*\right)$. Таким образом, справедливы два тождества:

$$\left(A+H^*\right)x^*\equiv b+h^* \tag{4.24}$$

и

$$\left(A+H^*\right)\tilde{x}\equiv b+h^*. \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (4.25) можно получить следствие вида

$$\left(A+H^{*}\right)\vartriangle x \equiv 0, \tag{4.26}$$

где

$$\vartriangle x = x^{*} - \tilde{x} \neq 0. \tag{4.27}$$

Но в соответствии с формулами (3.9) и (4.4)

$$H^{*} = \left(b - Ax^{*}\right) \cdot \frac{x^{*\mathrm{T}}}{x^{*\mathrm{T}}x^{*}+1}. \tag{4.28}$$

С учетом (4.28) тождество (4.26) можно переписать в виде

$$(1-\alpha)\cdot A \cdot\vartriangle x \equiv -\alpha \cdot b, \tag{4.29}$$

где

$$\alpha = \frac{x^{*\mathrm{T}}\vartriangle x}{x^{*\mathrm{T}}x^{*}+1}. \tag{4.30}$$

Пусть $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$. В этом случае, в силу (4.29) вектор

$$\widehat{x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\cdot\vartriangle x$$

является решением несовместной системы (1.1) (противоречие). Пусть $\alpha = 1$. В этом случае в силу (4.29) получаем $b = 0$, что противоречит нашим допущениям о системе (1.1). Предположим теперь, что $\alpha = 0$. В этом случае из (4.29) получаем

$$A \cdot\vartriangle x = 0, \tag{4.31}$$

а из (4.30) получаем

$$x^{*\mathrm{T}}\vartriangle x = 0. \tag{4.32}$$

Сформируем вектор x^{**} и матрицу $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix}$ следующим образом:

$$x^{**} = x^{*} + \vartriangle x, \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{**} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{**} \\ 1 \end{bmatrix}^{+}. \tag{4.34}$$

Используя соотношения (4.31)-(4.34) несложно убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix}$ корректирует систему (1.1)-(1.2). Это действительно так, поскольку $x^{**} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H^{**}, b+h^{**})$. В то же время, с использованием (4.31) ,(4.32) и (4.33), а также теоремы Пифагора, получаем

$$\left\|\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix}\right\|_{E} = \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^{**} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x^{**} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x^{*} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left(\left\|\begin{bmatrix} x^{*} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|^{2} + \left\|\begin{bmatrix} \vartriangle x \\ 0 \end{bmatrix}\right\|^{2}\right)^{1/2}} < \gamma,$$

что противоречит уже доказанному утверждению об оптимальности (в контексте задачи $Z_{total}(A,b)$) матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$.

Таким образом, нами доказано и последнее утверждение теоремы 4.1 о единственности (при фиксированной матрице коррекции) решения скорректированной в рамках задачи $Z_{total}(A,b)$ системы (1.1)-(1.2) при условии, что сама задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение.

Следствие. Если корректируемая система (1.1)-(1.2) такова, что

$$\operatorname{rank} A < n,$$

то задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения.

Доказательство. Как известно,

$$\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \,|\, Ax = 0.$$

Следовательно,

$$\exists y = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, y \neq 0 \left| \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} y = 0 \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Но тогда в силу теоремы 4.1 норма матрицы коррекции системы (1.1)-(1.2) может быть нулевой, т.е., данная система совместна (противоречие).

4.2. Задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$

Теорема 4.2. Задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ обладает следующими свойствами:

$$z_{fix\{b\}}(A,b) = \lambda_{\min}^{1/2}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^{+})A \right). \tag{4.35}$$

Для того чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор

$$y^* \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^{+})A \right) \tag{4.36}$$

такой, что

$$b^{\mathrm{T}} A y^* \neq 0. \tag{4.37}$$

В этом случае

$$\left(b - Ax^* \right) x^{*+} = H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b) \right), \tag{4.38}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b \right) = x^*, \tag{4.39}$$

где

$$x^* = \frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} A y^*} \cdot y^*. \tag{4.40}$$

Доказательство.

1. Обоснование формулы (4.35).

Проведем, в соответствии с постановкой задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ коррекцию системы (1.1)-(1.2) в два этапа:

1) Предположим, что некоторый вектор $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ задан, причем

$$x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H, b\right), \tag{4.41}$$

где $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - некоторая, пока еще неизвестная матрица коррекции. Условие (4.41) можно переписать в виде

$$\left(A+H\right)x = b \Leftrightarrow Hx = b - Ax. \tag{4.42}$$

Как несложно заметить, правая часть соотношения (4.42) имеет тот необходимый вид, который позволяет применить теорему 3.1 к нахождению матрицы H с минимальной евклидовой нормой. В соответствии с формулой (3.20) получаем:

$$\widehat{H}(x) = \left(b - Ax\right)x^{+}. \tag{4.43}$$

Заметим, что в силу теоремы 3.1 матрица $\widehat{H}(x)$, задаваемая формулой (4.43), существует и единственна. При этом в соответствии с формулой (3.21),

$$\left\|\widehat{H}(x)\right\|_E = \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}. \tag{4.44}$$

2) Рассмотрим задачу

$$\left\|\widehat{H}(x)\right\|_E \to \inf_{x \neq 0} = \gamma. \tag{4.45}$$

В силу (4.44) задача $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$ эквивалентна задаче (4.45) и, в свою очередь, эквивалентна задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\|b - Ax\|}{\|x\|} \to \inf\limits_x = \gamma,\ x^* \in \operatorname{Arg}\inf\limits_x \dfrac{\|b - Ax\|}{\|x\|}, \\ H^* = \left(b - Ax\right)x^{+} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)\right). \end{cases} \tag{4.46}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \inf_x \frac{b^{\mathrm{T}}b - 2b^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x} = \\ &= \inf_x \frac{b^{\mathrm{T}}b - 2b^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)Ax + \dfrac{\left(b^{\mathrm{T}}Ax\right)^2}{b^{\mathrm{T}}b}}{x^{\mathrm{T}}x}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Представим вектор x как

$$x = \alpha \cdot \overline{x}, \tag{4.48}$$

где $\alpha > 0$ - скалярный параметр, $\|\overline{x}\| = 1$. Тогда соотношение (4.47) принимает вид

$$\gamma^2 = \inf_{\alpha, \overline{x}} \frac{b^{\mathrm{T}}b - 2\alpha \cdot b^{\mathrm{T}}A\overline{x} + \alpha^2 \cdot \left(\overline{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\overline{x} + \dfrac{\left(b^{\mathrm{T}}A\overline{x}\right)^2}{b^{\mathrm{T}}b}\right)}{\alpha^2}. \tag{4.49}$$

Пусть $t = \alpha^{-1}$. Тогда (4.49) можно переписать в виде

$$\gamma^2 = \inf_{t,\bar{x}} \left\{ t^2 \cdot b^{\mathrm{T}} b - 2t \cdot b^{\mathrm{T}} A\bar{x} + \left(\bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A\bar{x} + \frac{\left(b^{\mathrm{T}} A\bar{x} \right)^2}{b^{\mathrm{T}} b} \right) \right\}. \quad (4.50)$$

Очевидно, что задача (4.50) поддается декомпозиции. Зафиксировав вектор $\bar{x}$, получаем элементарную задачу минимизации квадратичной функции по скалярному параметру t. Оптимальное значение параметра в указанной задаче обозначим как t^*. Как несложно убедиться,

$$t^* = \frac{b^{\mathrm{T}} A\bar{x}}{b^{\mathrm{T}} b}. \quad (4.51)$$

С учетом формулы (4.51) и теоремы Куранта-Фишера задачу (4.50) удается существенно упростить:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \inf_{\bar{x}} \left\{ \bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A\bar{x} \right\} = \min_{\bar{x}} \left\{ \bar{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A\bar{x} \right\} = \\ &= \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

При этом минимум в выражении (4.52) достигается на некотором векторе $y^* \in \mathbf{X}_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right)$. Таким образом, формула (4.35) доказана.

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{fix\{b\}}(A,b)$.

Достаточность. Несложно показать, что при выполнении условия (4.37) решение задачи существует. Действительно, пусть y^* соответствует условиям (4.36)-(4.37). Тогда оказывается возможным построить вектор x^* по формуле (4.40), матрицу H^* в соответствии с левой частью формулы (4.38) и убедится, что $x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^*, b)$, $\left\| x^* \right\| < +\infty$. Таким образом, H^* действительно корректирует систему (1.1)-(1.2). В то же время, в силу (4.43)-(4.44)

$$\left\| H^* \right\|_E = \frac{\left\| b - Ax^* \right\|}{\left\| x^* \right\|}. \quad (4.53)$$

Используя (4.40), (4.53) и (4.36), получаем

$$\begin{aligned} \left\| H^* \right\|_E^2 &= \frac{x^{*\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) Ax^*}{x^{*\mathrm{T}} x^*} = y^{*\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) Ay^* = \\ &= \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

В свою очередь, в силу (4.54), (4.52) и выкладок, приведенных выше для обоснования соотношения (4.35), имеем

$$H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b) \right),$$

что и означает, что задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет решение.

Необходимость. Покажем теперь, что если

$$\forall y^* \in \mathbf{X}_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} (I - bb^{+}) A \right) \Rightarrow b^{\mathrm{T}} Ay^* = 0, \quad (4.55)$$

то задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения. Действительно, пусть условие (4.55) выполняется. Рассмотрим вектор

$$x(\alpha, y) = \alpha \cdot y, \tag{4.56}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ - произвольное число, $y \in \mathbb{R}^n$ - произвольный вектор, такой, что

$$\|y\| = 1. \tag{4.57}$$

Построим матрицу $H(x(\alpha, y))$ по формуле

$$H(x(\alpha, y)) = (b - Ax(\alpha, y)) \cdot x^+(\alpha, y) \tag{4.58}$$

и рассмотрим функцию

$$\Phi(x(\alpha, y)) = \|H(x(\alpha, y))\|_E .$$

В силу теоремы 3.1 матрица $H(x(\alpha, y))$, задаваемая формулой (4.58), является минимальным по евклидовой норме решением уравнения

$$H(x(\alpha, y)) \cdot x(\alpha, y) = b - Ax(\alpha, y),$$

откуда, в частности, следует, что

$$x(\alpha, y) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H(x(\alpha, y)), b) \tag{4.59}$$

и

$$\Phi(x(\alpha, y)) = \frac{\|b - A \cdot x(\alpha, y)\|}{\|x(\alpha, y)\|}. \tag{4.60}$$

Из (4.56)-(4.57), (4.60) и непрерывности евклидовой векторной нормы следует, что $\Phi(x(\alpha, y))$ непрерывна при любых значениях y, отвечающих условию (4.57), и любых $\alpha \neq 0$. В силу (4.52) и (4.55)

$$\Phi(x(\alpha, y)) > \gamma \quad \forall \alpha \neq \pm\infty,\ \forall y \big| b^{\mathrm{T}} A y \neq 0.$$

В то же время,

$$\lim_{\substack{\alpha \to \pm\infty, \\ y \to y^*}} \Phi(x(\alpha, y)) = \gamma,$$

но при этом

$$x(\pm\infty, y^*) = \lim_{\substack{\alpha \to \pm\infty, \\ y \to y^*}} x(\alpha, y) \in \operatorname*{Arg\,inf}_{x(\alpha, y)} \Phi(x(\alpha, y)),$$

$$\|x(\pm\infty, y^*)\| = +\infty.$$

Заметим, что, несмотря на последнее соотношение в соответствии с формулами (4.56) и (3.9), следующий предел существует и может быть вычислен:

$$\lim_{\substack{\alpha \to \pm\infty, \\ y \to y^*}} x(\alpha, y) \cdot x^+(\alpha, y) = y^* y^{*+}. \tag{4.61}$$

В силу (4.61) существует и матрица $H(x(\pm\infty, y^*))$:

$$H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right) = \lim_{\substack{\alpha\to\pm\infty,\\ y\to y^*}} H\left(x(\alpha, y)\right) = -A \cdot y^* y^{*+}. \tag{4.62}$$

Таким образом, существуют матрицы, сколь угодно близкие по значению евклидовой нормы к матрице $H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right)$, корректирующие систему (1.1)-(1.2). Но их норма больше нормы $H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right)$.

Покажем, что

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right), b\right) = \\ = \lim_{\substack{\alpha\to\pm\infty,\\ y\to y^*}} \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x(\alpha, y)\right), b\right) = \varnothing,\end{gathered} \tag{4.63}$$

т.е., другими словами, что матрица $H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right)$ уже не корректирует систему (1.1)-(1.2). Действительно, в силу (4.61)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H\left(x\left(\pm\infty, y^*\right)\right), b\right) \neq \varnothing \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A \cdot \left(I - y^* y^{*+}\right), b\right) \neq \varnothing \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^n \left| A \cdot \left(I - y^* y^{*+}\right) \cdot u \equiv b.\right.\end{gathered}$$

Но последнее соотношение означает, что вектор

$$\tilde{u} = \left(I - y^* y^{*+}\right) \cdot u$$

является решением несовместной системы (1.1) (противоречие).

Таким образом, мы показали, что задача $Z_{fix\{b\}}(A, b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор y^*, отвечающий условиям (4.36)-(4.37).

3. Обоснование формул (4.39)-(4.40).

Как было показано выше, при выполнении достаточных условий существования решения задачи $Z_{fix\{b\}}(A, b)$**,** вектор x^*, задаваемый формулой (4.40), действительно принадлежит множеству решений скорректированной системы $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b\right)$. Покажем теперь, что x^* является единственным элементом множества $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b\right)$.

Действительно, пусть задача $Z_{fix\{b\}}(A, b)$ имеет решение – матрицу коррекции H^*, построенную по формуле (4.38) с учетом формул (4.36),(4.37) и (4.40). Мы хотим показать, что множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b\right)$ состоит из единственного вектора x^*, задаваемого формулой (4.40). Доказательство проведем "от противного". Пусть вектор $\tilde{x} \neq x^*$ также принадлежит множеству

$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*,b\right)$. Таким образом, справедливы два тождества:

$$\left(A+H^*\right)x^* \equiv b \tag{4.64}$$

и

$$\left(A+H^*\right)\tilde{x} \equiv b. \tag{4.65}$$

Из (4.64) и (4.65) можно получить следствие вида (4.26)-(4.27), полученное в ходе доказательства единственности решения скорректированной системы в задаче $Z_{total}\left(A,b\right)$ (теорема 4.1). Дальнейшие рассуждения оказываются очень похожими на соответствующие рассуждения, сделанные при доказательстве теоремы 4.1. Так, в силу (3.9) и (4.38)

$$H^* = \left(b-Ax^*\right)\cdot\frac{x^{*\mathrm{T}}}{x^{*\mathrm{T}}x^*}. \tag{4.66}$$

С учетом (4.66) тождество (4.26) можно переписать в виде соотношения (4.29), где

$$\alpha = \frac{x^{*\mathrm{T}}\vartriangle x}{x^{*\mathrm{T}}x^*}. \tag{4.67}$$

Пусть $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$. В этом случае, в силу (4.29) вектор

$$\widehat{x} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\vartriangle x$$

является решением несовместной системы (1.1) (противоречие). Пусть $\alpha=1$. В этом случае в силу (4.29) получаем $b=0$, что противоречит нашим допущениям о системе (1.1). Предположим теперь, что $\alpha=0$. В этом случае из (4.29) и (4.30) получаем (4.31) и (4.32).

Сформируем вектор x^{**} с помощью (4.33) и матрицу H^{**} как:

$$H^{**} = \left(b-Ax^{**}\right)\cdot x^{**+}. \tag{4.68}$$

Используя соотношения (4.31)-(4.33) и (4.68) несложно убедиться, что матрица H^{**} корректирует систему (1.1)-(1.2). Это действительно так, поскольку $x^{**}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H^{**},b)$. В то же время, с использованием (4.31),(4.32) и (4.33), а также теоремы Пифагора, получаем

$$\left\|H^{**}\right\|_E = \frac{\left\|b-Ax^{**}\right\|}{\left\|x^{**}\right\|} = \frac{\left\|b-Ax^*\right\|}{\left(\left\|x^*\right\|^2+\|\vartriangle x\|^2\right)^{1/2}} < \gamma,$$

что противоречит уже доказанному утверждению об оптимальности (в контексте задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$) матрицы H^*.

Таким образом, нами доказано и последнее утверждение теоремы 4.2 о единственности (при фиксированной матрице коррекции) решения скорректированной в рамках задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ системы (1.1)-(1.2) при условии, что сама задача $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ имеет решение.

Следствие. Если корректируемая система (1.1)-(1.2) такова, что

$$\operatorname{rank} A < n,$$

то задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения.

Доказательство. Как известно,

$$\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \,|\, Ax = 0 \Rightarrow$$

$$A^{\mathrm{T}}\left(I - b^{+}b\right)Ax = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - b^{+}b\right)Ax\right) = 0.$$

Но тогда в силу теоремы 4.2 предположение о разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ приводит к признанию существования матрицы коррекции системы (1.1)-(1.2) с нулевой нормой, т.е., данная система совместна (противоречие).

4.3. Задача $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$

Введем в рассмотрение некоторые дополнительные объекты. Пусть

$$R = I - SS^{+}, \tag{4.69}$$

$$\tilde{A} = RA, \tag{4.70}$$

$$\tilde{b} = Rb. \tag{4.71}$$

Формулы (4.69)-(4.71) означают, что столбцы матрицы $\tilde{A}$ являются ортогональными проекциями соответствующих столбцов матрицы A в линейное подпространство, являющееся ортогональным дополнением линейного подпространства столбцов матрицы S, а вектор $\tilde{b}$ является ортогональной проекцией вектора b в указанное линейное подпространство.

Теорема 4.3. Задача $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ обладает следующими свойствами:

$$z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right) = z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right). \tag{4.72}$$

Для того чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}^{*} & -\tilde{h}^{*} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)\right) \tag{4.73}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{A} + \tilde{H}^{*}, \tilde{b} + \tilde{h}^{*}\right) = x_{A}^{*}, \tag{4.74}$$

то

$$\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}^{*} & -\tilde{h}^{*} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)\right), \tag{4.75}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b + h^*\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}, \tag{4.76}$$

где

$$x_S^* = S^+(b - Ax_A^*) + (I - S^+S)\vartriangle x_S, \tag{4.77}$$

$$\vartriangle x_S \in \mathbb{R}^k \text{ - произвольный вектор.} \tag{4.78}$$

Доказательство.

1. Обоснование формулы (4.72).

Пусть $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H & S \end{bmatrix}, b + h\right) \neq \varnothing. \tag{4.79}$$

Предположение (4.79), в свою очередь, подразумевает существование векторов $x_A \in \mathbb{R}^n$ и $x_S \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H & S \end{bmatrix}, b + h\right). \tag{4.80}$$

Условие (4.80) эквивалентно совместности следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} = b - Ax_A - Sx_S. \tag{4.81}$$

В силу теоремы 3.1 существует матрица $\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h} \end{bmatrix}$, являющаяся при фиксированном векторе $x_A \neq 0$ решением системы (4.81) с минимальной евклидовой нормой. При этом в силу (3.20) и (3.21) справедливы соотношения

$$\begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h} \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+, \tag{4.82}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{H} & -\hat{h} \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.83}$$

Из формулы (4.83) следует, что

$$z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right) = \inf_{x_A, x_S} \frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.84}$$

Соотношение (4.84) приводит нас к необходимости рассмотреть задачу

$$\frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} \to \inf_{x_A, x_S}. \tag{4.85}$$

Будем решать задачу (4.85) в два этапа. В начале предположим, что оптимальный для задачи (4.85) вектор x_A^* известен, а оптимальный вектор x_S^* - нет. Тогда, в силу (4.85),

$$\inf_{x_A, x_S} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} \to \inf_{x_S} \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}. \tag{4.86}$$

Таким образом, на первом этапе следует решить задачу

$$\frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} \to \inf_{x_S}. \tag{4.87}$$

Поскольку $\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\| > 0$ при любом x_A^*, задача (4.87) сводится к решению относительно x_S системы линейных уравнений

$$Sx_S = b - Ax_A^* \tag{4.88}$$

по методу наименьших квадратов. Но тогда, в соответствии с формулой (3.11),

$$\hat{\mathcal{X}}\left(S, b - Ax_A^*\right) = \left\{x_S^*\right\}, \tag{4.89}$$

где x_S^* определяется по формулам (4.77)-(4.78).

Для перехода ко второму этапу решения задачи (4.85) заметим, что подстановка x_S^* в соотношение (4.86) с привлечением формул (4.77)-(4.78), а также (4.69)-(4.71) и (4.12) дает

$$\begin{aligned} \inf_{x_A, x_S} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} &= \inf_{x_A^*} \frac{\left\|b - Ax_A^* - SS^+\left(b - Ax_A^*\right)\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \\ = \inf_{x_A^*} \frac{\left\|R\left(b - Ax_A^*\right)\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} &= \inf_{x_A^*} \frac{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Таким образом, формула (4.72) оказывается обоснованной с использованием (4.84) и (4.90).

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$.

Достаточность. Покажем теперь *достаточность* существования решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$ для существования решения рассматриваемой задачи $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$ имеет некоторое решение $\begin{bmatrix} \tilde{H}^* & -\tilde{h}^* \end{bmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 4.1 множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}(\tilde{A} + \tilde{H}^*, \tilde{b} + \tilde{h}^*)$ состоит из единственного вектора $\tilde{x}^*$, причем $\left\|\tilde{x}^*\right\| < +\infty$. В соответствии с левой частью утверждения (4.75) положим

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}^* & -\tilde{h}^* \end{bmatrix}.$$

В силу теоремы 4.1 (формула (4.4))

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+,$$

где $x_A^* = \tilde{x}^*$. Используя (4.69)-(4.71), можно показать, что

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+.$$

В свою очередь, непосредственное использование указанной выше формулы совместно с формулами (4.76)-(4.78) позволяет убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ действительно корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = b$. Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$. Для этого в соответствии с уже обоснованным утверждением (4.72) достаточно показать, что $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$. Воспользуемся результатами теоремы 3.1 и заметим, что $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ строится по формуле, аналогичной формуле (3.20). Поэтому для $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E$ справедлива приведенная ниже формула, аналогичная формуле (3.21). Ее дальнейшие преобразования, выполненные с учетом формул (4.69)-(4.71), а также (4.73)-(4.74) и (4.77)-(4.78) и с использованием ряда выкладок, проделанных при исследовании задачи $Z_{total}\left(A, b\right)$ в доказательстве теоремы 4.1, позволяют записать:

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| b - Ax_A^* - Sx_S^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \tilde{b} - \tilde{A}x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b} \right).$$

Таким образом, оптимальность (в контексте задачи $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b \right)$) матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, построенной по формуле (4.75), доказана. Следовательно, обоснована достаточность существования решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b} \right)$ для существования решения задачи $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b \right)$.

Необходимость. Покажем теперь, что справедливо и обратное утверждение, а именно: если решение задачи $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b} \right)$ не существует, то не существует и решение задачи $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b \right)$. Доказательство проведем "от противного". Пусть задача $Z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b} \right)$ неразрешима, а задача $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b \right)$ имеет решение. Обозначим это решение как $\begin{bmatrix} \mathcal{H} & \boldsymbol{h} \end{bmatrix}$. В силу (4.72),

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & \boldsymbol{h} \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\tilde{A}, \tilde{b} \right). \tag{4.91}$$

Указанной матрице должно соответствовать некоторое непустое множество решений скорректированной системы (1.1). Пусть, например,

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + \mathcal{H} & S \end{bmatrix}, b + \boldsymbol{h} \right), \tag{4.92}$$

где $x_A \in \mathbb{R}^n$, $x_S \in \mathbb{R}^k$ - некоторые векторы, такие, что

$$\left\| x_A \right\| < +\infty, \tag{4.93}$$

$$\left\| x_S \right\| < +\infty. \tag{4.94}$$

С использованием (4.92)-(4.94) можно записать:

$$\left(A + \mathcal{H} \right) x_A + Sx_S \equiv b + \boldsymbol{h}. \tag{4.95}$$

А теперь попробуем рассмотреть тождество (4.95) как уравнение, из которого при фиксированных x_A и x_S необходимо найти некоторую матрицу $\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму. В силу (4.91)

$$\left\|\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}\right\|_E = \left\|\begin{bmatrix} \mathcal{H} & h \end{bmatrix}\right\|_E = z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right). \tag{4.96}$$

В то же время, в силу теоремы 3.1 и формул (4.69)-(4.71) можно записать:

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \\ = R\cdot\left(b - Ax_A\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ + \left((I-R)\cdot\left(b - Ax_A\right) - Sx_S\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \\ = \begin{bmatrix} -\tilde{A} & \tilde{b} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ + \begin{bmatrix} \vartriangle H & -\vartriangle h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartriangle H & -\vartriangle h \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{4.97}$$

В силу (4.69) столбцы матрицы $\begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix}$ ортогональны столбцам матрицы $\begin{bmatrix} \vartriangle H & -\vartriangle h \end{bmatrix}$. Таким образом, используя (4.96), (4.97) и теорему Пифагора, получаем

$$\begin{gathered}\left\|\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}\right\|_E^2 = z_{total}^2\left(\tilde{A},\tilde{b}\right) = \\ = \left\|\begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix}\right\|_E^2 + \left\|\begin{bmatrix} \vartriangle H & -\vartriangle h \end{bmatrix}\right\|_E^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\|\begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix}\right\|_E \le z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right).\end{gathered} \tag{4.98}$$

Используя формулы (4.69)-(4.71) а также (4.97) и (3.9), последовательно убеждаемся, что матрица $\begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\tilde{A}x = \tilde{b}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + \widehat{H} & S \end{bmatrix}, b + \widehat{h}\right)$ и выполняется условие (4.93). В то же время, в силу (4.98), матрица $\begin{bmatrix} \tilde{H} & -\tilde{h} \end{bmatrix}$ оказывается оптимальным решением задачи $Z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$, что противоречит сделанному выше допущению о неразрешимости указанной задачи.

Таким образом, мы показали, что задача $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача $Z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$.

3. Обоснование формул (4.76)-(4.78).

Как было показано выше, верхний блок x_A^* некоторого вектора из $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b + h^*\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}$, определяется из решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$. Другими словами, при рассмотрении некоторого варианта решения задачи

$Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ существует взаимно однозначное соответствие между матрицей $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ и вектором x_A^*. В то же время, как было показано в п. 1 при обоснование формулы (4.72), при фиксированном x_A^* вектор x_S^* определяется как решение по методу наименьших квадратов системы (4.88). Указанное решение и предоставляют формулы (4.77)-(4.78), которые фактически представляют собой формулу (3.11), переписанную в других обозначениях. Таким образом, при фиксированной матрице $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b + h^*\right)$ действительно описывается формулами (4.76)-(4.78).

4.4. Задача $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$

Пусть матрица $\tilde{A}$ и вектор $\tilde{b}$ по-прежнему определяются формулами (4.70)-(4.71).

Теорема 4.4. Задача $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ обладает следующими свойствами:

$$z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right) = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right). \tag{4.99}$$

Для того чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$. При этом если

$$\tilde{H}^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)\right), \tag{4.100}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\tilde{A} + \tilde{H}^*, \tilde{b}) = x_A^*, \tag{4.101}$$

то

$$H^* = \tilde{H}^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)\right), \tag{4.102}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}, \tag{4.103}$$

где вектор x_S^*, как и прежде, задается формулами (4.77)-(4.78).

Доказательство.

1. Обоснование формулы (4.99).

Пусть $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \end{bmatrix}, b\right) \neq \varnothing. \tag{4.104}$$

Предположение (4.104), в свою очередь, подразумевает существование векторов $x_A \in \mathbb{R}^n$ и $x_S \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \end{bmatrix}, b\right). \tag{4.105}$$

Условие (4.105) эквивалентно совместности следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$Hx_A = b - Ax_A - Sx_S. \tag{4.106}$$

В силу теоремы 3.1 существует матрица $\widehat{H}$, являющаяся при фиксированном векторе x_A решением системы (4.106) с минимальной евклидовой нормой. При этом в силу (3.20) и (3.21) справедливы соотношения

$$\widehat{H} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right) \cdot x_A^+, \tag{4.107}$$

$$\left\|\widehat{H}\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|x_A\right\|}. \tag{4.108}$$

Из формулы (4.107) (4.108) следует, что

$$z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right) = \inf_{x_A, x_S} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|x_A\right\|}. \tag{4.109}$$

Соотношение (4.109) приводит нас к необходимости рассмотреть задачу

$$\frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|x_A\right\|} \to \inf_{x_A, x_S}. \tag{4.110}$$

Будем решать задачу (4.110) в два этапа. В начале предположим, что оптимальный для задачи (4.110) вектор x_A^* известен, причем

$$x_A^* \neq 0, \tag{4.111}$$

а оптимальный вектор x_S^* - нет. Тогда, в силу (4.110),

$$\inf_{x_A, x_S} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|x_A\right\|} \to \inf_{x_S} \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|}. \tag{4.112}$$

Таким образом, на первом этапе следует решить задачу

$$\frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} \to \inf_{x_S}. \tag{4.113}$$

В силу условия (4.111) задача (4.113) сводится к проблеме решения относительно x_S системы линейных уравнений вида (4.88) по методу наименьших квадратов. Данная проблема уже встречалась в ходе доказательства теоремы 4.3, поэтому просто укажем на формулы (4.77)-(4.78) и (4.89), которые характеризуют ее решение.

Для перехода ко второму этапу решения задачи (4.110) заметим, что подстановка x_S^* в соотношение (4.112) с привлечением формул (4.77)-(4.78), а также (4.69)-(4.71) и (4.46) дает

$$\begin{aligned} &\inf_{x_A\neq 0, x_S} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|x_A\right\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\|b - Ax_A^* - SS^+\left(b - Ax_A^*\right)\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \\ &= \inf_{x_A^*} \frac{\left\|R\left(b - Ax_A^*\right)\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right). \end{aligned} \tag{4.114}$$

Таким образом, утверждение (4.99) оказывается обоснованным с использованием соотношений (4.109) и (4.114).

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S\end{bmatrix}, b\right)$.

Достаточность. Займемся обоснованием *достаточности* существования решения задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$ для существования решения задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S\end{bmatrix}, b\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$ имеет некоторое решение $\tilde{H}^*$. Тогда, в силу теоремы 4.2. множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}(\tilde{A} + \tilde{H}^*, \tilde{b})$ состоит из единственного вектора x_A^*, причем $\left\|x_A^*\right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.102)) матрицу H^* по формуле

$$H^* = \tilde{H}^*.$$

В силу теоремы 4.2 (формула (4.38))

$$H^* = \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right)x_A^{*+}.$$

Используя формулы (4.69)-(4.71), можно показать, что

$$H^* = \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right)\cdot x_A^{*+} = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)\cdot x_A^{*+}.$$

Непосредственное использование указанной выше формулы совместно с формулами (4.77)-(4.78) и (4.103) позволяет убедиться, что матрица H^* действительно корректирует систему $Ax_A + Sx_S = b$ в соответствии с постановкой задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S\end{bmatrix}, b\right)$. Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S\end{bmatrix}, b\right)$. Для этого в соответствии с уже обоснованным утверждением (4.99) достаточно показать, что $\left\|H^*\right\|_E = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$. Воспользуемся результатами теоремы 3.1 и заметим, что H^* строится по формуле, аналогичной формуле (3.20). Поэтому для $\left\|H^*\right\|_E$ справедлива приведенная ниже формула, аналогичная формуле (3.21). Ее дальнейшие преобразования, выполненные с учетом формул (4.69)-(4.71), а также (4.73)-(4.74) и (4.77)-(4.78) и с использованием ряда выкладок, проделанных при исследовании задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ в доказательстве теоремы 4.2, позволяют записать:

$$\left\|H^*\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} =$$

$$= \frac{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_A^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right).$$

Таким образом, оптимальность (в контексте задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix},b\right)$) матрицы H^*, построенной по формуле (4.102), доказана. Следовательно, обоснована *достаточность* существования решения задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ для существования решения задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix},b\right)$.

Необходимость. Покажем теперь, что справедливо и обратное утверждение, а именно: если решение задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ не существует, то не существует и решение задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix},b\right)$. Доказательство проведем "от противного". Пусть задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ неразрешима, а задача $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix},b\right)$ имеет решение. Обозначим это решение как $\mathcal{H}$. В силу (4.99),

$$\left\|\mathcal{H}\right\|_E = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right). \tag{4.115}$$

Указанной матрице должно соответствовать некоторое непустое множество решений скорректированной системы (1.1). Пусть, например,

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+\mathcal{H} & S \end{bmatrix},b\right), \tag{4.116}$$

где $x_A \in \mathbb{R}^n$, $x_S \in \mathbb{R}^k$ - некоторые векторы, такие, что выполнены условия (4.93) -(4.94). С использованием (4.93)-(4.94) и (4.116) можно записать:

$$\left(A+\mathcal{H}\right)x_A + Sx_S \equiv b. \tag{4.117}$$

А теперь рассмотрим тождество (4.117) как уравнение, из которого при фиксированных x_A и x_S необходимо найти некоторую матрицу $\widehat{H}$, имеющую минимальную евклидову норму. В силу (4.115)

$$\left\|\widehat{H}\right\|_E = \left\|\mathcal{H}\right\|_E = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right). \tag{4.118}$$

В то же время, в силу теоремы 3.1 и формул (4.69)-(4.71) можно записать:

$$
\begin{aligned}
\widehat{H} &= \left(b - Ax_A - Sx_S\right) \cdot x_A^+ = \\
&= R \cdot \left(b - Ax_A\right) \cdot x_A^+ + \left(\left(I - R\right) \cdot \left(b - Ax_A\right) - Sx_S\right) \cdot x_A^+ = \\
&= \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A\right) \cdot x_A^+ + \vartriangle H = \tilde{H} + \vartriangle H.
\end{aligned} \tag{4.119}
$$

В силу (4.69) столбцы матрицы $\tilde{H}$ ортогональны столбцам матрицы $\vartriangle H$. Таким образом, используя (4.118), (4.119) и теорему Пифагора, получаем

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widehat{H}\right\|_E^2 = z_{fix\{\tilde{b}\}}^2\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right) = \left\|\widehat{H}\right\|_E^2 + \left\|\vartriangle H\right\|_E^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\|\tilde{H}\right\|_E \le z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right).
\end{aligned} \tag{4.120}
$$

Используя формулы (4.69)-(4.71) а также (4.119) и (3.9), последовательно убеждаемся, что матрица $\tilde{H}$ корректирует несовместную систему $\tilde{A}x = \tilde{b}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + \widehat{H} & S \end{bmatrix}, b\right)$ и выполняется условие (4.93). В то же время, в силу (4.120), матрица $\tilde{H}$ оказывается оптимальным решением задачи $z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$, что противоречит сделанному выше допущению о неразрешимости указанной задачи.

Таким образом, мы показали, что задача $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$.

3. Обоснование формулы (4.103).

Как было показано выше, верхний блок x_A^* некоторого вектора из $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}$, определяется из решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(\tilde{A}, \tilde{b}\right)$. Другими словами, при рассмотрении некоторого варианта решения задачи $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ существует взаимно однозначное соответствие между матрицей H^* и вектором x_A^*. В то же время, как было показано в п. 1 при обоснование формулы (4.99), при фиксированном x_A^* вектор x_S^* определяется как решение по методу наименьших квадратов системы (4.88). Указанное решение и предоставляют формулы (4.77)-(4.78), которые фактически представляют собой формулу (3.11), переписанную в других обозначениях. Таким образом, при фиксированной матрице H^* множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \end{bmatrix}, b\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}$ действительно описывается формулами (4.77)-(4.78) и (4.103).

4.5. Задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

Введем в рассмотрение некоторые дополнительные объекты. Пусть

$$G = I - T^{+}T, \tag{4.121}$$

$$\hat{x} = T^{+}d, \tag{4.122}$$

$$\widehat{A} = AG, \tag{4.123}$$

$$\delta = \left(\|\hat{x}\|^{2} + 1\right)^{1/2}, \tag{4.124}$$

$$\widehat{b} = \delta^{-1} \cdot (b - A\hat{x}), \tag{4.125}$$

Рассмотрим также два условия:

$$G \neq 0, \tag{4.126}$$

$$\hat{x} \neq 0. \tag{4.127}$$

Для последующих выкладок будет полезно ввести в рассмотрение модификацию задачи $Z_{total}(A,b)$ - задачу $\tilde{Z}_{total}(A,b,\mathrm{D})$. Будем считать, что $\tilde{Z}_{total}(A,b,\mathrm{D})$ отличается от $Z_{total}(A,b)$ некоторыми дополнительными ограничениями, накладываемыми на вид множества решений исследуемой системы линейных алгебраических уравнений *после* ее коррекции. Другими словами, мы хотим, чтобы было не пусто множество вида

$$\tilde{\mathcal{X}}(A + H^{*}, b + h^{*}, \mathrm{D}) = \left\{x \in \mathrm{D} \middle| \left(A + H^{*}\right)x = b + h^{*}\right\},$$

где $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^{n}$ - некоторая область, вид которой мы не конкретизируем. В качестве примера можно указать условие неотрицательности решения, т.е., рассматривать задачу

$$\tilde{Z}_{total}(A,b,x \geq 0): \ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_{E} \to \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b+h) \neq \varnothing, \\ \forall x \in \mathcal{X}(A+H,b+h) \Rightarrow x \geq 0}}.$$

Указанная задача возникает, например, при коррекции несобственных задач линейного программирования, записанных в канонической форме [16]. Другие примеры дополнительных ограничений будут приведены в главе 7.

Применяя теорему 3.1 и проводя рассуждения, аналогичные использовавшимся при доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что справедливо

Утверждение 4.1.

$$\tilde{z}_{total}(A,b,\mathrm{D}) = \min_{x \in \mathrm{D}} \frac{\|b - Ax\|}{\left\|\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}.$$

При этом задача $\tilde{Z}_{total}(A,b,\mathrm{D})$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x\in \mathrm{D}} \frac{\|b - Ax\|}{\left\|\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}.$$

При этом

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{total}(A, b, \mathrm{D})\right),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(A + H^*, b + h^*, \mathrm{D}\right) = x^*.$$

Введем в рассмотрение еще одну модифицированную задачу - $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$. Будем предполагать, что $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ также отличается от $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ некоторыми дополнительными ограничениями, накладываемыми на вид множества решений исследуемой системы линейных алгебраических уравнений *после* ее коррекции.

Пусть

$$\tilde{\mathrm{D}} = \left\{Gg \mid \hat{x} + Gg \in \mathrm{D}\right\}, \tag{4.128}$$

где $g \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Напомним, что $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathbb{R}^{l\times n}$ и $d \in \mathbb{R}^l$.

Утверждение 4.2. Если $T \neq 0$ то $\operatorname{rank} \widehat{A} < n$.

Доказательство. Условие $T \neq 0$ влечет условие $\min\{l, n\} \geq \operatorname{rank} T = r_T > 1$. В свою очередь, $\operatorname{rank} T^+T = r_T$, поскольку T^+T - ортогональный проектор в линейное подпространство, натянутое на строки матрицы T. Следовательно, $0 \leq \operatorname{rank} G = n - r_T < n$, поскольку G - ортогональный проектор в подпространство, являющееся ортогональным дополнением к подпространству строк матрицы T. Таким образом доказывемое утверждение справедливо в силу неравенства Сильвестра (см., например, [7]).

Задачи $\tilde{Z}_{total}(A, b, \mathrm{D})$, $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ и утверждения 4.1 и 4.2 рассмотрены не случайно. Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования решения задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ является существование решения некоторой вспомогательной задачи $Z_{total}(A', b')$. Но при этом оказывается, что сама задача $Z_{total}(A', b')$ имеет решение тогда и только тогда, когда либо a) подсистема $Tx = d$ имеет единственное решение, либо b) подсистема $Tx = d$ является однородной, т.е., $d \equiv 0$. Кроме того, задача $Z_{total}\left(A', b'\right)$ может иметь решение, если подсистема $Tx = d$ представляет собой тривиальное тождество вида $0x = 0$. Вышесказанное обосновывается с помощью утверждения 4.2, и можно показать, что в остальных случаях задача $Z_{total}\left(A', b'\right)$ решения не имеет. Таким образом, оказывается уместным вместо задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ подвергнуть исследованию возможно более содержательную задачу $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.** Это и сделано (с использованием утверждения 4.1) в приведенной ниже теореме.

Теорема 4.5. При решении задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ возможны только следующие 4 случая:

a) Условие (4.126) выполнено, а условие (4.127) – нет. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.129}$$

а для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{H}}^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right)\right) \tag{4.130}$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\widehat{A} + \widehat{\mathcal{H}}^*, b + h^*, \tilde{\mathrm{D}}) = \widehat{x}^* \tag{4.131}$$

то

$$\begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right), \mathrm{D}\right), \tag{4.132}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = x^* = \widehat{x}^*. \tag{4.133}$$

b) Оба условия (4.126) и (4.127) не выполнены. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \|b\|, \tag{4.134}$$

а задача имеет единственное решение

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right),\mathrm{D}\right)=\begin{bmatrix}H^{*} & -h^{*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b\end{bmatrix}, \tag{4.135}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix}A+H^{*}\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b+h^{*}\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=0. \tag{4.136}$$

c) Оба условия (4.126) и (4.127) выполнены. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.137}$$

а для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix}\widehat{\mathcal{H}}^{*} & -\widehat{h}^{*}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right)\right) \tag{4.138}$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\widehat{A}+\widehat{\mathcal{H}}^{*},\widehat{b}+\widehat{h}^{*},\tilde{\mathrm{D}})=\widehat{x}^{*} \tag{4.139}$$

то

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix}A+H^{*}\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b+h^{*}\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=x^{*}=\hat{x}+\delta\cdot\widehat{x}^{*}, \tag{4.140}$$

где матрица $\begin{bmatrix}H^{*} & -h^{*}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right),\mathrm{D}\right)$ определяются формулой (4.132).

d) Условие (4.126) не выполнено, условие (4.127) выполнено. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\frac{\|b-A\hat{x}\|}{\delta}, \tag{4.141}$$

а задача имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix}-A & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}\\1\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}H^{*} & -h^{*}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right),\mathrm{D}\right), \tag{4.142}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix}A+H^{*}\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b+h^{*}\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\hat{x}. \tag{4.143}$$

Доказательство.

1. Обоснование формул (4.129), (4.134), (4.137) и (4.141).

Проведем, в соответствии с постановкой задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ коррекцию системы (1.1)-(1.2) в два этапа:

1) Предположим, что $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) \neq \varnothing. \tag{4.144}$$

Предположение (4.144), в свою очередь, подразумевает существование вектора $x \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$x \in \tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right). \tag{4.145}$$

Условие (4.145) эквивалентно совместности следующей системы:

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = b - Ax, \tag{4.146}$$

$$Tx = d,\ x \in \mathrm{D}. \tag{4.147}$$

Напомним, что постановка задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ предполагает совместность подсистемы (4.147). В наиболее общем случае для вектора x, являющегося решением подсистемы (4.147), справедливо представление, основанное на формулах (3.11) и (4.121)-(4.122):

$$x = \hat{x} + Gg,\ \hat{x} + Gg \in \mathrm{D} \tag{4.148}$$

где $g \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Заметим, что формула (4.148) может быть сокращена (упрощена) в зависимости от выполнения (невыполнения) условий (4.126)-(4.127). *Временно предположим, что формула (4.148) не сокращается и не упрощается, что соответствует выполнению обоих условий (4.126) и (4.127).* Таким образом, мы пока находимся в рамках предположений, связанных со случаем с) теоремы.

С учетом (4.148) уравнение (4.146) принимает вид

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + Gg \\ 1 \end{bmatrix} = b - A\hat{x} - AGg. \tag{4.149}$$

Пусть

$$\vartriangle x = Gg. \tag{4.150}$$

В силу (3.2), (4.121) и (4.150)

$$G\vartriangle x \equiv Gg. \tag{4.151}$$

Заметим также, что в силу формул (4.151), (4.121)-(4.122) и (3.2) вектор $\vartriangle x$

ортогонален вектору $\hat{x}$. С учетом формулы (4.150), тождества (4.151) и формулы (4.123) уравнение (4.149) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + \triangle x \\ 1 \end{bmatrix} = b - A\hat{x} - \widehat{A}\triangle x. \tag{4.152}$$

В силу теоремы 3.1 существует матрица $\begin{bmatrix} \widehat{H}(\triangle x) & -\widehat{h}(\triangle x) \end{bmatrix}$, являющаяся при фиксированном векторе $\triangle x$ решением системы (4.152) с минимальной евклидовой нормой. *Таким образом, оценка величины* $\left\| \begin{bmatrix} \widehat{H}(\triangle x) & -\widehat{h}(\triangle x) \end{bmatrix} \right\|_E$ *и есть задача этапа 1) решения задачи* $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right)$**.**

В силу (3.20) и (3.21) справедливы соотношения

$$\begin{bmatrix} \widehat{H}(\triangle x) & -\widehat{h}(\triangle x) \end{bmatrix} = \left(b - A\hat{x} - \widehat{A}\triangle x \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + \triangle x \\ 1 \end{bmatrix}^{+}, \tag{4.153}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{H}(\triangle x) & -\widehat{h}(\triangle x) \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| b - A\hat{x} - \widehat{A}\triangle x \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \hat{x} + \triangle x \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.154}$$

После преобразований правой части уравнения (4.154) с учетом взаимной ортогональности векторов
$\hat{x}$ и $\triangle x$, формул (4.124)-(4.125) и теоремы Пифагора, имеем:

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{H}(\triangle x) & -\widehat{h}(\triangle x) \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| b - A\hat{x} - \widehat{A}\triangle x \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \hat{x} + \triangle x \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{bmatrix} -\widehat{A} & b - A\hat{x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \triangle x \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\left(\|\hat{x}\|^2 + \|\triangle x\|^2 + 1 \right)^{1/2}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \triangle x \\ \delta \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \triangle x \\ \delta \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.155}$$

2) Рассмотрим задачу

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix} \right\|_E \to \inf_{\triangle x | \hat{x} + \triangle x \in \mathrm{D}} = \tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right). \tag{4.156}$$

В силу (4.155) и утверждения 4.1

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\inf_{\hat{x}+\vartriangle x\in\mathrm{D}}\frac{\left\|\begin{bmatrix}-\widehat{A} & \widehat{b}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x\\\delta\end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}\vartriangle x\\\delta\end{bmatrix}\right\|}=$$

$$=\min_{y\in\tilde{\mathrm{D}}}\frac{\left\|\widehat{b}-\widehat{A}y\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}y\\1\end{bmatrix}\right\|}=\tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.157}$$

где множество $\tilde{\mathrm{D}}$ определено формулой (4.128).

Таким образом, формула (4.137) обоснована.

Рассмотрим теперь допущения, связанные со случаем а). Теперь условие (4.127) не выполняется, т.е.,

$$\hat{x}\equiv 0. \tag{4.158}$$

Повторим приведенные выше выкладки с учетом соотношения (4.158). Заметим, что в этом случае, в силу (4.124)-(4.125)

$$\delta\equiv 1, \tag{4.159}$$

и, соответственно,

$$\widehat{b}\equiv b. \tag{4.160}$$

В свою очередь, в силу, (4.159)-(4.160) и утверждения 4.1 соотношение (4.157) принимает вид

$$\tilde{z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\inf_{\vartriangle x|\hat{x}+\vartriangle x\in\mathrm{D}}\frac{\left\|\begin{bmatrix}-\widehat{A} & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x\\1\end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}\vartriangle x\\1\end{bmatrix}\right\|}=$$

$$=\min_{y\in\tilde{\mathrm{D}}}\frac{\left\|b-\widehat{A}y\right\|}{\left\|\begin{bmatrix}y\\1\end{bmatrix}\right\|}=\tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},b,\tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.161}$$

где множество $\tilde{\mathrm{D}}$ определено формулой (4.128).

Обратимся к допущениям, связанным со случаем b) теоремы. Они эквивалентны следующей совокупности условий:

$$G\equiv 0, \tag{4.162}$$

$$\hat{x}\equiv 0. \tag{4.163}$$

В силу (4.148), (4.162)-(4.163) подсистема (4.147) единственное решение

$$x\equiv 0. \tag{4.164}$$

В силу условия (4.164) в матрице $\begin{bmatrix}H & -h\end{bmatrix}$ необходимо положить

$h = -b$. Но при этом матрица H может быть любой. Таким образом, матрица с минимальной евклидовой нормой $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ имеет вид (4.135). Из (4.135) немедленно следует (4.134), а (4.136) следует из (4.164).

Обратимся к допущениям, связанным со случаем d) теоремы. Они эквивалентны следующей совокупности условий:

$$G \equiv 0, \tag{4.165}$$

$$\hat{x} \neq 0. \tag{4.166}$$

В силу (4.148), (4.165)-(4.166) подсистема $Tx = d$ имеет единственное решение

$$x \equiv \hat{x}. \tag{4.167}$$

Повторим рассуждения, сделанные при исследовании случая c) теоремы с поправкой на условия (4.165)-(4.167). Так, уравнение (4.149) принимает вид

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix} = b - A\hat{x}. \tag{4.168}$$

В силу теоремы 3.1 уравнение (4.168) имеет единственное решение с минимальной евклидовой нормой, которое и выражается формулой (4.142). В свою очередь, из (4.142), с учетом (4.124), вытекает (4.141), а с учетом (4.167) устанавливается истинность (4.143).

2. Обоснование *достаточных* условий существования решения задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ в случаях a) и c).

Снова начнем исследование с условий, связанных со случаем c) теоремы, поскольку казанные условия обладают наибольшей общностью. Пусть задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение, и, соответственно, существуют матрица $\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{H}}^* & -\widehat{h}^* \end{bmatrix}$ и вектор $\widehat{x}^*$, удовлетворяющие условиям (4.138)-(4.139).

В силу утверждения 4.1

$$\widehat{x}^* \in \tilde{\mathrm{D}}. \tag{4.169}$$

Построим вектор x^* в соответствии с правой частью формулы (4.140) и матрицу $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ в соответствии с левой частью формулы (4.132). В силу (4.128) и (4.169)

$$x^* \in \mathrm{D}.$$

Используя формулы (4.122), (4.124) и (4.139)-(4.140) можно показать, что

$$\left\| x^* \right\| < +\infty.$$

В силу теоремы 3.1 матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является решением уравнения

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix},$$

в силу чего справедливо тождество

$$\left(A + H^*\right) x^* \equiv b + h^*,$$

т.е., для матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ действительно выполняется условие

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right) \neq \varnothing.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right)$**.** В силу левой части (4.132) и правой части (4.140) справедливо соотношение

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + \delta \cdot \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \hat{x} + \delta \cdot \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.170}$$

Выполним некоторые преобразования выражения (4.170). Для числителя, с учетом (4.125), имеем

$$\left\| \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + \delta \cdot \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \delta \left\| \begin{bmatrix} -A & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|. \tag{4.171}$$

Для преобразований знаменателя выражения (4.170) учтем, что векторы $\hat{x}$ и $\widehat{x}^*$ ортогональны друг другу, что следует из (4.128) и (4.169). Итак,

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} \widehat{x}^* = 0. \tag{4.172}$$

С учетом (4.124), (4.172) и теоремы Пифагора можно преобразовать знаменатель выражения (4.170):

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \hat{x} + \delta \cdot \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 &= \|\hat{x}\|^2 + \delta^2 \cdot \left\|\widehat{x}^*\right\|^2 + 1 = \\ &= \delta^2 \cdot \left\| \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \tag{4.173}$$

С учетом (4.171) и (4.173) выражение (4.170) преобразуется к виду

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -A & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.174}$$

Теперь заметим, что справедливо тождество

$$A\widehat{x}^* \equiv \widehat{A}\widehat{x}^*. \tag{4.175}$$

Указанное тождество следует из (4.121), (4.123), (4.128) и (4.169). В свою очередь, в силу (4.175), (4.139) и (4.1)-(4.6) формула (4.174) принимает вид

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| \widehat{b} - \widehat{A}\widehat{x}^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.176}$$

Таким образом, в силу (4.176) и (4.137) при предположениях, связанных со случаем с) теоремы матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, задаваемая левой частью формулы (4.132), является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$.

Обратимся теперь к обоснованию достаточных условий существования решения задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ при допущениях, связанных со случаем а) теоремы.

Пусть задача $Z_{total}\left(\widehat{A}, b\right)$ имеет решение, и, соответственно, существуют матрица $\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{H}}^* & -h^* \end{bmatrix}$ и вектор $\widehat{x}^*$, удовлетворяющие условиям (4.130)-(4.131). В силу утверждения 4.1 справедливо условие (4.169). Положим $x^* = \widehat{x}^*$ в соответствии со (4.133) и построим матрицу $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ в соответствии с левой частью формулы (4.132). В силу (4.128) и (4.169)

$$x^* \in \mathrm{D}.$$

Используя формулы (4.130)-(4.131) можно показать, что

$$\left\| x^* \right\| < +\infty.$$

В силу теоремы 3.1 матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является решением уравнения

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix},$$

в силу чего справедливо тождество

$$\left(A+H^*\right)x^* \equiv b+h^*,$$

т.е., для матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ действительно выполняется условие

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A+H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h^* \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) \neq \varnothing.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.** В силу левой части (4.132) и правой части (4.133) справедливо соотношение

$$\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|\begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}. \tag{4.177}$$

Можно показать, что опять справедливо тождество (4.175), которое также обосновывается с помощью (4.121), (4.123), (4.128) и (4.169). В свою очередь, в силу (4.175), (4.131) и (4.1)-(4.6) формула (4.177) принимает вид

$$\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|b - \widehat{A}\widehat{x}^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.178}$$

Таким образом, в силу (4.178) и (4.129) при предположениях, связанных со случаем a) теоремы матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, задаваемая левой частью формулы (4.132), является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.**

3. Обоснование *необходимых* условий существования решения в случаях a) и c).

Рассмотрим условия, связанные со случаем c). Доказательство проведем "от противного". Пусть задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ не имеет решения, но, в то же время, задача $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ разрешима. В силу последнего предположения существуют матрица $\begin{bmatrix} \mathcal{H} & h \end{bmatrix}$ и вектор x такие, что

$$\|x\| < +\infty, \tag{4.179}$$

$$\left(A + \mathcal{H}\right) x \equiv b + h, \tag{4.180}$$

$$Tx \equiv d, x \in \mathrm{D} \tag{4.181}$$

и, в силу (4.138),

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.182}$$

Рассмотрим тождества (4.180)-(4.181) как условия, из которых при фиксированном x необходимо найти матрицу $\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму. С одной стороны, в силу (4.182)

$$\left\| \begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix} \right\|_E = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.183}$$

В то же время, в силу (4.181) и в соответствии с (3.11) и (4.121)-(4.122)

$$x = \hat{x} + Gg = \hat{x} + \vartriangle x, \tag{4.184}$$

где $g \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор. Заметим, что в силу (4.121) и (4.184)

$$G \vartriangle x = \vartriangle x.$$

В силу теоремы 3.1 и формул (4.121)-(4.125) и (4.184) можно записать:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix} &= \left(b - Ax\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \\ &= \left(b - A\hat{x} - AG \vartriangle x\right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} + G \vartriangle x \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \\ &= \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartriangle x \\ \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartriangle x \\ \delta \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}^{+}, \end{aligned} \tag{4.185}$$

где $u = \delta^{-1} \cdot \vartriangle x$. Поскольку, в силу (4.124) $\delta \neq 0$, возможно выбрать $\vartriangle x$ так, чтобы выполнялось условие $\|u\| < +\infty$. Используя (4.185) совместно с (3.9), убеждаемся, что матрица $\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\widehat{A}x = \widehat{b}$, поскольку $u \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\widehat{A} + \widehat{H}, \widehat{b} + \widehat{h}\right)$. Кроме того, в силу (4.128), $u \in \tilde{\mathrm{D}}$. Но в совокупности с условием (4.183) это и означает, что задача $Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение (противоречие).

Рассмотрим теперь условия, связанные со случаем а). В этом случае можно просто повторить выкладки, приведенные выше для условий, связанных со случаем с), учитывая, что в силу (4.164), (4.124) и (4.125) соотношение (4.184) принимает вид

$$x = Gg = \vartriangle x = G \vartriangle x, \tag{4.186}$$

а соотношение (4.185) вид

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix} &= (b - Ax)\cdot\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^{+} = \\ &= (b - AG\vartriangle x)\cdot\begin{bmatrix}G\vartriangle x\\1\end{bmatrix}^{+} = \\ &= \begin{bmatrix}-\widehat{A} & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x\\1\end{bmatrix}^{+}.\end{aligned} \tag{4.187}$$

Выберем $\vartriangle x$ так, чтобы выполнялось условие $\|\vartriangle x\| < +\infty$. Используя (4.187) совместно с (3.9) убеждаемся, что матрица $\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\widehat{A}x = b$, поскольку $\vartriangle x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(\widehat{A}, b)$. Кроме того, в силу (4.128), $\vartriangle x \in \tilde{\mathrm{D}}$. Но учитывая условие

$$\left\|\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}\right\|_E = \left\|\begin{bmatrix}\mathcal{H} & h\end{bmatrix}\right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right),$$

приходим к выводу, что задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение (противоречие).

4. Обоснование *необходимых* и *достаточных* условий существования решения в случаях b) и d).

При условиях, связанных со случаями b) и d) решение задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ существует и единственно, а условия существования решения не связаны с существованием решения каких-либо вспомогательных задач и проверяются непосредственно.

5. Обоснование формул (4.133), (4.136), (4.140) и (4.143).

Тот факт, что векторы, описываемые правыми частями формул (4.133), (4.136), (4.140) и (4.143) действительно принадлежат множеству

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix}A + H^*\\T\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b + h^*\\d\end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$$

было показано в п.2 доказательства. Их единственность может быть доказана "от противного"

Теперь, когда теорема 4.5 доказана, можно обратиться к исследованию задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right)$ и обосновать те предварительные замечания, которые были сделаны в начале данного параграфа.

Утверждение 4.3. При решении задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ возможны только 3 случая, связанные с конкретным видом подсистемы $Tx = d$ и, соответственно, видом множества ее решений:

a) $\operatorname{rank} T = 0$. В этом случае совместная подсистема $Tx = d$ принимает вид $0x = 0$, а задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ оказывается тождественна задаче $Z_{total}(A, b)$.

b) $0 < \operatorname{rank} T < n$. В этом случае задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ не имеет решения.

c) $\operatorname{rank} T = n$. В этом случае задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ имеет единственное решение, описываемое формулами

$$z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\delta},$$

$$\begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right) = \hat{x}.$$

В рамках случая c) можно выделить подслучай с условием $d \equiv 0$, для которого имеем:

$$z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \|b\|,$$

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Доказательство. Случай a) – соответствующие утверждения очевидны. Случай b). Указанный случай сводится либо к случаю a) либо к случаю c) теоремы 4.5, если положить $\mathrm{D} \equiv \mathbb{R}^n$. Таким образом, согласно теореме 4.5, существование решения задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ эквивалентно существованию решения либо задачи $Z_{total}\left(\widehat{A}, b\right)$, либо, соответственно, существованию решения задачи $Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}\right)$. Но ни задача $Z_{total}\left(\widehat{A}, b\right)$, ни задача $Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}\right)$ решения не имеют в силу утверждения 4.2 и следствия из теоремы 4.1. Случай c) – соответствующие утверждения непосредственно следуют из теоремы 3.1 и единственности решения подсистемы $Tx = d$.

4.6. Задача $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

Для исследования задачи $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, которая, как следует из самой ее постановки, имеет много общего с задачей $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, мы применим схему, аналогичную использованной в предыдущем параграфе. То есть, рассмотрим модифицированную задачу $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$, которая отличается от исходной некоторыми дополнительными ограничениями, накладываемыми на вид множества решений исследуемой системы линейных алгебраических уравнений *после* ее коррекции, т.е.,

$$\tilde{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \left\{ x \in \mathrm{D} \,\middle|\, \begin{matrix} \left(A + H^*\right)x = b \\ Tx = d \end{matrix} \right\}.$$

В исследовании окажется полезной задача $\tilde{Z}_{total}\left(A, b, \mathrm{D}\right)$, рассмотренная в предыдущем параграфе, а также задача $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(A, b, \mathrm{D}\right)$, которую мы определим ниже.

Пусть объекты G, $\hat{x}$ и $\widehat{A}$ по-прежнему заданы формулами (4.121)-(4.123), а множество $\tilde{\mathrm{D}}$ задано формулой (4.128). Определим задачу $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(A, b, \mathrm{D}\right)$ как модифицированную задачу $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$, вводя дополнительные ограничения, накладываемые на вид множества решений исследуемой системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{\mathcal{X}}(A + H^*, b, \mathrm{D}) = \left\{ x \in \mathrm{D} \,\middle|\, \left(A + H^*\right)x = b \right\}$$

после ее коррекции.

Используя теорему 3.1 и проводя рассуждения, аналогичные использовавшимся при доказательстве теоремы 4.2, можно показать, что справедливо полезное для последующих выкладок

Утверждение 4.4.

$$\tilde{z}_{fix\{b\}}\left(A,b,\mathrm{D}\right)=\min_{x\in\mathrm{D}}\frac{\|b-Ax\|}{\|x\|}.$$

При этом задача $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(A,b,\mathrm{D}\right)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$x^{*}\in\operatorname*{Arg\,min}_{x\in\mathrm{D}}\frac{\|b-Ax\|}{\|x\|}.$$

При этом

$$H^{*}=\left(b-Ax^{*}\right)x^{*+}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(A,b,\mathrm{D}\right)\right),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(A+H^{*},b,\mathrm{D}\right)=x^{*}.$$

Теорема 4.6. При решении задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)$ возможны только следующие 4 случая:

a) Условие (4.126) выполнено, условие (4.127) не выполнено. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=\tilde{z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A},b,\tilde{\mathrm{D}}\right),\qquad(4.188)$$

а для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A},b,\tilde{\mathrm{D}}\right)$. При этом если .

$$\widehat{H}^{*}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A},b,\tilde{\mathrm{D}}\right)\right)\qquad(4.189)$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\widehat{A}+\widehat{H}^{*},b,\tilde{\mathrm{D}})=\widehat{x}^{*}\qquad(4.190)$$

то

$$x^{*}=\widehat{x}^{*},\qquad(4.191)$$

$$\left(b-Ax^{*}\right)x^{*+}=H^{*}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix}A\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right),\mathrm{D}\right),\qquad(4.192)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix}A+H^{*}\\T\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix},\mathrm{D}\right)=x^{*}.\qquad(4.193)$$

b) Оба условия (4.126) и (4.127) не выполнены. В этом случае задача

$\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ не имеет решения.

c) Оба условия (4.126) и (4.127) выполнены. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.194}$$

где

$$\widehat{b} = \frac{1}{\|\hat{x}\|}(b - A\hat{x}), \tag{4.195}$$

а для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \widehat{H}^* & -\widehat{h}^* \end{bmatrix} \in \mathcal{H}\left(Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}\right)\right) \tag{4.196}$$

и

$$\tilde{\mathcal{X}}(\widehat{A} + \widehat{H}^*, \widehat{b} + \widehat{h}^*, \tilde{\mathrm{D}}) = \widehat{x}^*, \tag{4.197}$$

то

$$x^* = \hat{x} + \|\hat{x}\| \cdot \widehat{x}^*, \tag{4.198}$$

$H^* \in \mathcal{H}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right), \mathrm{D}\right)$ определяется по формуле (4.192),

$\tilde{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ определяется по формуле (4.193).

d) Пусть условие (4.127) выполнено, а условие (4.126) – нет. В этом случае

$$\tilde{z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|}, \tag{4.199}$$

а задача имеет единственное решение

$$(b - A\hat{x})\hat{x}^+ = H^* = \mathcal{H}\left(\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right), \mathrm{D}\right), \tag{4.200}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \hat{x}. \tag{4.201}$$

Доказательство.

1. Обоснование формул (4.188), (4.194), (4.199) и неразрешимости задачи в условиях, связанных со случаем b).

Проведем, в соответствии с постановкой задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ коррекцию системы (1.1)-(1.2) в два этапа:

1) Предположим, что $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\tilde{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) \neq \varnothing. \tag{4.202}$$

Предположение (4.202), в свою очередь, подразумевает существование вектора $x \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$x \in \tilde{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right). \tag{4.203}$$

Условие (4.203) эквивалентно совместности системы (4.147) и системы

$$Hx = b - Ax. \tag{4.204}$$

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 4.5, для вектора x, являющегося решением подсистемы (4.147) справедливо представление (4.148).

Заметим, что формула (4.148) может быть сокращена (упрощена) в зависимости от выполнения (невыполнения) условий (4.126)-(4.127). *Временно предположим, что формула (4.148) не сокращается и не упрощается, что соответствует выполнению обоих условий (4.126) и (4.127). Таким образом, мы пока находимся в рамках предположений, связанных со случаем с).*

С учетом (4.148) уравнение (4.204) принимает вид

$$H\cdot\left(\hat{x} + Gg\right) = b - A\hat{x} - AGg. \tag{4.205}$$

Введем в рассмотрение, как и при доказательстве теоремы 4.5, вектор $\vartriangle x$, задаваемый формулой (4.150). При этом, как и прежде, оказывается справедливым тождество (4.151), причем в силу (4.151), (4.121)-(4.122) и (3.2) вектор $\vartriangle x$ ортогонален вектору $\hat{x}$. С учетом формулы (4.150), тождества (4.151) и формулы (4.123) уравнение (4.205) принимает вид:

$$H\cdot\left(\hat{x} + \vartriangle x\right) = b - A\hat{x} - \widehat{A}\vartriangle x. \tag{4.206}$$

В силу теоремы 3.1 существует матрица $\widehat{H}(\vartriangle x)$, являющаяся при фиксированном векторе $\vartriangle x$ решением системы (4.206) с минимальной евклидовой нормой. *Таким образом, оценка величины* $\left\|\widehat{H}(\vartriangle x)\right\|_E$ *и есть задача этапа 1 решения задачи* $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.**

В силу (3.20) и (3.21) справедливы соотношения

$$\widehat{H}(\vartriangle x) = \left(b - A\hat{x} - \widehat{A}\vartriangle x\right)\cdot\left(\hat{x} + \vartriangle x\right)^{+}, \tag{4.207}$$

$$\left\| \widehat{H}\,(\vartriangle x) \right\|_E = \frac{\left\| b - A\hat{x} - \widehat{A} \vartriangle x \right\|}{\left\| \hat{x} + \vartriangle x \right\|}. \qquad (4.208)$$

После преобразований правой части уравнения (4.208) с учетом взаимной ортогональности векторов $\hat{x}$ и $\vartriangle x$, формулы (4.195) и теоремы Пифагора, имеем:

$$\left\| \widehat{H}\,(\vartriangle x) \right\|_E^2 = \frac{\left\| b - A\hat{x} - \widehat{A} \vartriangle x \right\|^2}{\left\| \hat{x} \right\|^2 + \left\| \vartriangle x \right\|^2} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \dfrac{b - A\hat{x}}{\left\| \hat{x} \right\|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\vartriangle x}{\left\| \hat{x} \right\|} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2}{\dfrac{\left\| \vartriangle x \right\|^2}{\left\| \hat{x} \right\|^2} + 1} =$$

$$= \frac{\left\| \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\vartriangle x}{\left\| \hat{x} \right\|} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2}{\left\| \begin{bmatrix} \dfrac{\vartriangle x}{\left\| \hat{x} \right\|} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2}. \qquad (4.209)$$

2) Рассмотрим задачу

$$\left\| \widehat{H}(x) \right\|_E \to \inf_{\vartriangle x | \hat{x} + \vartriangle x \in \mathrm{D}} = \tilde{z}_{fix\{T,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right). \qquad (4.210)$$

В силу (4.209)

$$\tilde{z}_{fix\{T,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D} \right) = \inf_{\vartriangle x | \hat{x} + \vartriangle x \in \mathrm{D}} \frac{\left\| \begin{bmatrix} -\widehat{A} & \widehat{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\vartriangle x}{\left\| \hat{x} \right\|} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} \dfrac{\vartriangle x}{\left\| \hat{x} \right\|} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \qquad (4.211)$$

$$= \min_{y \in \tilde{\mathrm{D}}} \frac{\left\| \widehat{b} - \widehat{A} y \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \tilde{z}_{total} \left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}} \right).$$

Таким образом, формула (4.194) обоснована.

Рассмотрим теперь допущения, связанные со случаем a). Теперь условие (4.127) не выполняется, т.е., справедливо условие (4.158). Повторим приведенные выше выкладки с учетом соотношения (4.158). Так, формула (4.207) принимает вид

$$\widehat{H}(\vartriangle x) = \left(b - \widehat{A}\vartriangle x\right)\cdot \vartriangle x^{+}, \tag{4.212}$$

а формула (4.208) с учетом основных результатов и выкладок теоремы 4.2 (формулы (4.43)-(4.45) и (4.53)-(4.54)) принимает вид

$$\tilde{z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) = \inf_{\vartriangle x | \hat{x}+\vartriangle x \in \mathrm{D}} \frac{\left\|b - \widehat{A}\vartriangle x\right\|}{\|\vartriangle x\|} = \\ = \tilde{z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.213}$$

Таким образом, формула (4.188) обоснована.

Обратимся к допущениям, связанным со случаем d). Поскольку в этом случае подсистема (4.147) единственное решение, выражаемое формулой (4.167), уравнение (4.206) принимает вид

$$H\hat{x} = b - A\hat{x}. \tag{4.214}$$

В силу теоремы 3.1 уравнение (4.214) имеет единственное решение с минимальной евклидовой нормой, которое выражается формулой (4.200). В свою очередь, из (4.214) с учетом результатов теоремы 3.1 (формулы (3.20)-(3.21)) вытекают (4.199) и (4.201).

Обратимся к допущениям, связанным со случаем b). В этом случае подсистема (4.147) единственное решение $x \equiv 0$. Но в этих условиях задача $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ не имеет решения, что легко показать "от противного".

2. Обоснование *достаточных* условий существования решения в случаях a) и c).

Снова начнем исследование с условий, связанных со случая c), поскольку казанные условия обладают наибольшей общностью. Пусть задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение, и, соответственно, существуют матрица $\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{H}}^{*} & -\widehat{h}^{*} \end{bmatrix}$ и вектор $\widehat{x}^{*}$, удовлетворяющие условиям (4.196)-(4.197). Построим вектор x^{*} в соответствии с правой частью формулы (4.198) и матрицу H^{*} в соответствии с левой частью формулы (4.192). В силу (4.128) и (4.198)

$$x^{*} \in \mathrm{D}.$$

Используя формулы (4.122), (4.124) и (4.198) можно показать, что

$$\left\|x^{*}\right\| < +\infty.$$

В силу теоремы 3.1 матрица H^{*} является решением уравнения

$$H^{*}x^{*} = b - Ax^{*},$$

в силу чего справедливо тождество

$$\left(A + H^*\right) x^* \equiv b,$$

т.е., для матрицы H^* действительно выполняется условие

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) \neq \varnothing.$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.** В силу левой части (4.192) и правой части (4.198) справедливо соотношение

$$\left\|H^*\right\|_E = \frac{\left\|b - A\left(\hat{x} + \left\|\hat{x}\right\| \cdot \widehat{x}^*\right)\right\|}{\left\|\hat{x} + \left\|\hat{x}\right\| \cdot \widehat{x}^*\right\|}. \tag{4.215}$$

Выполним некоторые преобразования выражения (4.215). С учетом (4.123) и (4.195) для числителя имеем

$$\left\|b - A\left(\hat{x} + \left\|\hat{x}\right\| \cdot \widehat{x}^*\right)\right\| = \left\|\hat{x}\right\| \cdot \left\|\widehat{b} - \widehat{A}\widehat{x}^*\right\|. \tag{4.216}$$

Для преобразований знаменателя выражения (4.215) учтем, что векторы $\hat{x}$ и $\widehat{x}^*$ ортогональны друг другу, что следует из (4.128) и (4.198). Следовательно, используя теорему Пифагора и определение евклидовой векторной нормы, можно записать

$$\left\|\hat{x} + \left\|\hat{x}\right\| \cdot \widehat{x}^*\right\| = \left\|\hat{x}\right\| \cdot \left\|\begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|. \tag{4.217}$$

С учетом (4.216) и (4.217) выражение (4.215) преобразуется к виду

$$\left\|H^*\right\|_E = \frac{\left\|\widehat{b} - \widehat{A}\widehat{x}^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} \widehat{x}^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.218}$$

Таким образом, матрица H^* действительно является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ в случае с)**.**

Обратимся теперь к обоснованию достаточных условий существования решения задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ при допущениях, связанных со случаем а).

Пусть задача $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение, и, соответственно, существуют матрица $\widehat{\mathcal{H}}^*$ и вектор $\widehat{x}^*$, удовлетворяющие условиям (4.189)-(4.190). Положим $x^* = \widehat{x}^*$ в соответствии с (4.191) и матрицу H^* в соответствии с левой частью формулы (4.192). В силу (4.128) и (4.169)

$$x^* \in \mathrm{D}.$$

В силу (4.190)-(4.191).

$$\left\|x^*\right\| < +\infty.$$

В силу теоремы 3.1 матрица H^* является решением уравнения

$$H^* x^* = b - A x^*,$$

в силу чего справедливо тождество

$$\left(A + H^*\right) x^* \equiv b,$$

т.е., для матрицы H^* действительно выполняется условие

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right) \neq \varnothing.$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$**.** В силу (4.191), левой части (4.192) и (4.123) справедливо соотношение

$$\left\|H^*\right\|_E = \frac{\left\|b - A\widehat{x}^*\right\|}{\left\|\widehat{x}^*\right\|} = \frac{\left\|b - \widehat{A}\widehat{x}^*\right\|}{\left\|\widehat{x}^*\right\|} = \tilde{z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.219}$$

Таким образом, матрица H^* действительно является *оптимальным* решением задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ в случае а)**.**

3. Обоснование *необходимых* условий существования решения в случаях а) и с).

Рассмотрим условия, связанные со случаем с). Доказательство проведем "от противного". Пусть задача $\tilde{Z}_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ не имеет решения, но, в то же время, задача $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ разрешима. В силу последнего предположения существуют матрица $\mathcal{H}$ и вектор x такие, что выполняются условия (4.179), (4.181). рассмотренные при доказательстве теоремы 4.5, а также условие

$$\left(A + \mathcal{H}\right) x \equiv b. \tag{4.220}$$

Кроме того, пусть

$$\left\|\mathcal{H}\right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right), \tag{4.221}$$

что не противоречит обоснованному выше соотношению (4.194).

Рассмотрим тождество (4.220) как уравнение, из которого при фиксированном x необходимо найти матрицу $\widehat{H}$, имеющую минимальную евклидову норму. С одной стороны, в силу (4.221)

$$\left\|\widehat{H}\right\|_E = \left\|\mathcal{H}\right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.222}$$

В то же время, в силу (4.181) и в соответствии с (3.11) и (4.121)-(4.122) для вектора x справедливо представление (4.184), полученное ранее при доказательстве теоремы 4.5. В силу теоремы 3.1, формул (3.9), (4.121)-(4.123), (4.184) и (4.195) можно записать:

$$\begin{gathered}\widehat{H} = \left(b - Ax\right)\cdot x^{+} = \left(b - A\hat{x} - AG\vartriangle x\right)\cdot\left(\hat{x} + G\vartriangle x\right)^{+} = \\ = \left(b - A\hat{x} - \widehat{A}\vartriangle x\right)\cdot\left(\hat{x} + \vartriangle x\right)^{+} = \begin{bmatrix}-\widehat{A} & \widehat{b}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x \\ \left\|\hat{x}\right\|\end{bmatrix}\cdot\frac{\left(\hat{x} + \vartriangle x\right)^{\mathrm{T}}}{\left\|\hat{x}\right\|^2 + \left\|\vartriangle x\right\|^2}.\end{gathered} \tag{4.223}$$

Рассмотрим теперь матрицу $\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}$, сформированную следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\widehat{A} & \widehat{b}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x \\ \left\|\hat{x}\right\|\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vartriangle x \\ \left\|\hat{x}\right\|\end{bmatrix}^{+}. \tag{4.224}$$

Используя аналогию формулы (4.224) с формулой (3.20), и привлекая (3.21) (4.222) и (4.223), можно определить величину евклидовой нормы матрицы $\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}$:

$$\left\|\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}\right\|_E = \left\|\widehat{H}\right\|_E = \left\|\mathcal{H}\right\|_E = \tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right). \tag{4.225}$$

Заметим, что в силу (4.127) выполняется условие $\left\|\hat{x}\right\| > 0$. Выберем вектор $\vartriangle x$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\left\|\vartriangle x\right\| < +\infty$, и сформируем вектор $u = \dfrac{\vartriangle x}{\left\|\hat{x}\right\|}$. Несложно убедиться, что в этом случае $\left\|u\right\| < +\infty$. Используя (4.225) совместно с (3.9), убеждаемся, что матрица $\begin{bmatrix}\widehat{H} & -\widehat{h}\end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\widehat{A}x = \widehat{b}$, поскольку $u \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\widehat{A} + \widehat{H}, \widehat{b} + \widehat{h}\right)$. Но в совокупности с условием (4.225) это и означает, что задача $\tilde{z}_{total}\left(\widehat{A},\widehat{b},\tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение (противоречие).

Рассмотрим теперь условия, связанные со случаем a). В этом случае можно просто повторить выкладки, приведенные выше для условий, связанных со случаем c), учитывая, что в силу (4.164) соотношение (4.184) принимает вид (4.186), а соотношение (4.223) вид

$$\widehat{H} = (b - Ax)\cdot x^{+} = (b - AG\vartriangle x)\cdot (G\vartriangle x)^{+} = \\ = \left(b - \widehat{A}\vartriangle x\right)\cdot \vartriangle x^{+}. \tag{4.226}$$

Выберем $\vartriangle x$ так, чтобы выполнялось условие $\|\vartriangle x\| < +\infty$. Используя (4.226) совместно с (3.9), убеждаемся, что матрица $\widehat{H}$ корректирует несовместную систему $\widehat{A}x = b$, поскольку $\vartriangle x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(\widehat{A} + \widehat{H}, b)$. Кроме того, в силу (4.128), $\vartriangle x \in \tilde{\mathrm{D}}$. Но учитывая условие

$$\left\|\widehat{H}\right\|_E = \|\mathcal{H}\|_E = \tilde{z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right),$$

приходим к выводу, что задача $\tilde{Z}_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b, \tilde{\mathrm{D}}\right)$ имеет решение (противоречие).

4. Обоснование необходимых и достаточных условий существования решения в случае d).

При условиях, связанных со случаем d), решение задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$ существует и единственно, а условия существования решения не связаны с существованием решения каких-либо вспомогательных задач и проверяются непосредственно.

5. Обоснование формул (4.193), (4.198) и (4.201). То, что векторы, задаваемые указанными формулами, действительно принадлежат множеству

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\begin{bmatrix} A + H^{*} \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \mathrm{D}\right)$$

было показано в п.2 доказательства. Их единственность может быть доказана "от противного"

Теорема 4.6 позволяет в качестве частного случая исследовать задачу $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$.

Утверждение 4.5. При решении задачи $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ возможны только 4 случая:

a) $\operatorname{rank} T = 0$. В этом случае совместная подсистема $Tx = d$ принимает вид $0x = 0$, а задача $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ оказывается тождественна задаче $Z_{fix\{b\}}(A, b)$.

b) $0 < \operatorname{rank}\ T < n$. В этом случае задача $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ не имеет решения.

c) $\operatorname{rank}\ T = n,\ d \neq 0$. В этом случае задача $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ имеет единственное решение, описываемое формулами

$$z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|},$$

$$(b - A\hat{x})\hat{x}^{+} = H^{*} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^{*} \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = \hat{x}.$$

d) $\operatorname{rank}\ T = n,\ d = 0$. В этом случае задача $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ не имеет решения.

Доказательство. Случай a) – соответствующие утверждения очевидны. Случай b). Указанный случай сводится либо к случаю a) либо к случаю c) теоремы 4.6, если положить $\mathrm{D} \equiv \mathbb{R}^{n}$. Таким образом, согласно теореме 4.6, существование решения задачи $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ эквивалентно существованию решения либо задачи $Z_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b\right)$, либо, соответственно, существованию решения задачи $Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}\right)$. Но ни задача $Z_{fix\{b\}}\left(\widehat{A}, b\right)$, ни задача $Z_{total}\left(\widehat{A}, \widehat{b}\right)$ решения не имеют в силу утверждения 4.2 и следствия из теоремы 4.2. Случай c) – соответствующие утверждения непосредственно следуют из теоремы 3.1 и единственности решения подсистемы $Tx = d$. Случай d) является следствием из случая b) теоремы 4.6, для которого показано отсутствия решения

4.7. Задача $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

Введем в рассмотрение некоторые дополнительные объекты. Пусть

$$P = I - UU^{+}, \tag{4.227}$$

$$Q = I - U^{+}U, \tag{4.228}$$

$$\breve{S} = SQ, \tag{4.229}$$

$$\breve{R} = I - \breve{S}\breve{S}^{+}, \tag{4.230}$$

$$\breve{A} = A - SU^{-1}T, \tag{4.231}$$

$$\breve{b} = b - SU^{-1}d, \tag{4.232}$$

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T, \tag{4.233}$$

$$\breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d, \tag{4.234}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \breve{R}\breve{\breve{A}}, \tag{4.235}$$

$$\tilde{\tilde{b}} = \breve{R}\breve{\breve{b}}, \tag{4.236}$$

$$\widehat{T} = PT, \tag{4.237}$$

$$\widehat{d} = Pd, \tag{4.238}$$

Будем также рассматривать или не рассматривать выполнение условий

$$P = 0, \tag{4.239}$$

$$Q = 0, \tag{4.240}$$

$$PT = 0, \tag{4.241}$$

$$Pd = 0. \tag{4.242}$$

Теорема 4.7. При решении задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ возможны только следующие 4 случая:

а) Выполнены условия (4.239)-(4.240). В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right), \tag{4.243}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \breve{H}^{*} & -\breve{h}^{*} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)\right), \tag{4.244}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\breve{A} + \breve{H}^{*}, \breve{b} + \breve{h}^{*}) = x_A^{*}, \tag{4.245}$$

то

$$\begin{gathered} \left(\breve{b} - \breve{A}x_A^{*}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^{*} \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \\ = \begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \end{gathered} \tag{4.246}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A+H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h^* \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix}, \tag{4.247}$$

где

$$x_S^* = U^{-1}\left(d - Tx_A^*\right). \tag{4.248}$$

b) Выполнено условие (4.239) и (или) выполнены условия (4.241)-(4.242) , не выполнено условие (4.240). В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right). \tag{4.249}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}}^* & -\tilde{\tilde{h}}^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)\right) \tag{4.250}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^*, \tilde{\tilde{b}} + \tilde{\tilde{h}}^*) = x_A^*, \tag{4.251}$$

то

$$\left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ =$$

$$= \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \tag{4.252}$$

а для $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A+H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h^* \\ d \end{bmatrix}\right)$ справедлива формула (4.247), в которой следует положить

$$x_S^* = \hat{x}_S + Q_\vartriangle x_S + \left(I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}\right)\chi_S, \tag{4.253}$$

$$\hat{x}_S = U^+\left(d - Tx_A^*\right), \tag{4.254}$$

$$_\vartriangle x_S = \breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right), \tag{4.255}$$

где $\chi_S \in \mathbb{R}^k$ - произвольный вектор.

c) Не выполнено условие (4.239), но выполнены условия (4.240)-(4.242). В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right). \tag{4.256}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}}^* & -\breve{\breve{h}}^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)\right) \tag{4.257}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{\breve{A}} + \breve{\breve{H}}^*, \breve{\breve{b}} + \breve{\breve{h}}^*\right) = x_A^*, \tag{4.258}$$

то

$$\begin{gathered} \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \\ = \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)\right), \end{gathered} \tag{4.259}$$

а для $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right)$ справедлива формула (4.247), в которой следует положить

$$x_S^* = \hat{x}_S. \tag{4.260}$$

d) Не выполнены условия (4.239)-(4.242). В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right). \tag{4.261}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$. При этом если

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}}^* & -\tilde{\tilde{h}}^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)\right) \tag{4.262}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^* \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} + \tilde{\tilde{h}}^* \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right) = x_A^*, \tag{4.263}$$

то в отношении $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) \right)$ справедлива формула (4.252), а в отношении $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A+H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h^* \\ d \end{bmatrix} \right)$ справедлива формула (4.247), для которых x_S^* следует вычислять по формулам (4.253)-(4.255), положив, что $\chi_S \in \mathbb{R}^k$ - произвольный вектор.

Доказательство.

1. Обоснование формул (4.243), (4.249), (4.256) и (4.261).

Предположим, что $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix} \right) \neq \varnothing. \tag{4.264}$$

Предложение (4.264), в свою очередь, подразумевает существование векторов $x_A \in \mathbb{R}^n$ и $x_S \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b+h \\ d \end{bmatrix} \right). \tag{4.265}$$

Условие (4.265) эквивалентно совместности подсистем (4.81) и

$$Tx_A + Ux_S = d. \tag{4.266}$$

Напомним, ~что постановка задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ предполагает совместность подсистемы (4.266). Предположим, что некоторые векторы x_A и x_S являются решением подсистемы (4.266), причем $x_A \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 3.1, существует матрица $\begin{bmatrix} \widehat{H} & -\widehat{h} \end{bmatrix}$, являющаяся при фиксированных x_A и x_S решением подсистемы (4.81) с минимальной евклидовой нормой. При этом в силу (3.20) и (3.21) справедливо рассмотренное при доказательстве теоремы 4.3 соотношения (4.82)-(4.83). *Главное, что мы получаем из приведенной выше цепочки рассуждений, это соотношение*

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\| b - Ax_A - Sx_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}. \tag{4.267}$$

Один из возможных подходов к решению задачи (4.267) заключается в том, чтобы использовать соотношение (4.266) для того, чтобы исключить вектор x_S из подсистемы (4.81). При этом возможны четыре различных варианта решения в зависимости от выполнения (невыполнения) условий (4.239)-(4.242). Это и есть варианты a)-d), описанные в формулировке теоремы.

a) Выполнены условия (4.239)-(4.240). Напомним, что в начале главы мы условились считать, что $U \in \mathbb{R}^{l\times k}$. В соответствии с приведенным выше определением псевдообратной матрицы $U^+ \in \mathbb{R}^{k\times l}$. Заметим, (см., например, [10]), что $\operatorname{rank}\ U = \operatorname{rank}\ U^+ \le \min\{k,l\}$. В силу выполнения (4.239)-(4.240) имеем $UU^+ = I \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $U^+U = I \in \mathbb{R}^{k\times k}$. В то же время, для U и U^+ можно в двух вариантах записать неравенство Сильвестра:

$$\operatorname{rank}\ UU^+ = l \le \min\{\operatorname{rank}\ U, \operatorname{rank}\ U^+\} \le \min\{k,l\},$$

$$\operatorname{rank}\ U^+U = k \le \min\{\operatorname{rank}\ U, \operatorname{rank}\ U^+\} \le \min\{k,l\},$$

откуда следует, что $\operatorname{rank}\ U = \operatorname{rank}\ U^+ = k = l$, т.е., матрицы U и U^+ являются квадратными и невырожденными. Но в этом случае, как уже упоминалось в параграфе 1.3, можно показать, что

$$U^+ = U^{-1}. \qquad (4.268)$$

Следовательно, подсистема (4.266) разрешима относительно вектора x_S при произвольном векторе x_A:

$$x_S = U^{-1}\left(d - Tx_A\right). \qquad (4.269)$$

С учетом формул (4.269) и (4.231)-(4.232) задача (4.267) принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\|b - Ax_A - Sx_S\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\|b - Ax_A - SU^{-1}\left(d - Tx_A\right)\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} =$$

$$= \inf_{x_A} \frac{\left\|\breve{b} - \breve{A}x_A\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right).$$

Таким образом, формула (4.243), соответствующая случаю a), обоснована.

b) Выполнено условие (4.239) и (или) выполнены условия (4.241)-(4.242), не выполнено условие (4.240). В этом случае подсистема (4.266) также оказывается разрешима относительно вектора x_S при произвольном векторе x_A, однако соответствующая формула для x_S, построенная с использованием (3.11), (4.228), (4.253)-(4.254), оказывается несколько более сложной:

$$x_S = U^+\left(d - Tx_A\right) + \left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S = \hat{x}_S + Q\vartriangle x_S, \qquad (4.270)$$

где $\vartriangle x_S \in \mathbb{R}^k$ - некоторый вектор. Покажем справедливость формулы (4.270). Действительно, с учетом (3.1), (4.227), а также (4.239) и (или) (4.241)-(4.242),

$$Tx_A + Ux_S =$$

$$= Tx_A + UU^+\left(d - Tx_A\right) + U\left(I - UU^+\right)\vartriangle x_S =$$
$$= PTx_A - Pd + d = d.$$

С использованием (4.228)-(4.229), (4.233)-(4.234) и (4.270), задачу (4.267) можно представить в виде

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\| b - Ax_A - Sx_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$
$$= \inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\| b - Ax_A - SU^+\left(d - Tx_A\right) - S\left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \tag{4.271}$$
$$= \inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A - SQ \vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A - \breve{S} \vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}.$$

Теперь заметим, что задача (4.271) с точностью до обозначений совпадает с задачей (4.84), рассмотренной в ходе доказательства теоремы 4.3. Поэтому для ее решения можно воспользоваться соответствующими выкладками из доказательства теоремы 4.3. А именно: разбиваем процесс решения задачи (4.271) на два этапа. На первом этапе считаем, что оптимальный для задачи (4.271) вектор x_A^* известен, а оптимальный вектор $\vartriangle x_S^*$ - нет, и поэтому следует решить задачу

$$\frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* - \breve{S} \vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} \to \inf_{\vartriangle x_S}.$$

Указанная задача аналогична рассмотренной выше задаче (4.87). Поэтому ее решение строится по аналогии с решением задачи (4.87), при этом принципиальным шагом является нахождение вектора $\vartriangle x_S^*$ как вектора, обеспечивающего минимум евклидовой нормы невязки системы

$$\breve{S} x_S = \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A.$$

В соответствии с (3.11), такими свойствами обладает вектор, заданный формулами (4.253)-(4.255). Тогда, с учетом (3.1), (4.230) и (4.235)-(4.236), (и по аналогии с (4.90)), имеем:

$$\inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A - \breve{S} x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+ \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A^*} \frac{\left\| \breve{R} \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\| \tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}} x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{total} \left(\tilde{\breve{A}}, \tilde{\breve{b}} \right).$$

Таким образом, формула (4.249), соответствующая случаю b), обоснована.

c) Не выполнено условие (4.239), но выполнены условия (4.240)-(4.242). Покажем, что в этом случае вектор

$$x_S = U^+ \left(d - T x_A \right) \tag{4.272}$$

и только он, является решением подсистемы (4.266) при произвольном выборе вектора x_A. Действительно, в силу (4.227), (4.241)-(4.242) и (4.272)

$$T x_A + U x_S = T x_A + U U^+ \left(d - T x_A \right) =$$

$$= P T x_A + \left(I - P \right) d = d.$$

С другой стороны, в силу (3.10)-(3.11), (4.228) и (4.240) решение подсистемы (4.266) имеет вид

$$\begin{aligned} x_S &= U^+ \left(d - T x_A \right) + \left(I - U^+ U \right) \vartriangle x_S = \\ &= U^+ \left(d - T x_A \right). \end{aligned} \tag{4.273}$$

С учетом формул (4.273), (4.233)-(4.234) задача (4.267) принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | T x_A + U x_S = d} \frac{\left\| b - A x_A - S x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\| b - A x_A - S U^+ \left(d - T x_A \right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{total} \left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right).$$

Таким образом, формула (4.256), соответствующая случаю c), обоснована.

d) Не выполнены условия (4.239)-(4.242). В этом случае не удается разрешить подсистему (4.266) относительно вектора x_S при произвольном векторе x_A. Это легко показать. Действительно, пусть вектор x_S построен как псевдорешение подсистемы (4.266) при некотором фиксированном векторе x_A, т.е., по формуле (4.270). Подстановка (4.270) в (4.266) с учетом невыполнения условий (4.239)-(4.242) дает

$$\begin{aligned} Tx_A + Ux_S &= Tx_A + UU^{+}\left(d - Tx_A\right) + U\left(I - U^{+}U\right)\vartriangle x_S = \\ &= PTx_A + \left(I - P\right)d \; ? = ? \; d. \end{aligned} \tag{4.274}$$

Но подсистема (4.266) в силу исходных предположений рассматриваемой теоремы 4.7 является совместной, т.е., векторы x_A, x_S, обращающие ее в тождество, существуют. Следовательно, можно указать условия, наложенные на выбор вектора x_A, гарантирующие разрешимость подсистемы (4.266) относительно вектора x_S при фиксированном векторе x_A. Пусть последнее равенство в цепочке равенств (4.274) все же выполняется. Тогда с учетом (4.270), (4.274) и (4.237)-(4.238) можно записать

$$\begin{aligned} Tx_A + Ux_S = d &\Leftrightarrow PTx_A + \left(I - P\right)d = d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow PTx_A = Pd \Leftrightarrow \widehat{T}x_A = \widehat{d}. \end{aligned} \tag{4.275}$$

Последняя система в цепочке эквивалентных систем линейных алгебраических уравнений (4.275) и есть искомое условие для вектора x_A. Следовательно, задача (4.267), с учетом (3.1), (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\| b - Ax_A - Sx_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{\substack{x_A | \widehat{T}x_A = \widehat{d}, \\ \vartriangle x_S}} \frac{\left\| b - Ax_A - SU^{+}\left(d - Tx_A\right) - S\left(I - U^{+}U\right)\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{\substack{x_A | \widehat{T}x_A = \widehat{d}, \\ \vartriangle x_S}} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A^* | \widehat{T}x_A^* = \widehat{d}} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^* - \breve{S}\breve{S}^{+}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A^* | \widehat{T}x_A^* = \widehat{d}} \frac{\left\| \tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{fix\{\widehat{T}, \widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right).$$

Таким образом, формула (4.256), соответствующая случаю d) обоснована.

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$.

Достаточность. Случай а). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\begin{bmatrix} \breve{H}^* & -\breve{h}^* \end{bmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 4.1, множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{A} + \breve{H}^*, \breve{b} + \breve{h}^*\right)$ состоит из единственного вектора $\breve{x}^*$, причем $\left\|\breve{x}^*\right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.246)) матрицу $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ по формуле $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+$, где $x_A^* = \breve{x}^*$, а вектор x_S^* построен по формуле (4.248). Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.9) и (4.248) имеем:

$$\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)\dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1}\right) & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* = U^{-1}\left(d - Tx_A^*\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + \dfrac{-\left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1} \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + UU^{-1}\left(d - Tx_A^*\right) - d \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.243) достаточно показать, что $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = z_{total}\left(\breve{A},\breve{b}\right)$. Как уже неоднократно делалось раньше, воспользуемся результатами теоремы 3.1 и заметим, что $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ строится по формуле, аналогичной формуле (3.20). Поэтому для $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E$ справедлива приведенная ниже формула, аналогичная формуле (3.21). Ее дальнейшие преобразования, выполненные с учетом формул (4.231),(4.232),(4.248) и с использованием ряда выкладок, проделанных при исследовании задачи $Z_{total}(A,b)$ в доказательстве теоремы 4.1, позволяют записать:

$$\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = \frac{\left\|b - Ax_A^* - SU^{-1}\left(d - Tx_A^*\right)\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} =$$

$$= \frac{\left\|\breve{b} - \breve{A}x_A^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} = z_{total}\left(\breve{A},\breve{b}\right).$$

Таким образом, оптимальность (в контексте задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$) матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, построенной по формуле (4.244), доказана. Следовательно, обоснована достаточность существования решения задачи $Z_{total}\left(\breve{A},\breve{b}\right)$ для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$.

Случай b). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}}^* & -\tilde{\tilde{h}}^* \end{bmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 4.1. множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^*, \tilde{\tilde{b}} + \tilde{\tilde{h}}^*\right)$

состоит из единственного вектора $\tilde{\tilde{x}}^*$, причем $\left\|\tilde{\tilde{x}}^*\right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.246) матрицу $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ по формуле $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+$, где $x_A^* = \tilde{\tilde{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.253)-(4.254), где $\vartriangle x_S \in \mathbb{R}^k$ - пока еще произвольный вектор. Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.
Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228) и (4.253)-(4.254) имеем:

$$\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1}\right) & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + \dfrac{-\left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1} \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + Ux_S^* - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Tx_A^* + UU^+\left(d - Tx_A^*\right) + UQ \vartriangle x_S \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.249) достаточно показать, что $\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)$.
Действительно, в силу (3.1),(3.21), (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) имеем:

$$\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S^*\right\|}{\left\|\begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}\right\|} =$$

$$= \frac{\left\| b - Ax_A - SU^+\left(d - Tx_A\right) - S\left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - SQ\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\vartriangle x_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^+\breve{S}\right)\chi_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$\frac{\left\| \breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\| \tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right).$$

Случай c). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}}^* & -\breve{\breve{h}}^* \end{bmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 4.1 множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{\breve{A}} + \breve{\breve{H}}^*, \breve{\breve{b}} + \breve{\breve{h}}^*\right)$ состоит из единственного вектора $\breve{\breve{x}}^*$, причем $\left\| \breve{\breve{x}}^* \right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.246)) матрицу $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ по формуле $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix}^+$, где $x_A^* = \breve{\breve{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.254), (4.260). Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b + h^* \\ d \end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.9), (4.227)

, (4.241)-(4.242), (4.254), (4.260) имеем:

$$\begin{bmatrix} A+H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b+h^* \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) \dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1} \right) & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* = U^+\left(d - Tx_A^*\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b + \dfrac{-\left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^* + 1} \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + UU^+\left(d - Tx_A^*\right) - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P\left(Tx_A^* - d\right) \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.256) достаточно показать, что $\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$. Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228), (4.254), (4.260) имеем

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| b - Ax_A^* - Sx_S^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| b - Ax_A^* - SU^+\left(d - Tx_A^*\right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right).$$

Случай d). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}}^* & -\tilde{\tilde{h}}^* \end{bmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 4.5, множество $\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{A}}+\tilde{\tilde{H}}^*\\ \widehat{T}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{b}}+\tilde{\tilde{h}}^*\\ \widehat{d}\end{bmatrix}\right)$ состоит из единственного вектора $\tilde{\tilde{x}}^*$, причем $\left\|\tilde{\tilde{x}}^*\right\|<+\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.246)) матрицу $\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}$ по формуле $\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}=\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)\cdot\begin{bmatrix}x_A^*\\ 1\end{bmatrix}^+$, где $x_A^*=\tilde{\tilde{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.253)-(4.254) и $\vartriangle x_S\in\mathbb{R}^k$ - произвольный вектор. Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix}x_A^*\\ x_S^*\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix}A+H^* & S\\ T & U\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b+h^*\\ d\end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица $\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}$ корректирует систему $\begin{bmatrix}A & S\\ T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A\\ x_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228) и (4.253)-(4.254) имеем:

$$\begin{bmatrix}A+H^* & S\\ T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A^*\\ x_S^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b+h^*\\ d\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\left(A+\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)\dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}}x_A^*+1}\right) & S\\ T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A^*\\ x_S^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b+\dfrac{-\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)}{x_A^{*\mathrm{T}}x_A^*+1}\\ d\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}Ax_A^*+\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)+Sx_S^*-b\\ Tx_A^*+UU^+\left(d-Tx_A^*\right)-U\left(I-U^+U\right)\vartriangle x_S\end{bmatrix}\equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица $\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}$ является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix}A & S\\ T & U\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}\right)$. Для этого, в соответствии с утверждением (4.256) достаточно показать, что $\left\|\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix}\right\|_E=z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{A}}\\ \widehat{T}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{b}}\\ \widehat{d}\end{bmatrix}\right)$.

Действительно, в силу (3.1), (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236) и (4.253)-(4.255) имеем:

$$\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E = \frac{\left\| b - Ax_A^* - Sx_S^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| b - Ax_A^* - SU^+ \left(d - Tx_A \right) - SQ \left(\breve{S}^+ \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) + \left(I - \breve{S}^+ \breve{S} \right) \chi_S \right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+ \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) - \breve{S} \left(I - \breve{S}^+ \breve{S} \right) \chi_S \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{R} \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}} x_A^* \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \inf_{x_A | \widehat{T} x_A = \widehat{d}} \frac{\left\| \tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}} x_A \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = z_{fix\{\widehat{T}, \widehat{d}\}} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\breve{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\breve{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right).$$

Необходимость. Доказательство в случаях a)-c) проведем "от противного".

Случай а). Пусть задача $Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ при этом разрешима. В силу последнего предположения существует матрица $\begin{bmatrix} \mathcal{H} & h \end{bmatrix}$ и векторы x_A, x_S такие, что

$$\left\| \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \right\| < +\infty, \qquad (4.276)$$

$$\left(A + \mathcal{H} \right) x_A + S x_S \equiv b + h, \qquad (4.277)$$

$$T x_A + U x_S \equiv d, \qquad (4.278)$$

и, в силу (4.243),

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b} \right). \qquad (4.279)$$

Рассмотрим тождества (4.277)-(4.278) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\begin{bmatrix} \breve{H} & -\breve{h} \end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\breve{A}x = \breve{b}$. Сразу же заметим, что в силу (4.279),

$$\left\| \begin{bmatrix} \breve{H} & -\breve{h} \end{bmatrix} \right\|_E = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right). \tag{4.280}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (3.11) и (4.268)

$$x_S = U^{-1}\left(d - Tx_S\right).$$

Но тогда, в силу теоремы 3.1 и формул (4.231)-(4.232) можно записать:

$$\begin{bmatrix} \breve{H} & -\breve{h} \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \left(b - Ax_A - SU^{-1}\left(d - Tx_A\right)\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ =$$

$$= \begin{bmatrix} -\breve{A} & \breve{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ .$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} \breve{H} & -\breve{h} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\breve{A}x = \breve{b}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{A} + \breve{H}, \breve{b} + \breve{h}\right)$.

Но в совокупности с условием (4.280) это и означает, что задача $Z_{total}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$ имеет решение (противоречие).

Случай b). Пусть задача $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при этом разрешима. В силу последнего предположения существует матрица $\begin{bmatrix} \mathcal{H} & h \end{bmatrix}$ и векторы x_A, x_S такие, что для них выполняются условия (4.276)-(4.278) и, в силу (4.249),

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right). \tag{4.281}$$

Рассмотрим тождества (4.277)-(4.278) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}} \end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$. Сразу же заметим, что в силу (4.281),

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}} \end{bmatrix} \right\|_E = \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right). \tag{4.282}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) можно записать:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}} \end{bmatrix} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ =$$

$$= \left(b - Ax_A - SU^+\left(d - Tx_A\right) - S\left(I - U^+U\right)_\vartriangle x_S\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ =$$

$$
=\left(\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A-\breve{S}\breve{S}^{+}\left(\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A\right)-\breve{S}\left(I-\breve{S}^{+}\breve{S}\right)\chi_S\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}=
$$

$$
\left(\breve{R}\left(\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A\right)\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix} -\tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}.
$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x=\tilde{\tilde{b}}$, поскольку $x_A\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{\tilde{A}}+\tilde{\tilde{H}},\tilde{\tilde{b}}+\tilde{\tilde{h}}\right)$. Но, в совокупности с условием (4.282), это и означает, что задача $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$ имеет решение (противоречие).

Случай с). Пусть задача $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}},\breve{\breve{b}}\right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ имеет решение. В силу последнего предположения существует матрица $\begin{bmatrix} \mathcal{H} & h \end{bmatrix}$ и векторы x_A, x_S такие, что для них выполняются условия (4.276)-(4.278) и, в силу (4.256),

$$
\left\|\begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix}\right\|_E=z_{total}\left(\breve{\breve{A}},\breve{\breve{b}}\right). \tag{4.283}
$$

Рассмотрим тождества (4.277)-(4.278) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}} & -\breve{\breve{h}} \end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\breve{\breve{A}}x=\breve{\breve{b}}$. В силу (4.283)

$$
\left\|\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}} & -\breve{\breve{h}} \end{bmatrix}\right\|_E=\left\|\begin{bmatrix} \mathcal{H} & -h \end{bmatrix}\right\|_E=z_{total}\left(\breve{\breve{A}},\breve{\breve{b}}\right). \tag{4.284}
$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228), (4.233)-(4.234), (4.253)-(4.254) можно записать:

$$
\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}} & -\breve{\breve{h}} \end{bmatrix}=\left(b-Ax_A-Sx_S\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}=\left(b-Ax_A-SU^{+}\left(d-Tx_A\right)\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}=
$$

$$
=\left(\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A\right)\cdot\begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^{+}.
$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} \breve{\breve{H}} & -\breve{\breve{h}} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\breve{\breve{A}}x=\breve{\breve{b}}$, поскольку $x_A\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{\breve{A}}+\breve{\breve{H}},\breve{\breve{b}}+\breve{\breve{h}}\right)$.

Но в совокупности с условием (4.284) это и означает, что задача $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}},\breve{\breve{b}}\right)$ имеет решение (противоречие).

Случай d). Пусть задача $z_{fix\{\hat{T},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{A}}\\ \hat{T}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{b}}\\ \hat{d}\end{bmatrix}\right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix}A & S\\ T & U\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}\right)$ имеет решение. В силу последнего предположения существует матрица $\begin{bmatrix}\mathcal{H} & h\end{bmatrix}$ и векторы x_A, x_S такие, что для них выполняются условия (4.276)-(4.278) и, в силу (4.261),

$$\left\|\begin{bmatrix}\mathcal{H} & -h\end{bmatrix}\right\|_E = z_{fix\{\hat{T},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{A}}\\ \hat{T}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{b}}\\ \hat{d}\end{bmatrix}\right). \tag{4.285}$$

Рассмотрим тождества (4.277)-(4.278) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}}\end{bmatrix}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$. Заметим, что в силу (4.285)

$$\left\|\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}}\end{bmatrix}\right\|_E = \left\|\begin{bmatrix}\mathcal{H} & -h\end{bmatrix}\right\|_E = z_{fix\{\hat{T},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{A}}\\ \hat{T}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{b}}\\ \hat{d}\end{bmatrix}\right). \tag{4.286}$$

Из условия (4.276) с использованием (3.9), (4.227)-(4.228), (4.237)-(4.238) и (4.253)-(4.254)получаем:

$$\begin{gathered} Tx_A + Ux_S \equiv d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Tx_A + UU^+\left(d - Tx_A\right) + U\left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S \equiv d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Tx_A + UU^+\left(d - Tx_A\right) \equiv d \Leftrightarrow PTx_A \equiv Pd \Leftrightarrow \hat{T}x_A \equiv \hat{d}. \end{gathered} \tag{4.287}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) и (4.287) можно записать:

$$\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}}\end{bmatrix} = \left(b - Ax_A - Sx_S\right)\cdot\begin{bmatrix}x_A\\ 1\end{bmatrix}^+ =$$

$$= \left(b - Ax_A - S\left(U^+\left(d - Tx_A\right) + Q\vartriangle x_S\right)\right)\cdot\begin{bmatrix}x_A\\ 1\end{bmatrix}^+ =$$

$$= \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^+\breve{S}\right)\chi_S\right)\cdot\begin{bmatrix}x_A\\ 1\end{bmatrix}^+ =$$

$$= \left(\breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right)\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} -\tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ 1 \end{bmatrix}^+ = z_{fix\{\hat{T},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right).$$

Используя (3.9), (4.276) и (4.287), несложно убедиться, что матрица $\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{H}} & -\tilde{\tilde{h}} \end{bmatrix}$ корректирует несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$ при условии $\hat{T}x = \hat{d}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} + \tilde{\tilde{h}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right)$. Но в совокупности с условием (4.286) это и означает, что задача $Z_{fix\{\hat{T},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right)$ имеет решение (противоречие).

3. Обоснование формул (4.247), (4.248), (4.253), (4.254), (4.255), (4.260). То, что векторы, описываемые указанными формулами, действительно принадлежат множеству решений скорректированной системы, показано в п.2 доказательства. Единственность указанных векторов (при фиксированной оптимальной матрице коррекции) можно показать "от противного".

4.8. Задача $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$

Теорема 4.8. При решении задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ возможны следующие 4 случая:

а) Условия (4.239)-(4.240) выполнены. В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right). \tag{4.288}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$. При этом если

$$\breve{H}^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)\right), \tag{4.289}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\breve{A} + \breve{H}^*, \breve{b}) = x_A^*, \tag{4.290}$$

то

$$\left(\breve{b} - \breve{A}x_A^*\right) \cdot x_A^{*+} =$$

$$= H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)\right), \tag{4.291}$$

а $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ - задается формулой (4.103), где x_S^* определяется по формуле (4.248).

b) Условие (4.239) выполняется и (или) выполнены условия (4.241)-(4.242), а условие (4.240) не выполняется. В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}} \right). \tag{4.292}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}} \right)$. При этом если

$$\tilde{\tilde{H}}^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}} \right)\right) \tag{4.293}$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(\tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^*, \tilde{\tilde{b}}) = x_A^*, \tag{4.294}$$

то

$$\left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}} x_A^* \right) \cdot x_A^{*+} =$$

$$= H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)\right), \tag{4.295}$$

а $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ - задается формулой (4.103), где x_S^* определяется по формулам (4.253)-(4.255).

c) Условие (4.239) не выполняется, а условие (4.240) – выполняется. Кроме того, выполнены условия (4.241)-(4.242). В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right), \tag{4.296}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$. При этом если

$$\breve{\breve{H}}^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)\right) \tag{4.297}$$

и

$$\mathcal{X}(\breve{\breve{A}} + \breve{\breve{H}}^*, \breve{\breve{b}}) = x_A^*, \tag{4.298}$$

то

$$\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^*\right) \cdot x_A^{*+} = \\ = H^* \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)\right), \tag{4.299}$$

а $\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ - задается формулой (4.103), где

$$x_S^* = \hat{x}_S, \tag{4.300}$$

а $\hat{x}_S$ определяется по формулам (4.254)-(4.255).

d) Условия (4.239)-(4.242) не выполняются. В этом случае

$$z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\tilde{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right). \tag{4.301}$$

При этом для того, чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\tilde{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right)$. При этом если

$$\tilde{\tilde{H}}^* \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\tilde{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right)\right) \tag{4.302}$$

и

$$\mathcal{X}(\tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^*, \tilde{\tilde{b}}) = x_A^*, \tag{4.303}$$

то $H^* \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)\right)$ определяется по формуле (4.295), а $\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ - по формуле (4.103), где x_S^* определяется по формулам (4.253)-(4.255).

Доказательство.

1. Обоснование формул (4.288)(4.292)(4.296)(4.301).

Предположим, что $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - некоторая (неизвестная) матрица, такая, что

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \neq \varnothing. \tag{4.304}$$

Предложение (4.304), в свою очередь, подразумевает существование векторов $x_A \in \mathbb{R}^n$ и $x_S \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} A+H & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right). \tag{4.305}$$

Условие (4.305) эквивалентно совместности подсистем (4.106) и (4.266).

Напомним, что постановка задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ предполагает совместность подсистемы (4.266). Предположим, что некоторые векторы x_A и x_S являются решением подсистемы (4.266), причем $x_A \neq 0$. Тогда, в силу теоремы 3.1, существует матрица $\widehat{H}$, являющаяся при фиксированных x_A и x_S решением подсистемы (4.106) с минимальной евклидовой нормой. При этом в силу (3.20) и (3.21) справедливо рассмотренное при доказательстве теоремы 4.4 соотношения (4.107)-(4.108). *Главное, что мы получаем из приведенной выше цепочки рассуждений, это соотношение*

$$z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) = \inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\| b - Ax_A - Sx_S \right\|}{\left\| x_A \right\|}. \tag{4.306}$$

Один из возможных подходов к решению задачи (4.306) заключается в том, чтобы использовать соотношение (4.266) для того, чтобы исключить вектор x_S из подсистемы (4.106). При этом возможны четыре различных варианта решения в зависимости от выполнения (невыполнения) условий (4.239)-(4.242). Это и есть варианты a)-d), описанные в формулировке теоремы. Но эти же варианты рассматривались при доказательстве теоремы 4.7. Поэтому будем опускать одинаковые выкладки, ссылаясь на соответствующие (или аналогичные) выкладки в доказательстве теоремы 4.7.

а) Выполнены условия (4.239)-(4.240). Как уже было показано при доказательстве теоремы 4.7, вектор x_S однозначно определяется из подсистемы (4.266) для произвольного вектора x_A по формуле (4.269). С учетом формул (4.269) и (4.231)-(4.232) задача (4.306) принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\left\| b - Ax_A - Sx_S \right\|}{\left\| x_A \right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\| b - Ax_A - SU^{-1}\left(d - Tx_A\right) \right\|}{\left\| x_A \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A} \frac{\left\| \breve{b} - \breve{A}x_A \right\|}{\left\| x_A \right\|} = z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right).$$

Таким образом, формула (4.288), соответствующая случаю а), обоснована.

b) Выполнено условие (4.239) и (или) выполнены условия (4.241)-(4.242) , не выполнено условие (4.240). В этом случае для вектора x_S справедливо представление (4.270). По аналогии с соответствующими выкладками теоремы 4.7 с использованием (4.228)-(4.229), (4.233)-(4.234) и (4.270), задачу (4.306) сначала представляем в виде

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|}{\|x_A\|} = \inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\vartriangle x_S\right\|}{\|x_A\|},$$

а затем, с учетом (3.11), (4.230), (4.235)-(4.236) и (4.253)-(4.255) в виде

$$\inf_{x_A, \vartriangle x_S} \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}x_S\right\|}{\|x_A\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right)\right\|}{\|x_A\|} =$$

$$= \inf_{x_A^*} \frac{\left\|\breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right)\right\|}{\|x_A\|} = \inf_{x_A^*} \frac{\left\|\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^*\right\|}{\|x_A\|} = z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right).$$

Таким образом, формула (4.292), соответствующая случаю b), обоснована.

c) Не выполнено условие (4.239), но выполнены условия (4.240)-(4.242). В этом случае, как было показано при доказательстве теоремы 4.7, вектор x_S определяется из подсистемы (4.266) однозначно для любого фиксированного вектора x_A с помощью соотношения (4.272). С учетом (4.272) а также (4.233)-(4.234) задача (4.306) принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|}{\|x_A\|} = \inf_{x_A} \frac{\|b - Ax_A - SU^+(d - Tx_A)\|}{\|x_A\|} =$$

$$= \inf_{x_A} \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right\|}{\|x_A\|} = z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right).$$

Таким образом, формула (4.296), соответствующая случаю c), обоснована.

d) Не выполнены условия (4.239)-(4.242). В этом случае, как было показано при доказательстве теоремы 4.7, не удается разрешить подсистему (4.266) относительно вектора x_S при произвольном векторе x_A. В это случае для разрешимости подсистемы (4.266) на вектор x_A приходится накладывать дополнительные условия, выраженные цепочкой эквивалентных систем линейных алгебраических уравнений (4.275). С учетом (4.275), а также (3.1), (4.228)-(4.230) и (4.233)-(4.236) задача (4.306) принимает вид

$$\inf_{x_A, x_S | Tx_A + Ux_S = d} \frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|}{\|x_A\|} =$$

$$= \inf_{\substack{x_A | \widehat{T}x_A = \widehat{d}, \\ \vartriangle x_S}} \frac{\left\| b - Ax_A - SU^+\left(d - Tx_A\right) - S\left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S \right\|}{\left\| x_A \right\|} =$$

$$= \inf_{\substack{x_A | \widehat{T}x_A = \widehat{d}, \\ \vartriangle x_S}} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\vartriangle x_S \right\|}{\left\| x_A \right\|} = \inf_{x_A^* | \widehat{T}x_A^* = \widehat{d}} \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) \right\|}{\left\| x_A \right\|} =$$

$$= \inf_{x_A^* | \widehat{T}x_A^* = \widehat{d}} \frac{\left\| \tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^* \right\|}{\left\| x_A \right\|} = z_{fix\{\widehat{T}, \widehat{b}, \widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right).$$

Таким образом, формула (4.301), соответствующая случаю d) обоснована.

2. Обоснование условий существования решения в задаче $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$.

Достаточность. Случай a). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\breve{H}^*$. Тогда, в силу теоремы 4.2, множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{A} + \breve{H}^*, \breve{b}^*\right)$ состоит из единственного вектора $\breve{x}^*$, причем $0 < \left\| \breve{x}^* \right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.102)) матрицу H^* по формуле $H^* = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)x_A^{*+}$, где $x_A^* = \breve{x}^*$, а вектор x_S^* построен по формуле (4.248). Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$, т.е., матрица H^* корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.9) и (4.248) имеем:

$$\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^* \right) \frac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^*} \right) & S \\ T & U \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} x_A^* \\ x_S^* = U^{-1} \left(d - Tx_A^* \right) \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^* \right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + UU^{-1} \left(d - Tx_A^* \right) - d \end{matrix} \right] \equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.288) достаточно показать, что $\left\| H^* \right\|_E = z_{fix\{\breve{b}\}} \left(\breve{A}, \breve{b} \right)$. Воспользуемся результатами теоремы 3.1 и заметим, что матрица H^* строится по формуле, аналогичной формуле (3.20). Поэтому для $\left\| H^* \right\|_E$ справедлива приведенная ниже формула, аналогичная формуле (3.21). Ее дальнейшие преобразования, выполненные с учетом формул (4.231),(4.232),(4.248) и с использованием ряда выкладок, проделанных при исследовании задачи $Z_{fix\{b\}} \left(A, b \right)$ в доказательстве теоремы 4.2, позволяют записать:

$$\left\| H^* \right\|_E = \frac{\left\| b - Ax_A^* - Sx_S^* \right\|}{\left\| x_A^* \right\|} = \frac{\left\| b - Ax_A^* - SU^{-1} \left(d - Tx_A^* \right) \right\|}{\left\| x_A^* \right\|} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{b} - \breve{A} x_A^* \right\|}{\left\| x_A^* \right\|} = z_{fix\{\breve{b}\}} \left(\breve{A}, \breve{b} \right).$$

Таким образом, оптимальность (в контексте задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$) матрицы H^*, построенной по формуле (4.102), доказана. Следовательно, обоснована достаточность существования решения задачи $Z_{fix\{\breve{b}\}} \left(\breve{A}, \breve{b} \right)$ для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$.

Случай b). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}} \left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ достаточно существования решения задачи

$Z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\tilde{\tilde{H}}^*$. Тогда, в силу теоремы 4.2. множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{\tilde{A}}+\tilde{\tilde{H}}^*,\tilde{\tilde{b}}\right)$ состоит из единственного вектора $\tilde{\tilde{x}}^*$, причем $0<\left\|\tilde{\tilde{x}}^*\right\|<+\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.102) матрицу H^* по формуле $H^*=\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)\cdot x_A^{*+}$, где $x_A^*=\tilde{\tilde{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.253)-(4.254), где $\vartriangle x_S\in\mathbb{R}^k$ - пока еще произвольный вектор. Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix}x_A^*\\x_S^*\end{bmatrix}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix}A+H^* & S\\T & U\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица H^* корректирует систему $\begin{bmatrix}A & S\\T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A\\x_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228) и (4.253)-(4.254) имеем:

$$\begin{bmatrix}A+H^* & S\\T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A^*\\x_S^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(A+\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)\dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}}x_A^*}\right) & S\\T & U\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_A^*\\x_S^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}Ax_A^*+\left(b-Ax_A^*-Sx_S^*\right)+Sx_S^*-b\\Tx_A^*+Ux_S^*-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\Tx_A^*+UU^+\left(d-Tx_A^*\right)+UQ\vartriangle x_S\end{bmatrix}\equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix}A & S\\T & U\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.292) достаточно показать, что $\left\|H^*\right\|_E=z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}},\tilde{\tilde{b}}\right)$.

Действительно, в силу (3.1),(3.21), (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) имеем:

$$\left\|H^*\right\|_E=\frac{\left\|b-Ax_A^*-Sx_S^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|}=$$

$$=\frac{\left\|b-Ax_A-SU^+\left(d-Tx_A\right)-S\left(I-U^+U\right)\vartriangle x_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|}=$$

$$=\frac{\left\|\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A-SQ\vartriangle x_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|}=\frac{\left\|\breve{\breve{b}}-\breve{\breve{A}}x_A-\breve{S}\vartriangle x_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|}=$$

$$= \frac{\left\| \breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+ \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^+ \breve{S} \right) \chi_S \right\|}{x_A^*} =$$

$$= \frac{\left\| \breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) \right\|}{\left\| x_A^* \right\|} = \frac{\left\| \tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}} x_A^* \right\|}{\left\| x_A^* \right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\| \tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}} x_A \right\|}{\left\| x_A \right\|} = z_{fix\{\tilde{\breve{b}}\}} \left(\tilde{\breve{A}}, \tilde{\breve{b}} \right).$$

Случай c). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\breve{\breve{H}}^*$. Тогда, в силу теоремы 4.2 множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{\breve{A}} + \breve{\breve{H}}^*, \breve{\breve{b}} \right)$ состоит из единственного вектора $\breve{\breve{x}}^*$, причем $0 < \left\| \breve{\breve{x}}^* \right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.102)) матрицу H^* по формуле $H^* = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^* \right) \cdot x_A^{*+}$, где $x_A^* = \breve{\breve{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.254), (4.260). Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$, т.е., матрица H^* корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.9), (4.227), (4.241)-(4.242), (4.254), (4.260) имеем:

$$\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^* \right) \dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^*} \right) & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* = U^+ \left(d - Tx_A^* \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^* \right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + UU^+ \left(d - Tx_A^* \right) - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P\left(Tx_A^* - d \right) \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$. Для этого, в соответствии с уже доказанным утверждением (4.296) достаточно показать, что $\left\|H^*\right\|_E = z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)$. Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228), (4.254), (4.260) имеем:

$$\left\|H^*\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \frac{\left\|b - Ax_A^* - SU^+\left(d - Tx_A^*\right)\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} =$$

$$= \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \inf_{x_A} \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right\|}{\left\|x_A\right\|} = z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right).$$

Случай d). Покажем, что для существования решения задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ достаточно существования решения задачи $Z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\tilde{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\tilde{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$ имеет некоторое решение – матрицу $\tilde{\tilde{H}}^*$. Тогда, в силу теоремы 4.6, множество $\mathcal{X}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}}^* \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$ состоит из единственного вектора $\tilde{\tilde{x}}^*$, причем $0 < \left\|\tilde{\tilde{x}}^*\right\| < +\infty$. Сформируем (в соответствии с левой частью утверждения (4.102)) матрицу H^* по формуле $H^* = \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)x_A^{*+}$, где $x_A^* = \tilde{\tilde{x}}^*$, а вектор x_S^* построен по формулам (4.253)-(4.254) и $\vartriangle x_S \in \mathbb{R}^k$ - произвольный вектор. Несложно убедиться, что $\begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, т.е., матрица H^* корректирует систему $\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Действительно, в силу (3.1), (3.9), (4.228) и (4.253)-(4.254) имеем:

$$\begin{bmatrix} A + H^* & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(A + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right)\dfrac{x_A^{*\mathrm{T}}}{x_A^{*\mathrm{T}} x_A^*}\right) & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A^* \\ x_S^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} Ax_A^* + \left(b - Ax_A^* - Sx_S^*\right) + Sx_S^* - b \\ Tx_A^* + UU^+\left(d - Tx_A^*\right) - U\left(I - U^+U\right)\vartriangle x_S \end{bmatrix} \equiv 0.
$$

Покажем теперь, что матрица H^* является *оптимальным* решением задачи $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$. Для этого, в соответствии с утверждением (4.301) достаточно показать, что $\left\|H^*\right\|_E = z_{fix\{\widehat{T},\tilde{\breve{b}},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\breve{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\breve{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$. Действительно, в силу (3.1), (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236) и (4.253)-(4.255) имеем:

$$
\left\|\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right\|_E = \frac{\left\|b - Ax_A^* - Sx_S^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} =
$$

$$
= \frac{\left\|b - Ax_A^* - SU^+\left(d - Tx_A^*\right) - SQ\left(\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) + \left(I - \breve{S}^+\breve{S}\right)\chi_S\right)\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} =
$$

$$
= \frac{\left\|\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^* - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^+\breve{S}\right)\chi_S\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} =
$$

$$
= \frac{\left\|\breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right)\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \frac{\left\|\tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}}x_A^*\right\|}{\left\|x_A^*\right\|} = \inf_{x_A \mid \widehat{T}x_A = \widehat{d}} \frac{\left\|\tilde{\breve{b}} - \tilde{\breve{A}}x_A\right\|}{\left\|x_A\right\|} = z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\breve{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\breve{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right).
$$

Необходимость. Доказательство в случаях а)-с) проведем "от противного".

Случай а). Пусть задача $Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при этом разрешима. В силу последнего предположения существует матрица $\mathcal{H}$ и векторы x_A, x_S такие, что имеет место тождество (4.278), тождество

$$
\left(A + \mathcal{H}\right)x_A + Sx_S \equiv b, \tag{4.307}
$$

выполняется условие (4.276), условие

$$
x_A \neq 0, \tag{4.308}
$$

и, в силу (4.288),

$$
\left\|\left[\mathcal{H}\right]\right\|_E = z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b}\right). \tag{4.309}
$$

Рассмотрим тождества (4.278) и (4.307) как условия, из которых при фиксированном $x_A \neq 0$ необходимо найти матрицу $\breve{H}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\breve{A}x = \breve{b}$. Сразу же заметим, что в силу (4.288),

$$\left\| \left[\breve{H} \right] \right\|_E = \left\| [\mathcal{H}] \right\|_E = z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b} \right). \tag{4.310}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (3.11) и (4.268)

$$x_S = U^{-1}\left(d - T x_S \right).$$

Но тогда, в силу теоремы 3.1, условия (4.308) и формул (4.231)-(4.232) можно записать:

$$\breve{H} = \left(b - Ax_A - Sx_S \right) \cdot x_A^{+} =$$

$$= \left(b - Ax_A - SU^{-1}\left(d - Tx_A \right) \right) \cdot x_A^{+} = \begin{bmatrix} -\breve{A} & \breve{b} \end{bmatrix} \cdot x_A x_A^{+}.$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\breve{H}$ корректирует несовместную систему $\breve{A}x = \breve{b}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{A} + \breve{H}, \breve{b} \right)$. Но в совокупности с условием (4.288) это и означает, что задача $Z_{fix\{\breve{b}\}}\left(\breve{A}, \breve{b} \right)$ имеет решение (противоречие).

Случай b). Пусть задача $Z_{fix\{\tilde{\breve{b}}\}}\left(\tilde{\breve{A}}, \tilde{\breve{b}} \right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ при этом разрешима. В силу последнего предположения существует матрица $\mathcal{H}$ и векторы x_A, x_S такие, что имеют место тождества (4.278), (4.307) и условия (4.276), (4.308) и, в силу (4.292),

$$\left\| [\mathcal{H}] \right\|_E = z_{fix\{\tilde{\breve{b}}\}}\left(\tilde{\breve{A}}, \tilde{\breve{b}} \right). \tag{4.311}$$

Рассмотрим тождества (4.278), (4.307) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\tilde{\breve{H}}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\tilde{\breve{A}}x = \tilde{\breve{b}}$. Заметим, что в силу (4.311),

$$\left\| \tilde{\breve{H}} \right\|_E = \left\| \mathcal{H} \right\|_E = z_{fix\{\tilde{\breve{b}}\}}\left(\tilde{\breve{A}}, \tilde{\breve{b}} \right). \tag{4.312}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) можно записать:

$$\tilde{\breve{H}} = \left(b - Ax_A - Sx_S \right) \cdot x_A^{+} =$$

$$= \left(b - Ax_A - SU^{+}\left(d - Tx_A \right) - S\left(I - U^{+}U \right)_{\vartriangle} x_S \right) \cdot x_A^{+} =$$

$$= \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\breve{S}^{+}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A \right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^{+}\breve{S} \right)\chi_S \right) \cdot x_A^{+} =$$

$$= \left(\breve{R} \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A \right) \right) \cdot x_A{}^{+} = \begin{bmatrix} -\tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix} \cdot x_A x_A{}^{+}.$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\tilde{\breve{H}}$ корректирует несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{\tilde{A}} + \tilde{\breve{H}}, \tilde{\tilde{b}} \right)$. Но в совокупности с условиями (4.292) и (4.312) это и означает, что задача $Z_{fix\{\tilde{\tilde{b}}\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}} \right)$ имеет решение (противоречие).

Случай c). Пусть задача $Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$ не имеет решения, а задача $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ имеет решение. В силу последнего предположения существует матрица $\mathcal{H}$ и векторы x_A, x_S такие, что для них имеют место тождества (4.278), (4.307) и условия (4.276), (4.308) и, в силу (4.296),

$$\left\| \mathcal{H} \right\|_E = z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right). \tag{4.313}$$

Рассмотрим тождества (4.278), (4.307) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\breve{\breve{H}}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\breve{\breve{A}}x = \breve{\breve{b}}$. В силу (4.313)

$$\left\| \breve{\breve{H}} \right\|_E = \left\| \mathcal{H} \right\|_E = z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right). \tag{4.314}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228), (4.233)-(4.234), (4.253)-(4.254) можно записать:

$$\breve{\breve{H}} = \left(b - Ax_A - Sx_S \right) \cdot x_A{}^{+} =$$

$$= \left(b - Ax_A - SU^{+}\left(d - Tx_A \right) \right) \cdot x_A{}^{+} = \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A \right) \cdot x_A{}^{+}.$$

Используя (3.9) и (4.276), несложно убедиться, что матрица $\breve{\breve{H}}$ корректирует несовместную систему $\breve{\breve{A}}x = \breve{\breve{b}}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\breve{\breve{A}} + \breve{\breve{H}}, \breve{\breve{b}} \right)$. Но в совокупности с условием (4.314) это и означает, что задача $Z_{fix\{\breve{\breve{b}}\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$ имеет решение (противоречие).

Случай d). Пусть задача $z_{fix\{\widehat{T}, \tilde{\tilde{b}}, \widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix} \right)$ не имеет решения, а задача

$Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ имеет решение. В силу последнего предположения существует матрица $\mathcal{H}$ и векторы x_A, x_S такие, что для них имеют место тождества (4.278), (4.307) и условия (4.276), (4.308) и, в силу (4.301),

$$\|\mathcal{H}\|_E = z_{fix\{\hat{T},\tilde{\tilde{b}}\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right). \tag{4.315}$$

Рассмотрим тождества (4.278), (4.307) как условия, из которых при фиксированном x_A необходимо найти матрицу $\tilde{\tilde{H}}$, имеющую минимальную евклидову норму и корректирующую несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$. Заметим, что в силу (4.315)

$$\left\|\tilde{\tilde{H}}\right\|_E = \|\mathcal{H}\|_E = z_{fix\{\hat{T},\tilde{\tilde{b}},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right). \tag{4.316}$$

В то же время, из (4.278) с учетом (4.228)-(4.230), (4.233)-(4.236), (4.253)-(4.255) и (4.287) можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{H}} &= \left(b - Ax_A - Sx_S\right)\cdot x_A{}^+ = \\ &= \left(b - Ax_A - S\left(U^+\left(d - Tx_A\right) + Q_\Delta x_S\right)\right)\cdot x_A{}^+ = \\ &= \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A - \breve{S}\breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right) - \breve{S}\left(I - \breve{S}^+\breve{S}\right)\chi_S\right)\cdot x_A{}^+ = \\ &= \left(\breve{R}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A\right)\right)\cdot x_A{}^+ = \begin{bmatrix} -\tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix} x_A x_A{}^+ = z_{fix\{\hat{T},\tilde{\tilde{b}}\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Используя (3.9), (4.276) и (4.287), несложно убедиться, что матрица $\tilde{\tilde{H}}$ корректирует несовместную систему $\tilde{\tilde{A}}x = \tilde{\tilde{b}}$ при условии $\hat{T}x = \hat{d}$, поскольку $x_A \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} + \tilde{\tilde{H}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right)$. Но в совокупности с условием (4.316) это и означает, что задача $Z_{fix\{\hat{T},\tilde{\tilde{b}},\hat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \hat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \hat{d} \end{bmatrix}\right)$ имеет решение (противоречие).

3. Обоснование формул (4.103), (4.248); (4.103), (4.253)-(4.255); (4.103), (4.254)-(4.255); (4.103), (4.253)-(4.255). То, что векторы, описываемые указанными формулами, действительно принадлежат множеству решений скорректированной системы, показано в п.2 доказательства. Единственность указанных векторов (при фиксированной оптимальной матрице коррекции) можно показать "от противного".

5. Дополнительные сведения о задачах $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, альтернативные формулировки необходимых и достаточных условий существования решения

Как было показано в предыдущем параграфе, $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ возникают в качестве вспомогательных задач при решении задач $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$, $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$, $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ и $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$. Это свойство задач $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ усиливает мотивацию их детального изучения. Базовые свойства $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ - необходимые и достаточные условия существования решения и единственность решения соответствующих систем после коррекции в смысле $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ - были рассмотрены в предыдущем параграфе. Теперь мы уделим внимание исследованию условий, при которых единственность присуща самим матрицам оптимальной коррекции, виду множеств указанных матриц в случае, когда решение задач $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не единственно, и анализу некоторых альтернативных и дополнительных условий, гарантирующих разрешимость или, наоборот, неразрешимость задач $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$.

5.1. Альтернативные формулировки необходимых и достаточных условий разрешимости задачи $Z_{total}(A,b)$

Лемма 5.1. Следующее неравенство справедливо при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \le \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \qquad (5.1)$$

Доказательство. Выпишем в явном виде блочное представление матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}A & -A^{\mathrm{T}}b \\ -b^{\mathrm{T}}A & b^{\mathrm{T}}b \end{bmatrix}. \qquad (5.2)$$

Кроме того, выпишем сингулярное разложение матрицы A:

$$A = U_A \Sigma_A V_A^{\mathrm{T}}, \tag{5.3}$$

где, в соответствии с (2.2), $U_A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - ортогональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы AA^{T}, $V_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - ортогональная матрица, составленная из собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}A$, $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - матрица, внедиагональные элементы которой – нулевые, а элементы главной диагонали являются сингулярными числами матрицы A. Введем в рассмотрение матрицу $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ следующим образом:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Несложно убедиться, что матрица $\tilde{U}$ является ортогональной. В то же время, в силу (5.2), (5.3) и (2.5) имеем:

$$\tilde{V}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{V} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\right) & -A^{\mathrm{T}}b \\ -b^{\mathrm{T}}A & b^{\mathrm{T}}b \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\lambda_1\left(A^{\mathrm{T}}A\right), \dots, \lambda_n\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\right) & -A^{\mathrm{T}}b \\ -b^{\mathrm{T}}A & b^{\mathrm{T}}b \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{V}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{V}$ имеет тот же набор собственных значений, что и матрица $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ (см., например, [26], [27]). Но матрица $\tilde{V}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{V}$ имеет вид, соответствующий задаче оценивания собственных значений симметричной вещественной матрицы, получаемой симметричным окаймлением диагональной матрицы, рассмотренной в книге [26]. Так, применительно к окаймлению (5.2), имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_1\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \geq \lambda_1\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \geq \lambda_2\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \geq \\ \geq \lambda_2\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \geq \ldots \geq \lambda_n\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \geq \lambda_{n+1}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{5.5}$$

откуда, в частности, следует (5.1).

Лемма 5.2. Следующее неравенство справедливо при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^m$

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \leq \frac{\left\|\vartriangle b\right\|^2}{\left\|\hat{x}\right\|^2 + 1}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $\hat{x} = A^{+}b \in \mathbb{R}^n$ - вектор, являющийся нормальным псевдорешением несовместной системы $Ax = b$ по методу наименьших квадратов, $\triangle b = b - A\hat{x}$ - минимальная по евклидовой норме невязка $Ax = b$ (см. параграф 1.3), $y = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \le \frac{y^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} y}{y^{\mathrm{T}} y} =$$

$$= \frac{\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\hat{x} - 2b^{\mathrm{T}} A\hat{x} + b^{\mathrm{T}} b}{\hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{x} + 1} = \frac{b^{\mathrm{T}} A^{+\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} AA^{+} b - 2b^{\mathrm{T}} AA^{+} b + b^{\mathrm{T}} b}{\hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{x} + 1} =$$

$$= \frac{b^{\mathrm{T}} b - b^{\mathrm{T}} AA^{+} b}{\hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{x} + 1} = \frac{b^{\mathrm{T}} \left(I - AA^{+}\right) b}{\hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{x} + 1} = \frac{\|\triangle b\|^2}{\|\hat{x}\|^2 + 1}.$$

Следствие. При произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^{m}$

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \le \|b\|^2, \tag{5.7}$$

причем равенство в (5.7) достигается тогда и только тогда, когда $b^{\mathrm{T}} A = 0$.

Доказательство. Как было показано в параграфе 1.3, при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^{m}$ выполняется неравенство $\|\triangle b\| \le \|b\|$, откуда имеем

$$\frac{\|\triangle b\|^2}{\|\hat{x}\|^2 + 1} \le \frac{\|b\|^2}{\|\hat{x}\|^2 + 1} \le \|b\|^2,$$

и для обоснования нестрогого неравенства остается лишь использовать (5.6). Теперь покажем, что

$$b^{\mathrm{T}} A = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = 0. \tag{5.8}$$

Действительно,

$$b^{\mathrm{T}} A = 0 \Leftrightarrow P^{\perp}_{columns(A)} b = b \Leftrightarrow \left(I - AA^{+}\right) b = b \Leftrightarrow \triangle b = b. \tag{5.9}$$

Но тогда

$$\hat{x} = A^{+} b = A^{+}\left(I - AA^{+}\right) b = 0.$$

Рассмотрим теперь совместную систему

$$A\hat{x} = \hat{b}, \tag{5.10}$$

где, как уже указывалось в параграфе 1.3, $\hat{b} = AA^{+} b = P_{columns(A)} b$ - ортогональная проекция вектора b в линейное подпространство, натянутое на столбцы матрицы A. В силу условия (5.10) и того, что матричная евклидова норма согласована с векторной евклидовой нормой, можно записать:

$$\| \hat{b} \| \le \|A\|_E \, \|\hat{x}\|,$$

откуда при $A \ne 0$ (и, тем более при $b^{\mathrm{T}} A \ne 0$) получаем

$$\|\hat{x}\| \geq \frac{\| \hat{b} \|}{\|A\|_E}.$$

Таким образом, при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^m$ имеем оценку

$$\begin{cases} \|\hat{x}\| = 0, \text{ если } b^{\mathrm{T}} A = 0, \\ \|\hat{x}\| \geq \dfrac{\| \hat{b} \|}{\|A\|_E} \text{ - в противном случае.} \end{cases} \tag{5.11}$$

Для завершения доказательства осталось объединить (5.9) и (5.11).

Лемма 5.3. Если задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения, то выполняется условия:

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \tag{5.12}$$

$$\forall z = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} z \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ b^{\mathrm{T}} A z = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1,

$$\forall z = \begin{bmatrix} z \\ z_{n+1} \end{bmatrix} \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \Rightarrow z_{n+1} = 0.$$

Тогда, в силу (5.2),

$$\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) z = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^{\mathrm{T}} A z = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) z, & \text{(i)} \\ b^{\mathrm{T}} A z = 0. & \text{(ii)} \end{cases} \tag{5.14}$$

Но из (5.14) и (5.1) как раз и следуют доказываемые утверждения (5.12)-(5.13).

Лемма 5.4. Для того, чтобы $Z_{total}(A,b)$ имела решение достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) < \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \tag{5.15}$$

Доказательство. Предположим противное, а именно: пусть условие (5.15) выполняется, но задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения. Но тогда, в силу леммы 5.3 выполняется условие (5.12), которое противоречит условию (5.15).

Лемма 5.5. Для того, чтобы задача $Z_{total}(A,b)$ имела решение достаточно, чтобы существовал вектор $z \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\Psi(z) = \frac{\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}}{z^{\mathrm{T}} z + 1} \le \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \quad (5.16)$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи (a) $\Psi(z) < \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$ и (b) $\Psi(z) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$.

Случай (a). Заметим, что для любого $z \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \le \Psi(z) < \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right),$$

которое в силу леммы 5.4 и влечет существование решения задачи $Z_{total}(A,b)$.

Случай (b). Предположим противное, а именно: пусть вектор $z \in \mathbb{R}^n$, отвечающий условию (5.16), существует, но задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения. Но тогда, в силу леммы 5.3 справедливо условие (5.12), которое в совокупности с (5.16) означает, что

$$\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$\exists \hat{z} = \frac{1}{\sqrt{\|z\|^2 + 1}} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \Bigg| \hat{z}_{n+1} \ne 0.$$

Но тогда, в силу теоремы 4.1 задача $Z_{total}(A,b)$ разрешима, что противоречит нашему допущению о ее неразрешимости.

Лемма 5.6. Для того, чтобы задача $Z_{total}(A,b)$ имела решение достаточно, чтобы выполнялись условия

$$A^{\mathrm{T}} b = 0, \quad (5.17)$$

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \|b\|^2. \quad (5.18)$$

Доказательство. В силу (5.2)-(5.4)

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} A & 0 \\ 0 & b^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix} = \tilde{V}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\right) & 0 \\ 0 & \|b\|^2 \end{bmatrix} \tilde{V}, \quad (5.19)$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \|b\|^2. \quad (5.20)$$

При этом, как несложно заметить,

$$y=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\widehat{y}\\ y_{n+1}=1\end{bmatrix}\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right),\tag{5.21}$$

где

$$\begin{gathered}\text{либо } \widehat{y}=0,\\ \text{либо } \widehat{y}\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \text{ - произвольный вектор,}\end{gathered}\tag{5.22}$$

что, в силу теоремы 4.1, эквивалентно существованию решения задачи $Z_{total}(A,b)$

Лемма 5.7. Если задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение, то существует вектор $z\in\mathbb{R}^n$ такой, что выполняется условие (5.16).

Доказательство. В силу теоремы 4.1, существует вектор

$$\widehat{y}\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right)\Big|\,\widehat{y}_{n+1}\neq 0.$$

Следовательно, существует и вектор

$$\tilde{y}=\frac{1}{\widehat{y}_{n+1}}\widehat{y}=\begin{bmatrix}y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|y\|\cdot\bar{y}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\bar{y}\\ 1\end{bmatrix}\in\mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right),\tag{5.23}$$

где $\alpha\geq 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\bar{y}\in\mathbb{R}^n$, $\|\bar{y}\|=1$. В силу (5.23) можно записать:

$$\begin{gathered}\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right)=\frac{\tilde{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\tilde{y}}{\tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{y}}=\\ =\frac{\alpha^2\bar{y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\bar{y}-2\alpha b^{\mathrm{T}}A\bar{y}+\|b\|^2}{\alpha^2+1}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\alpha^2\left(\bar{y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\bar{y}-\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right)\right)-2\alpha b^{\mathrm{T}}A\bar{y}+\\ +\left(\|b\|^2-\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\right)\right)=0.\end{gathered}\tag{5.24}$$

Квадратное (по параметру α) уравнение (5.24), как следует из его построения, имеет при некотором $\bar{y}$ вещественный неотрицательный корень.

Проделаем аналогичные выкладки с неравенством (5.16). Пусть $z=\|z\|\cdot\bar{z}=\beta\bar{z}$, где $\beta\geq 0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\bar{z}\in\mathbb{R}^n$, $\|\bar{z}\|=1$. Тогда для (5.16) можно записать:

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\geq\frac{\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}}{z^{\mathrm{T}}z+1}=$$

$$= \frac{\beta^2 \overline{z}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{z} - 2\beta b^{\mathrm{T}} A\overline{z} + \|b\|^2}{\beta^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \left(\overline{z}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{z} - \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)\right) - 2\beta b^{\mathrm{T}} A\overline{z} + \tag{5.25}$$

$$+\left(\|b\|^2 - \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)\right) \le 0.$$

Между квадратным уравнением (5.24) и квадратным (по параметру β) неравенством (5.25) существует определенная связь. Она становится наиболее явной, если положить $\overline{z} = \overline{y}$. Рассмотрим параметрическое семейство неравенств вида

$$\begin{gathered} \alpha^2 \left(\overline{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{y} - \gamma\right) - 2\alpha b^{\mathrm{T}} A\overline{y} + \left(\|b\|^2 - \gamma\right) = \\ \mathrm{a}(\gamma)\alpha^2 + \mathrm{b}\alpha + \mathrm{c}(\gamma) = \Phi_\gamma(\alpha) \le 0. \end{gathered} \tag{5.26}$$

Очевидно, что уравнение (5.24) и неравенство (5.25) принадлежат указанному семейству неравенств при $\gamma_1 = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ и $\gamma_2 = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$.

Несложно заметить, что $\mathrm{a}(\gamma_2) \le \mathrm{a}(\gamma_1)$ и $\mathrm{c}(\gamma_2) \le \mathrm{c}(\gamma_1)$, и, таким образом,

$$\forall \alpha \Rightarrow \Phi_{\gamma_2}(\alpha) \le \Phi_{\gamma_1}(\alpha),$$

или, другими словами, график функции $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ лежит не выше графика функции $\Phi_{\gamma_1}(\alpha)$. Заметим также, что в силу условия (5.7),

$$\mathrm{c}(\gamma_1) = \|b\|^2 - \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \ge 0, \tag{5.27}$$

причем равенство в (5.27) имеет место тогда и только тогда, когда $b^{\mathrm{T}} A = 0$.

Исследуем теперь поведение функций $\Phi_{\gamma_1}(\alpha)$ и $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ более детально. В зависимости от соотношений между числами $\overline{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{y}$, $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$ и $\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ с одной стороны, и возможными значениями числа $\mathrm{b} = b^{\mathrm{T}} A\overline{y}$ можно выделить следующие 5 случаев:

$$\text{(A)} \begin{cases} \overline{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{y} > \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ b^{\mathrm{T}} A\overline{y} \text{ - произвольное число.} \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} \overline{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{y} = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) > \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \\ b^{\mathrm{T}} A\overline{y} \ne 0. \end{cases}$$

$$\text{(C)}\ \begin{cases} \bar{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \bar{y} = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \\ b^{\mathrm{T}} A \bar{y} \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{(D)}\ \begin{cases} \bar{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \bar{y} = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \\ b^{\mathrm{T}} A \bar{y} = 0. \end{cases}$$

$$\text{(E)}\ \begin{cases} \bar{y}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \bar{y} = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) > \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \\ b^{\mathrm{T}} A \bar{y} = 0. \end{cases}$$

Случай (A). Несложно убедиться, что $\mathrm{a}\left(\gamma_1\right) > 0$ и $\mathrm{a}\left(\gamma_2\right) > 0$. Таким образом, обе функции $\Phi_{\gamma_1}(\alpha)$ и $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ действительно являются квадратичными (не вырождаются). Их графики – это две параболы "ветвями вверх". Но, как уже отмечалось выше, уравнение $\Phi_{\gamma_1}(\alpha) = 0$ имеет вещественный неотрицательный корень, а график функции $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ лежит не выше графика функции $\Phi_{\gamma_1}(\alpha)$. В силу этих обстоятельств и хорошо известной теории квадратных неравенств можно утверждать, что неравенство $\Phi_{\gamma_2}(\alpha) \geq 0$ имеет вещественное неотрицательное решение α^*, и, следовательно, вещественное неотрицательное решение имеет неравенство (5.25), что и означает существование вектора $\left(z = \alpha^* \bar{y}\right) \in \mathbb{R}^n$ такого, что выполняется условие (5.16).

Случай (B). По-прежнему $\mathrm{a}\left(\gamma_1\right) > 0$ и график $\Phi_{\gamma_1}(\alpha)$ - парабола "ветвями вверх", пересекающая ось абсцисс в неотрицательной области. В то же время $\mathrm{a}\left(\gamma_2\right) = 0$, т.е., график $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ уже не является параболой. Но $\mathrm{b} \neq 0$, поэтому график $\Phi_{\gamma_2}(\alpha)$ - прямая, пересекающая ось абсцисс. Выбором знака вектора $\bar{y}$ абсцисса точки пересечения

$$\alpha^* = \frac{\|b\|^2 - \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)}{2 b^{\mathrm{T}} A \bar{y}}$$

может быть сделана неотрицательной. Следовательно, в силу хорошо известной теории линейных неравенств можно утверждать, что неравенство $\Phi_{\gamma_2}(\alpha) \geq 0$ имеет вещественные неотрицательные решения, и, следовательно, вещественные неотрицательные решения имеет неравенство (5.25), что и означает существование вектора $\left(z = \alpha^* \bar{y}\right) \in \mathbb{R}^n$ такого, что выполняется условие (5.16).

Случай (C). $\Phi_{\gamma_1}(\alpha) \equiv \Phi_{\gamma_2}(\alpha)$. Но по-прежнему $\mathrm{a}(\gamma_2) = 0$, $\mathrm{b} \neq 0$ и рассуждениями, аналогичными приведенным для случая (B) обосновывается существование вектора $\left(z = \alpha^* \bar{y}\right) \in \mathbb{R}^n$ такого, что выполняется условие (5.16).

Случай (D). Имеем $\mathrm{a}(\gamma_1) = 0$, $\mathrm{b} = 0$, и, таким образом $\Phi_{\gamma_1}(\alpha) \equiv \mathrm{c}(\gamma_1)$. В этом случае уравнение $\Phi_{\gamma_1}(\alpha) = 0$, а следовательно, и уравнение (5.24), разрешимо только тогда, когда

$$\mathrm{c}(\gamma_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \|b\|^2. \qquad (5.28)$$

Возвращаясь от (5.28) к исходному условию (5.23) с использованием (5.2) можно записать:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{y} = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \tilde{y} \Rightarrow \\ A^{\mathrm{T}} A y - A^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) y = \|b\|^2 y. \end{gathered} \qquad (5.29)$$

Но из (5.29) следует, что

$$y^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A y = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) y^{\mathrm{T}} y. \qquad (5.30)$$

Условие (5.30) выполняется либо когда $y = 0$, либо когда $y \in \mathbf{X}_{\min}(A^{\mathrm{T}} A)$. В обоих случаях условие (5.29) выполняется только тогда, когда $A^{\mathrm{T}} b = 0$. Таким образом, мы установили, что если задача $Z_{total}(A, b)$ имеет решение и выполняются условия, которые мы условились связывать со случаем (D), то выполняются также условия (5.17) и (5.18), рассмотренные ранее в лемме 5.6. Но, используя указанные условия и представление (5.2), несложно убедиться, что вектор $z = 0 \in \mathbb{R}^n$ и будет искомым вектором, удовлетворяющим условию (5.16).

Случай (E). Несложно убедиться, что $\mathrm{a}(\gamma_1) > 0$, $\mathrm{b} = 0$ и, как уже отмечалось выше в (5.27), $\mathrm{c}(\gamma_1) \geq 0$. При таких значениях коэффициентов уравнение $\Phi_{\gamma_1}(\alpha) = 0$ может иметь вещественный неотрицательный корень α^* (а точнее – корень $\alpha^* = 0$) только тогда, когда

$$\mathrm{c}(\gamma_1) = 0 \Leftrightarrow \|b\|^2 = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right). \qquad (5.31)$$

Но в силу следствия из леммы 5.2, условие (5.31) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие (5.17). В свою очередь, используя (5.17), (5.31) и представление, можно показать, что выполняется условие (5.18), и, как следствие, условие

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \qquad (5.32)$$

Действительно,

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}Ay = \|b\|^2 y \Rightarrow \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = \|b\|^2 .$$

Но условие (5.32) противоречит предположению

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) > \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

которое было связано со случаем (E). Таким образом, мы показали, что если задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение, то случай (E) просто не имеет места.

Объединяя утверждения лемм 5.5-5.7, получаем следующую теорему, содержащую альтернативную по отношению к теореме 4.1 формулировку необходимых и достаточных условий существования решения задачи $Z_{total}(A,b)$**:**

Теорема 5.1. Для того чтобы задача $Z_{total}(A,b)$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $z \in \mathbb{R}^n$ такой, что выполняется условие (5.16).

Дополнительные возможности в исследовании задачи $Z_{total}(A,b)$**,** предоставляемые указанной теоремой, заключаются в том, что разрешимость задачи $Z_{total}(A,b)$ может быть проверена с использованием априорной информации о матрице исследуемой системы (значение $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$) путем решения неравенства (5.16) или минимизации функции $\Psi(z)$, которую в случае разрешимости задачи $Z_{total}(A,b)$ и выполнении условия (5.15) не обязательно завершать. Подобный подход может оказаться численно более устойчивым, чем построение собственного вектора матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующего ее минимальному собственному значению. В последнем случае может оказаться, что в пределах имеющейся точности вычислений трудно сделать вывод о равенстве или неравенстве нулю его последнего компонента. Заметим также, что, как правило, в задачах многомерной минимизации, к которым можно отнести как нахождение пары – минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор, так и минимизацию $\Psi(z)$, сходимость решения по значению целевой функции обычно более быстрая и численно устойчивая, чем сходимость по векторному аргументу.

5.2. Необходимые и достаточные условия единственности решения задачи $Z_{total}(A,b)$

Теорема 5.2. При существовании решения задачи $Z_{total}(A,b)$ для его единственности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) < \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right). \tag{5.33}$$

Доказательство.

1. Достаточность. Покажем, что из условия (5.33) следует единственность решения задачи $Z_{total}(A,b)$. Предположим противное: пусть условие (5.33) выполняется, но решение задачи $Z_{total}(A,b)$ не единственно. В силу теоремы 4.1 это означает, что существуют по крайней мере два вектора $c,d \in \mathbb{R}^{n+1}$ такие, что

$$c,d \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

$$c_{n+1} \neq 0, d_{n+1} \neq 0,$$

$$\left(\tilde{c} = \frac{1}{c_{n+1}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) \neq \left(\tilde{d} = \frac{1}{d_{n+1}} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}\right).$$

Евклидовы нормы векторов $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ в общем случае не единичные, как у векторов c и d. Но все же указанные векторы также являются собственными векторами матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующими ее минимальному собственному значению. Поэтому можно записать:

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}} A\tilde{c} - A^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\tilde{c}, \\ -b^{\mathrm{T}} A\tilde{c} + b^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \\ A^{\mathrm{T}} A\tilde{d} - A^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\tilde{d}, \\ -b^{\mathrm{T}} A\tilde{d} + b^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^{\mathrm{T}} A \cdot (\tilde{c} - \tilde{d}) = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \cdot (\tilde{c} - \tilde{d}), & \text{(a)} \\ b^{\mathrm{T}} A \cdot (\tilde{c} - \tilde{d}) = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

Поскольку в силу сделанных выше предположений $(\tilde{c} - \tilde{d}) \neq 0$, можно ввести в рассмотрение вектор $x = \dfrac{\tilde{c} - \tilde{d}}{\left\|\tilde{c} - \tilde{d}\right\|}$, который, как очевидно, удовлетворяет условиям (a)-(b). Но из (a) следует, что $\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ является также собственным значением матрицы $A^{\mathrm{T}} A$. В совокупности с условием (5.1) это означает, что

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right).$$

Но данное соотношение противоречит условию (5.33).

2. Необходимость. Покажем, что в случае разрешимости задачи $Z_{total}(A,b)$ невыполнение условия (5.33) влечет неединственность решения $Z_{total}(A,b)$. Действительно, пусть $Z_{total}(A,b)$ имеет решение. Рассмотрим вектор

$$c = \begin{bmatrix} \mathfrak{c} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \Big| \, c_{n+1} \neq 0,$$

существование которого следует из теоремы 4.1. В то же время, в силу невыполнения условия (5.33),

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \lambda.$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{c}} = \dfrac{\mathfrak{c}}{c_{n+1}}$. Тогда

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{d} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} A\tilde{\mathfrak{c}} & -A^{\mathrm{T}} b \\ -b^{\mathrm{T}} A\tilde{\mathfrak{c}} & b^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\tilde{\mathfrak{c}} \\ \lambda \end{bmatrix}. \tag{5.34}$$

Сформируем вектор d как

$$d = c + \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{c} + x \\ c_{n+1} \end{bmatrix},$$

где

$$x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}(A^{\mathrm{T}} A).$$

Поскольку $d_{n+1} = c_{n+1} \neq 0$, можно построить вектор $\tilde{x} = \dfrac{x}{c_{n+1}}$ и вектор $\tilde{d} = \dfrac{1}{d_{n+1}} d = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\mathfrak{c} + x}{c_{n+1}}\right) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}$. С использованием (5.2) и (5.34) несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \tilde{d} &= \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} A\left(\tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{x}\right) - A^{\mathrm{T}} b \\ -b^{\mathrm{T}} A\left(\tilde{\mathfrak{c}} + \tilde{x}\right) + b^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left(A^{\mathrm{T}} A\tilde{\mathfrak{c}} - A^{\mathrm{T}} b\right) + \lambda\tilde{x} \\ -b^{\mathrm{T}} A\tilde{\mathfrak{c}} + b^{\mathrm{T}} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\tilde{\mathfrak{c}} + \lambda\tilde{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\tilde{d} \\ \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Но условие (5.35) будет справедливо и для вектора $\widehat{d} = \dfrac{\tilde{d}}{\left\|\tilde{d}\right\|}$, а это означает, что

$$\widehat{d} \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right).$$

Кроме того, $\widehat{d} \neq c$ и $\widehat{d}_{n+1} \neq 0$, что в силу теоремы 4.1 и означает неединственность решения задачи $Z_{total}\left(A,b\right)$.

5.3. Вид множества $\mathcal{H}\left(Z_{total}\left(A,b\right)\right)$ в случае, когда решение задачи $Z_{total}\left(A,b\right)$ не единственно. Аналог нормального решения на множестве $\mathcal{X}\left(A+H^*,b+h^*\right) \Big| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \mathcal{H}\left(Z_{total}\left(A,b\right)\right)$

Лемма 5.8. Пусть решение задачи $Z_{total}\left(A,b\right)$ не единственно. Тогда множество всех оптимальных матриц коррекции может быть описано формулой:

$$\left(\begin{bmatrix} H^*(a) & -h^*(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot Yaa^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}\right) \in \mathcal{H}\left(Z_{total}\left(A,b\right)\right), \qquad (5.36)$$

где Y - ортогональная матрица, являющаяся базисом линейного подпространства, натянутого на собственные векторы матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующие ее минимальному собственному значению; a - произвольный вектор, имеющий единичную евклидову норму и согласованный по размерности с числом столбцов матрицы Y.

Доказательство. Пусть

$$y = Ya. \qquad (5.37)$$

В силу ортогональности матрицы Y и нормированности вектора a имеем: $y^{\mathrm{T}}y = a^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}Ya = a^{\mathrm{T}}a = 1$, т.е., вектор $y \neq 0$ и имеет единичную евклидову норму. Но по построению y принадлежит линейному подпространству собственных векторов матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующие ее минимальному собственному значению, и, следовательно, сам является таким вектором. Другими словами, $y \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$. В силу формул (4.4) и (4.6) (теорема 4.1), а также (3.5), имеем:

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \frac{y}{y_{n+1}} \cdot \left(\frac{y}{y_{n+1}}\right)^{+} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} yy^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} Yaa^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}.$$

Замечание 1. Если известно сингулярное разложение матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} = U_{\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}} \Sigma_{\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}} V^{\mathrm{T}}_{\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}},$$

и в матрице $\Sigma_{\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}}$ сингулярные числа расположены по убыванию, то в качестве матрицы Y можно взять k последних столбцов матрицы $V_{\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}}$, где k - кратность собственного значения $\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$.

Для дальнейших выкладок окажется полезным блочное представление вектора y, в котором выделяется компонента y_{n+1}, и матрицы Y, в которой выделяется последняя строка (строка с номером $n+1$):

$$Y = \begin{bmatrix} W \\ w \end{bmatrix}, \; W \in \mathbb{R}^{n\times k}, \; w \in \mathbb{R}^{1\times k}, \tag{5.38}$$

$$y = \begin{bmatrix} \widehat{y} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Wa \\ wa \end{bmatrix}, \tag{5.39}$$

где $1 \le k \le n$ - кратность минимального собственного значения матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$. Потребуется также блочное представление оптимальной матрицы коррекции $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, которое пока запишем как

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Wa \\ wa \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Wa \\ wa \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Waa^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}} & Waa^{\mathrm{T}}w^{\mathrm{T}} \\ waa^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}} & waa^{\mathrm{T}}w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{5.40}$$

Замечание 2. Используя теорему 4.1, а более точно – установленный в указанной теореме факт однозначного соответствия между матрицей коррекции $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ и решением скорректированной системы x^*, можно утверждать, что в случае, когда решение задачи $Z_{total}(A,b)$ не единственно, одновременно с параметрическим семейством оптимальных матриц коррекции $\begin{bmatrix} H^*(a) & -h^*(a) \end{bmatrix}$, описываемым формулой (5.36), существует параметрическое семейство решений скорректированной системы, описываемое формулой

$$x^*(a) = \frac{1}{wa} \cdot Wa. \tag{5.41}$$

При этом между отдельными элементами $\begin{bmatrix} H^*(a) & -h^*(a) \end{bmatrix}$ и $x^*(a)$ указанных семейств сохраняется однозначное соответствие.

Рассмотрим теперь задачу

$$Z^*_{total}(A,b): \ \left\| x^*\left(\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}\right)\right\| \to \min_{\substack{x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H^*, b+h^*),\\ \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(Z_{total}(A,b))}} \quad \left(= z^*_{total}(A,b)\right). \quad (5.42)$$

Задача $Z^*_{total}(A,b)$ заключается в нахождении множества $\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^*_{total}(A,b)\right)$ таких матриц $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix}$, которые не только бы корректировали несовместную систему $Ax = b$ и имели бы при этом минимальную евклидову норму, но и обеспечивали бы минимальную евклидову норму вектору $x^{**} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**}, b + h^{**})$. Очевидно, что постановка задачи $Z^*_{total}(A,b)$ оказывается наиболее содержательной в том случае, когда задача $Z_{total}(A,b)$ разрешима, но ее решение не единственно. Основные параметры решения задачи $Z^*_{total}(A,b)$ - вид матриц $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix}$, вектора x^{**} и величина его евклидовой нормы $\left\| x^{**} \right\| = z^*_{total}(A,b)$ исследуются в приведенной ниже теореме.

Теорема 5.3 Пусть решение задачи $Z_{total}(A,b)$ существует (и, возможно, не является единственным). Тогда задача $Z^*_{total}(A,b)$ имеет единственное решение, которое характеризуется следующими формулами:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^*_{total}(A,b)\right) = \begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot Yww^{+}Y^{\mathrm{T}}, \quad (5.43)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**}, b + h^{**}) = x^{**} = Ww^{+}, \quad (5.44)$$

$$z^*_{total}(A,b) = \left\| x^{**} \right\| = \sqrt{\frac{1}{ww^{\mathrm{T}}} - 1}. \quad (5.45)$$

Доказательство. Воспользуемся результатами теоремы 4.1 и леммы 5.8. А именно, пусть собственный вектор матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующий ее минимальному собственному значению $\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ определяется формулой (5.37). В соответствии с (4.6) вектор решения системы $\left(A + H^*\right)x = b + h^*$ имеет вид:

$$x^* = \frac{1}{y_{n+1}} \cdot \widehat{y}. \quad (5.46)$$

Оценим квадрат евклидовой нормы этого вектора. При этом учтем доказанное при обосновании леммы 5.8 соотношение $y^{\mathrm{T}}y = 1$, которое теперь запишем в виде

$$y^{\mathrm{T}}y = \widehat{y}^{\mathrm{T}}\widehat{y} + y^2_{n+1} = 1. \quad (5.47)$$

С учетом (5.46) и (5.47) имеем:

$$\left\|x^*\right\|^2 = x^{*\mathrm{T}}x^* = \frac{\widehat{y}^{\mathrm{T}}\widehat{y}}{y_{n+1}^2} = \frac{1-y_{n+1}^2}{y_{n+1}^2} = \frac{1}{y_{n+1}^2} - 1. \tag{5.48}$$

Теперь, с использованием (5.41), можно записать:

$$\left\|x^*(a)\right\|^2 = \frac{1}{(wa)^2} - 1. \tag{5.49}$$

Формула (5.49), как очевидно, является ключом к решению задачи $Z_{total}^*(A,b)$, поскольку

$$\left(z_{total}^*(A,b)\right)^2 = \min_{a|a^{\mathrm{T}}a=1}\left\|x^*(a)\right\|^2 = \min_{a|a^{\mathrm{T}}a=1}\mathrm{X}(a). \tag{5.50}$$

Несложно увидеть, что задача (5.50) решается сведением к вспомогательной задаче максимизации линейной функции на единичной сфере. Указанную задачу, в силу ее очевидности мы выписывать не будем, а сразу дадим решение (5.50). Так, минимум в (5.50) достигается на векторе

$$a^* = \pm\frac{w^{\mathrm{T}}}{\|w\|}, \tag{5.51}$$

а его значение $\mathrm{X}\left(a^*\right) = \left\|x^*\left(a^*\right)\right\|^2 = \left\|x^{**}\right\|^2$ составляет

$$\mathrm{X}\left(a^*\right) = \frac{1}{ww^{\mathrm{T}}} - 1,$$

откуда и получается искомая формула (5.45). Также несложно с использованием (3.5), (5.38)-(5.39) и (5.46) получить искомые формулы (5.43)-(5.44):

$$x^{**} = \frac{1}{wa^*}Wa^* = \frac{\pm 1}{\|w\|}\cdot\frac{\pm Ww^{\mathrm{T}}}{\|w\|} = \frac{Ww^{\mathrm{T}}}{ww^{\mathrm{T}}} = Ww^+,$$

$$\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Wa^*a^{*\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}} & Wa^*a^{*\mathrm{T}}w^{\mathrm{T}} \\ wa^*a^{*\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}} & wa^*a^{*\mathrm{T}}w^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Ww^+wW^{\mathrm{T}} & Ww^{\mathrm{T}} \\ wW^{\mathrm{T}} & ww^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} W \\ w\end{bmatrix}\cdot ww^+\cdot\begin{bmatrix} W \\ w\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A & b\end{bmatrix}\cdot Yww^+\cdot Y^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что хотя вектор a^* определяется с точностью до знака, матрица $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**}\end{bmatrix}$ определяется из приведенных выше формул единственным образом. Единственность x^{**} при фиксированной $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**}\end{bmatrix}$ следует из теоремы 4.1.

Замечание 1. Несложно показать, что в случае неединственности решения задачи $Z_{total}(A,b)$ существует вектор

$$y \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\bigg| y_{n+1} = 0.$$

Соответствующее указанному вектору "решение" скорректированной системы, будет иметь бесконечную норму. Отсюда, в свою очередь, следует, что подбирая соответствующие значения векторного параметра a в представлениях (5.36) и (5.41), можно добиться, чтобы норма решения скорректированной системы $\left\|x^*(a)\right\|$ принимала любое заданное значение из диапазона $\left[\left\|x^{**}\right\|, +\infty\right[$.

Замечание 2. Все сказанное в замечании 1 в частности справедливо в случае выполнения условий (5.17)-(5.18) (см. лемму 5.6). Однако в указанных условиях аналог нормального решения скорректированной системы вектор x^{**} оказывается нулевым, что следует из самой постановки задачи $Z^*_{total}(A,b)$ и формул (5.21)-(5.22). Несложно показать, что сама матричная коррекция системы $Ax = b$ при этом не затрагивает матрицу A, но делает нулевым вектор b. К такому же результату (см. (5.8)-(5.9) и выкладки параграфа 1.3) в указанном случае приводит и метод наименьших квадратов.

5.4. Связь задачи $Z^*_{total}(A,b)$ с задачей построения нормального псевдорешения несовместной системы $Ax = b$

Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, вектор x^{**}, получаемый при решении задачи $Z^*_{total}(A,b)$, в некотором смысле аналогичен нормальному псевдорешению исходной несовместной системы $Ax = b$, что следует из самой постановки задачи $Z^*_{total}(A,b)$. Аргументацию в пользу существования такой аналогии можно усилить фактом единственности вектора x^{**} и вектора $\hat{x}$, являющегося нормальным псевдорешением системы $Ax = b$ (см. параграф 1.3 и формулу (3.6)). Существует ли более тесная связь между двумя рассматриваемыми задачами и между их решениями – векторами x^{**} и $\hat{x}$? Один из возможных ответов на данный вопрос содержится в приведенной ниже теореме.

Теорема 5.4. Пусть задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение, и оно не является единственным. Тогда условие $x^{**} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**}, b + h^{**})$, где $\begin{bmatrix} H^{**} & -h^{**} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^*_{total}(A,b)\right)$, эквивалентно условию

$$x^{**} = \underset{x^*(a),\ \text{где}\ \|a\|=1}{\arg\min} \left\|\hat{x} - x^*(a)\right\|. \tag{5.52}$$

Перед доказательством теоремы рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма 5.9. Если задача $Z_{total}(A,b)$ имеет некоторое (возможно, не единственное) решение $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right)$, то справедливо условие

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\|\vartriangle b\|^2}{\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)} > 0, \tag{5.53}$$

где $x^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^*\right)$.

Доказательство. 1) Заметим, что если задача $Z_{total}(A,b)$ разрешима, то

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) > 0. \tag{5.54}$$

Действительно, поскольку матрица $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ является матрицей Грама столбцов матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, все ее собственные значения – вещественные неотрицательные числа [27]. Если же предположить, что $\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = 0$, то в силу теоремы 4.1 получаем, что несовместная система линейных алгебраических уравнений может быть сделана совместной с помощью нулевой матрицы коррекции, т.е., фактически является совместной (противоречие).

2) Заметим, что в силу несовместности системы $Ax = b$ выполняется условие $\|\vartriangle b\| > 0$.

3) Покажем, что величину $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}$ действительно можно вычислить, пользуясь соотношением (5.53). Действительно, поскольку задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение, в силу теоремы 4.1 существует вектор $y \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$ такой, что $y_{n+1} \neq 0$ и

$$x^* = \frac{1}{y_{n+1}} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{x} = \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. По построению, $\widehat{x} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$. Следовательно, можно записать:

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \widehat{x} = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \widehat{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^{\mathrm{T}} A x^{*} - A^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) x^{*}, \\ -b^{\mathrm{T}} A x^{*} + b^{\mathrm{T}} b = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) \end{cases}$$

Введем в рассмотрение еще один вектор. Пусть $\breve{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, где, в соответствии с (3.6), $\hat{x} = A^{+}b.$ - нормальное псевдорешение несовместной системы $Ax = b$ по методу наименьших квадратов. Рассмотрим величину $\breve{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\widehat{x}$ с той целью, чтобы, используя блочное представление матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ и векторов $\widehat{x}$ и $\breve{x}$, выразить исследуемую величину $\breve{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x}$. Получим:

$$\breve{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\widehat{x} = \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A x^{*} - \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b - b^{\mathrm{T}} A x^{*} + b^{\mathrm{T}} b, \tag{5.55}$$

и, в то же время,

$$\breve{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\widehat{x} = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\cdot\left(\hat{x}^{\mathrm{T}} x^{*} + 1\right). \tag{5.56}$$

Теперь учтем, что в силу (3.1), (3.3) и (3.6),

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A = b^{\mathrm{T}} A^{+\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A = b^{\mathrm{T}}\left(AA^{+}\right)^{\mathrm{T}} A = b^{\mathrm{T}} AA^{+} A = b^{\mathrm{T}} A, \tag{5.57}$$

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}} A^{+\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}}\left(AA^{+}\right)^{\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}} AA^{+} b. \tag{5.58}$$

Пусть $\vartriangle b$, как и прежде - вектор МНК-невязки системы $Ax = b$, определяемый формулой (3.12). Тогда, приравняв правые части (5.55) и (5.56), сделав необходимые подстановки и сокращения с учетом (3.2)-(3.3) и (5.57)-(5.58), получаем:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} x^{*} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\left\|\vartriangle b\right\|^{2}}{\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)}.$$

Доказательство теоремы 5.4. Пусть задача $Z_{total}\left(A, b\right)$ имеет решение, которое не является единственным. Тогда существует параметрическое семейство векторов $x^{*}(a)$, определяемое формулой (5.41). Представим вектор $x^{*}(a)$ как $x^{*}(a) = \left\|x^{*}(a)\right\| \cdot \overline{x}^{*}(a)$, где $\overline{x}^{*}(a) \in \mathbb{R}^{n}$ $\left\|\overline{x}^{*}(a)\right\| = 1$. Указанное представление с учетом (5.52) позволяет записать

$$\min_{a \| a \| = 1}\left\|\hat{x} - x^{*}(a)\right\|^{2} = \min_{a \| a \| = 1}\left(\left\|\hat{x}\right\|^{2} - 2\hat{x}^{\mathrm{T}} x^{*}(a) + \left\|x^{*}(a)\right\|^{2}\right). \tag{5.59}$$

Но величина $\left\|\hat{x}\right\|$ от a не зависит, и, что нетривиально, в силу (5.53) от a не зависит величина $\hat{x}^{\mathrm{T}} x^{*}(a)$. Но тогда минимум в (5.59) достигается на том же значении a^*, что и в задаче (5.50). Дальнейшие выкладки очевидны.

Следствие. Рассмотрим вектор

$$\widehat{x} = YY^{\mathrm{T}}\hat{x} = P_{columns(Y)}\hat{x}, \tag{5.60}$$

где, как и раньше, Y - ортогональная матрица, являющаяся базисом линейного подпространства, натянутого на собственные векторы матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующие ее минимальному собственному значению. В силу (5.60) вектор $\widehat{x}$ является ортогональной проекцией вектора $\hat{x}$ в линейное подпространство собственных векторов матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующих ее минимальному собственному значению. Опираясь на условие (5.52), можно показать, что в случае, когда $\hat{x} \neq 0$, вектор $\widehat{x}$ отличается от вектора x^{**}, порождаемого задачей $Z^*_{total}(A,b)$ и, как было показано выше, являющегося решением задачи (5.52), только некоторым скалярным множителем β, т.е., справедливо условие

$$x^{**} = \beta\widehat{x}. \tag{5.61}$$

Как следует из теоремы 5.2, при неединственности решения задачи $Z_{total}(A,b)$ выполняется условие

$$\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right).$$

С его учетом значение параметра β можно определить из условия

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta\widehat{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \cdot \begin{bmatrix} \beta\widehat{x} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\beta b^{\mathrm{T}}A\widehat{x} + \|b\|^2 = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \Rightarrow \beta = \frac{\|b\|^2 - \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)}{b^{\mathrm{T}}A\widehat{x}}. \end{gathered} \tag{5.62}$$

Таким образом, формулы (5.60)-(5.62) предоставляют альтернативный предложенному в теореме 5.3 способ вычисления вектора x^{**} при условии $\hat{x} \neq 0$ (или, что эквивалентно, $b^{\mathrm{T}}A \neq 0$). В то же время, как уже указывалось в замечании 2 к теореме 5.3, при $\hat{x} = 0$ (или, что эквивалентно, $b^{\mathrm{T}}A = 0$) имеем $x^{**} = 0$.

Лемма 5.10. Пусть задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение (возможно, не единственное), $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right)$ - некоторая матрица, $x^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^*\right)$ - соответствующий ей вектор. Тогда имеет место неравенство

$$\left\|x^*\right\| \geq \|\hat{x}\|. \tag{5.63}$$

Доказательство. Запишем основное свойство невязки линейной системы $\vartriangle b$, полученной методом наименьших квадратов:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\vartriangle b = b - A\hat{x}\|^2 \le \|b - Ax\|^2 . \tag{5.64}$$

Очевидно, частным случаем соотношения (5.64) является неравенство

$$\|\vartriangle b\|^2 \le \left\|b - Ax^*\right\|^2 . \tag{5.65}$$

Выполним некоторые преобразования, используя, в частности, неравенство (5.6), обоснованное в лемме 5.2:

$$\begin{gathered} \left\|b - Ax^*\right\|^2 = \|b\|^2 - 2b^{\mathrm{T}} Ax^* + x^{*\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Ax^* = \\ = \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\left(\left\|x^*\right\|^2 + 1\right) \le \frac{\|\vartriangle b\|^2}{\|\hat{x}\|^2 + 1}\left(\left\|x^*\right\|^2 + 1\right). \end{gathered} \tag{5.66}$$

Для завершения доказательства осталось объединить неравенства (5.65),(5.66).

5.5. Альтернативные формулировки необходимых и достаточных условий разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$

Лемма 5.11. Следующее неравенство справедливо при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \le \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right). \tag{5.67}$$

Доказательство. 1) Пусть $b = 0$. Тогда в силу (3.9) $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A = A^{\mathrm{T}}A$ и (5.67) выполняется в виде равенства. 2) Пусть $b \ne 0$. Тогда в силу (3.9)

$$A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A = A^{\mathrm{T}}A - \frac{A^{\mathrm{T}}bb^{\mathrm{T}}A}{b^{\mathrm{T}}b}. \tag{5.68}$$

Матрица $\dfrac{A^{\mathrm{T}}bb^{\mathrm{T}}A}{b^{\mathrm{T}}b}$ является симметричной и одноранговой. Задача об изменении собственных значений симметричной матрицы при ее одноранговой симметричной модификации является классической (см., например, [26]). Опираясь на результаты, полученные в [26], можно заключить, что для модификации вида (5.68) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} \lambda_1\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \ge \lambda_1\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \ge \lambda_2\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \ge \\ \ge \ldots \ge \lambda_n\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \ge \lambda_n\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right), \end{gathered} \tag{5.69}$$

откуда, в частности, следует (5.67).

Лемма 5.12.

$$\exists y \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right)\Big| b^{\mathrm{T}}Ay = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \end{cases} \tag{5.70}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathbb{R}^n$ - вектор, удовлетворяющий левой части (5.70). Тогда

$$A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A \cdot y = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) \cdot y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} A y - \frac{A^{\mathrm{T}} b b^{\mathrm{T}} A}{b^{\mathrm{T}} b} y = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) \cdot y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} A y = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) \cdot y$$

Таким образом, число $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right)$ принадлежит к набору собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}} A$, а вектор y - к соответствующему набору собственных векторов. Но тогда условие (5.67) не оставляет другой возможности кроме выполнения условий в правой части (5.70).

Лемма 5.13. Пусть

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right). \tag{5.71}$$

Тогда

$$\forall x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) \Rightarrow \begin{cases} b^{\mathrm{T}} A x = 0, \\ x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right). \end{cases} \tag{5.72}$$

Доказательство. 1) Покажем, что при выполнении условия (5.71) для любого вектора $x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right)$ имеет место соотношение

$$b^{\mathrm{T}} A x \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right). \tag{5.73}$$

Действительно, в силу (5.68),

$$\begin{cases} x \notin \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right), \\ x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) \end{cases} \Rightarrow x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) x \neq \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b^{\mathrm{T}} A x\right)^2}{b^{\mathrm{T}} b} \neq 0 \Leftrightarrow b^{\mathrm{T}} A x \neq 0.$$

Но в то же время,

$$\begin{cases} b^{\mathrm{T}} A x \neq 0, \\ x \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right), \\ \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)x=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)-\frac{\left(b^{\mathrm{T}}Ax\right)^{2}}{b^{\mathrm{T}}b}\neq\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\notin\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right).$$
2) Заметим, что истинность (5.72) следует из истинности (5.73).

Теорема 5.5. Задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда либо (a) $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)<\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, либо (b) $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=\lambda$, но кратность числа λ среди собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A$ выше кратности числа λ среди собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}A$.

Доказательство.

1. Достаточность. Случай (a). Пусть $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)<\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, но задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения. Тогда в силу теоремы 4.2 выполняется условие
$$\forall y\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)\Rightarrow b^{\mathrm{T}}Ay=0.$$
Но тогда в силу леммы 5.12 выполняется условие (5.70), которое противоречит условию $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)<\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$.

Случай (b). Пусть $z_1,\ldots,z_k$ - соответствующий λ набор линейно независимых собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}A$, содержащий максимальное количество векторов k; $y_1,\ldots,y_p$ - соответствующий λ набор линейно независимых собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A$, содержащий максимальное количество векторов $p>k$; пусть задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения. Тогда в силу теоремы 4.2
$$b^{\mathrm{T}}Ay_1=\ldots=b^{\mathrm{T}}Ay_p=0,$$
и, в силу леммы 5.12 векторы $y_1,\ldots,y_p$ образуют альтернативный $z_1,\ldots,z_k$ набор собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}A$, соответствующих λ. Но тогда, с одной стороны, кратность собственного значения λ в матрице $A^{\mathrm{T}}A$ равна k, а с другой стороны $p>k$ (противоречие).

2. Необходимость. Пусть задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет решение, но выполняется условие $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=\lambda$ и кратность числа λ среди собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A$ равна кратности числа λ среди собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ и составляет число $k\geq 1$. В силу теоремы 4.2
$$\exists y\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)\Big|\, b^{\mathrm{T}}Ay\neq 0.$$
В то же время, в силу леммы 5.13, выполняются условия (5.72). Таким образом,

мы имеем набор $x_1,\ldots,x_k$ из k собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A$, соответствующих собственному значению $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)$ и таких, что

$$b^{\mathrm{T}}Ax_1 = \ldots = b^{\mathrm{T}}Ax_k = 0.$$

Поскольку $b^{\mathrm{T}}Ay \neq 0$, вектор y не может быть представлен линейной комбинацией векторов $x_1,\ldots,x_k$. Но тогда кратность собственного значения $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)$ оказывается больше k (противоречие).

Замечание. Как известно, (см., например, [11]), основным практическим вычислительным инструментом исследования собственных значений и собственных векторов вещественных матриц является в настоящее время сингулярное разложение. Ниже приводится таблица из [11], в которой даны оценки трудоемкости двенадцати вариантов сингулярного разложения $U = V\Sigma W^{\mathrm{T}}$ матрицы $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, где $m \geq n$, различающихся особенностями численной реализации и числом элементов сингулярного разложения, вычисляемых и сохраняемых в явном виде. Трудоемкость оценивается количеством так называемых "флопов" – операций с плавающей точкой (без детализации на операции сложения, умножения, издержки на индексацию и пр.)

Общей особенностью указанных алгоритмов является то, что они не позволяют вычислять отдельные сингулярные числа – может быть вычислен только весь набор сингулярных чисел одновременно. Невозможно также определить отдельный собственный вектор из набора векторов V или W - вычисляется или не вычисляется либо соответствующая матрица целиком, либо, в случае матрицы V, ее подматрица V_1, состоящая из первых n столбцов матрицы V.

Трудоемкость сингулярного разложения вещественной матрицы размера $m \times n$

Вычисляется	Метод Голуба-Рейнча	R-SVD
Σ	$4mn^2 - 4n^3/3$	$2mn^2 + 2n^3$
Σ, W	$4mn^2 + 8n^3$	$2mn^2 + 11n^3$
Σ, V	$4m^2n - 8mn^2$	$4m^2n + 13n^3$
Σ, V_1	$14mn^2 - 2n^3$	$6mn^2 + 11n^3$
Σ, V, W	$4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$	$4m^2n + 22n^3$
Σ, V_1, W	$14mn^2 + 8n^3$	$6mn^2 + 20n^3$

Теперь заметим, что для проверки разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ в случае $m \geq n$ в соответствии с теоремой 4.2 с использованием сингулярного разложения необходимо определить сингулярные числа матрицы $\left(I-bb^{+}\right)A$ и n линейно независимых векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A$. В то же время для аналогичной проверки в соответствии с теоремой 5.5 (с помощью сингулярного разложения) необходимо вычислить сингулярные значения матриц A и $\left(I - bb^{+}\right)A$. Но как следует из приведенных в таблице данных, при $n \le m < 7n/2$ двукратное использование алгоритма R-SVD для определения сингулярных чисел матриц A и $\left(I - bb^{+}\right)A$ имеет меньшую суммарную трудоемкость, чем построение собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A$ и сингулярных чисел матрицы $\left(I - bb^{+}\right)A$ любым из перечисленных в таблице способов сингулярного разложения.

5.6. Необходимые и достаточные условия единственности решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$

Теорема 5.6. При существовании решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$ для его единственности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right) < \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right). \tag{5.74}$$

Доказательство.

1. Достаточность. Покажем, что из условия (5.74) следует единственность задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$**.** Предположим противное: пусть условие (5.74) выполняется, но решение задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$ не единственно. В силу теоремы 4.2 это означает, что существуют по крайней мере два вектора $c, d \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$c, d \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right),\ b^{\mathrm{T}}Ac \ne 0,\ b^{\mathrm{T}}Ad \ne 0,\ c \ne d. \tag{5.75}$$

Введем в рассмотрение векторы $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbf{X}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)$ следующим образом:

$$\tilde{c} = \frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ac} \cdot c,\ \tilde{d} = \frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ad} \cdot d.$$

Поскольку предположение $b \ne 0$ связано с самой постановкой задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$, можно записать, что $\tilde{c} \ne 0$ и $\tilde{d} \ne 0$. Кроме того, используя (5.75), можно показать, что $\tilde{c} \ne \tilde{d}$, и, таким образом, $x = \tilde{c} - \tilde{d} \ne 0$. В силу условия $\tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbf{X}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)$ и с учетом (5.67) можно записать:

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\tilde{c} = A^{\mathrm{T}}A\tilde{c} - A^{\mathrm{T}}b = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)\tilde{c}, \\ A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\tilde{d} = A^{\mathrm{T}}A\tilde{d} - A^{\mathrm{T}}b = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)\tilde{d} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)Ax = A^{\mathrm{T}}Ax = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right) = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right),$$

что противоречит условию (5.74).

2. Необходимость. Покажем, что в случае разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ невыполнение условия (5.74) влечет неединственность решения $Z_{fix\{b\}}(A,b)$. Действительно, пусть $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет решение, но условие (5.74) не выполняется. Тогда в силу (5.67) справедливо условие (5.71):

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=\lambda.$$

Но тогда в силу леммы 5.13 выполняется условие

$$\forall x\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\Rightarrow b^{\mathrm{T}}Ax=0.$$

В то же время в силу разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ из теоремы 4.2 следует, что

$$\exists c\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)\Big|\, b^{\mathrm{T}}Ac\neq 0.$$

Рассмотрим $d=c+x$, где x - некоторый вектор из $\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, и $\overline{d}=\dfrac{1}{\|d\|}d$.

Заметим, что из свойств c и x вытекает условие $d\neq 0$, поэтому вектор $\overline{d}$ существует. Заметим также, что в силу условий $x\neq 0$ и $x\neq c$ будет выполняться условие $\overline{d}\neq c$. В силу (5.68) можно записать:

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)Ad&=A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)Ac+A^{\mathrm{T}}Ax=\\&=\lambda c+\lambda x=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)d.\end{aligned}\tag{5.76}$$

В то же время

$$b^{\mathrm{T}}Ad=b^{\mathrm{T}}Ac\neq 0.\tag{5.77}$$

Но из условий (5.76)-(5.77) будут следовать и условия

$$\begin{cases}A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\overline{d}=\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)\overline{d},\\ b^{\mathrm{T}}A\overline{d}\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{d}\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I-bb^{+}\right)A\right)\Big|\, b^{\mathrm{T}}Ac\neq 0.$$

которые в совокупности с условием $\overline{d}\neq c$ в силу теоремы 4.2 и означают неединственность решения задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$.

5.7. Вид множества $\mathcal{H}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b)\right)$ в случае, когда решение задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не единственно. Аналог нормального решения на множестве $\mathcal{X}\left(A+H^{*},b\right)\Big|\,H^{*}\in\mathcal{H}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b)\right)$

Лемма 5.14. Пусть решение задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не единственно. Тогда множество всех оптимальных матриц коррекции может быть описано формулой:

$$\left(H^*(a) = -\left(I - bb^+\right) A \cdot Xaa^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}}\right) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)\right), \tag{5.78}$$

где X - ортогональная матрица, являющаяся базисом линейного подпространства, натянутого на собственные векторы матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A$, соответствующие ее минимальному собственному значению; a - произвольный вектор, имеющий единичную евклидову норму и согласованный по размерности с числом столбцов матрицы X.

Доказательство. Пусть

$$y = Xa. \tag{5.79}$$

В силу ортогональности матрицы Y и нормированности вектора a имеем: $y^{\mathrm{T}} y = a^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} Xa = a^{\mathrm{T}} a = 1$, т.е., вектор $y \neq 0$ и имеет единичную евклидову норму. Но по построению y принадлежит линейному подпространству собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A$, соответствующие ее минимальному собственному значению, и, следовательно, сам является таким вектором. Другими словами, $y \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right)$. В силу формул (4.38) и (4.40) (теорема 4.2), а также (3.9), имеем:

$$H^* = \left(b - \frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} Ay} Ay\right) \frac{b^{\mathrm{T}} Ay}{b^{\mathrm{T}} b} y^{\mathrm{T}} = b \frac{b^{\mathrm{T}} Ay}{b^{\mathrm{T}} b} y^{\mathrm{T}} - Ayy^{\mathrm{T}} =$$

$$= bb^+ Ayy^{\mathrm{T}} - Ayy^{\mathrm{T}} = -\left(I - bb^+\right) Ayy^{\mathrm{T}} =$$

$$= -\left(I - bb^+\right) A \cdot Xaa^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}}.$$

Замечание 1. Если известно сингулярное разложение матрицы $\left(I - bb^+\right)A$:

$$\left(I - bb^+\right) A = U_{\left(I-bb^+\right)A} \Sigma_{\left(I-bb^+\right)A} V^{\mathrm{T}}_{\left(I-bb^+\right)A},$$

и в матрице $\Sigma_{\left(I-bb^+\right)A}$ сингулярные числа расположены по убыванию, то в качестве матрицы X можно взять k последних столбцов матрицы $V_{\left(I-bb^+\right)A}$, где k - кратность собственного значения $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right)$.

Замечание 2. Используя теорему 4.2, а более точно – установленный в указанной теореме факт однозначного соответствия между матрицей коррекции H^* и решением скорректированной системы x^*, можно утверждать, что в случае, когда решение задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ не единственно, одновременно с параметрическим семейством оптимальных матриц коррекции $H^*(a)$, описываемым формулой (5.78), существует параметрическое семейство решений скорректированной системы, описываемое формулой

$$x^*(a) = \frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} AXa} \cdot Xa. \tag{5.80}$$

При этом между отдельными элементами $H^*(a)$ и $x^*(a)$ указанных семейств сохраняется однозначное соответствие.

Рассмотрим теперь задачу

$$Z^*_{fix\{b\}}(A,b): \ \left\| x^*\left(H^*\right)\right\| \to \min_{\substack{x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H^*,b),\\ H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b)\right)}} \left(= z^*_{fix\{b\}}(A,b)\right). \tag{5.81}$$

Задача $Z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ заключается в нахождении множества $\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^*_{total}(A,b)\right)$ таких матриц H^{**}, которые не только бы корректировали несовместную систему $Ax = b$ и имели бы при этом минимальную евклидову норму, но и обеспечивали бы минимальную евклидову норму вектору $x^{**} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**}, b)$. Очевидно, что постановка задачи $Z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ оказывается наиболее содержательной в том случае, когда задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ разрешима, но ее решение не единственно. Основные параметры решения задачи $Z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ - вид матриц H^{**}, вектора x^{**} и величина его евклидовой нормы $\left\|x^{**}\right\| = z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ исследуются в приведенной ниже теореме.

Теорема 5.7. Пусть решение задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ существует (и, возможно, не является единственным). Тогда задача $Z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет единственное решение, которое характеризуется следующими формулами:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^*_{fix\{b\}}(A,b)\right) = H^{**} =$$

$$= -\left(I - bb^+\right) A \cdot \frac{\left(P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right)\left(P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right)^{\mathrm{T}}}{\left\|P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right\|^2}, \tag{5.82}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**}, b) = x^{**} = \frac{\|b\|^2}{\left\|P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right\|^2} P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b, \tag{5.83}$$

$$z^*_{fix\{b\}}(A,b) = \left\|x^{**}\right\| = \frac{\|b\|^2}{\left\|P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right\|}. \tag{5.84}$$

Доказательство. Воспользуемся леммы 5.14. В силу (5.79)-(5.80) и условия

$$y^{\mathrm{T}} y = a^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X a = 1$$

имеем:

$$\left\|x^*(a)\right\|^2 = \left(\frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} A X a}\right)^2 a^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X a = \left(\frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} A X a}\right)^2. \tag{5.85}$$

По аналогии с теоремой 5.4 рассмотрим задачу

$$\left(z^*_{fix\{b\}}(A,b)\right)^2 = \min_{a | a^{\mathrm{T}} a = 1} \left\|x^*(a)\right\|^2 = \min_{a | a^{\mathrm{T}} a = 1} \mathrm{Z}(a). \tag{5.86}$$

Несложно увидеть, что в силу (5.85) задача (5.86) решается сведением к вспомогательной задаче максимизации линейной функции на единичной сфере:

$$\left(b^{\mathrm{T}} AX\right) \cdot a \to \max_{a \mid a^{\mathrm{T}} a = 1}.$$

Решение указанной вспомогательной задачи, как и решение задачи (5.86), достигается на векторе

$$a^{*} = \pm \frac{X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}{\left\| b^{\mathrm{T}} AX \right\|} = \pm \frac{X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}{\sqrt{b^{\mathrm{T}} AXX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}} = \pm \frac{X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|}, \qquad (5.87)$$

а его значение $\mathrm{Z}\left(a^{*}\right) = \left\| x^{*}\left(a^{*}\right) \right\|^{2} = \left\| x^{**} \right\|^{2}$ составляет

$$\mathrm{Z}\left(a^{*}\right) = \left(\frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} AXa^{*}} \right)^{2} = \left(\frac{\|b\|^{2}}{\pm b^{\mathrm{T}} AX \cdot \dfrac{X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|}} \right)^{2} = \left(\frac{\|b\|^{2}}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|} \right)^{2},$$

откуда и получается искомая формула (5.84). В то же время, в силу (5.80) и (5.87)

$$x^{**} = x^{*}\left(a^{*}\right) = \frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} AXa^{*}} \cdot Xa^{*} = \frac{\pm b^{\mathrm{T}} bXX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b}{\pm b^{\mathrm{T}} AXX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b} = .$$

$$= \frac{\|b\|^{2}}{\left\| XX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b \right\|^{2}} XX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} b = \frac{\|b\|^{2}}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|^{2}} P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b.$$

Кроме того, в силу (5.78) и (5.87)

$$H^{**} = H^{*}\left(a^{*}\right) = -\left(I - bb^{+}\right) A \cdot Xa^{*} a^{*\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} =$$

$$= -\left(I - bb^{+}\right) A \cdot \frac{XX^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} bbAXX^{\mathrm{T}}}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|^{2}} =$$

$$= -\left(I - bb^{+}\right) A \cdot \frac{\left(P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right)\left(P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b\right)^{\mathrm{T}}}{\left\| P_{columns(X)} A^{\mathrm{T}} b \right\|^{2}}.$$

Заметим, что единственность x^{**} при фиксированной H^{**} следует из теоремы 4.2.

Замечание. Несложно показать (см. лемму 5.13 и теорему 5.5), что в случае неединственности решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$ существует вектор

$$y \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right) A\right) \Big| \, b^{\mathrm{T}} Ay = 0.$$

Соответствующее указанному вектору "решение" скорректированной системы, будет иметь бесконечную норму. Отсюда, в свою очередь, следует, что подбирая соответствующие значения векторного параметра a в представлениях (5.78) и (5.80), можно добиться, чтобы норма решения скорректированной системы $\left\|x^*(a)\right\|$ принимала любое заданное значение из диапазона $\left[\left\|x^{**}\right\|,+\infty\right[$.

5.8. Связь задачи $Z^*_{fix\{b\}}(A,b)$ с задачей построения нормального псевдорешения несовместной системы $Ax = b$

Лемма 5.15. Следующее неравенство справедливо при произвольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и произвольном векторе $b \in \mathbb{R}^m$

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \le \frac{\left\|\hat{b}\right\|^2 \cdot \left\|\vartriangle b\right\|^2}{\left\|\hat{x}\right\|^2 \cdot \left\|b\right\|^2}. \tag{5.88}$$

Действительно, в силу (5.68),

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \le \frac{\hat{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\hat{x}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} =$$

$$= \frac{\hat{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\hat{x}}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} - \frac{\hat{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}bb^{\mathrm{T}}A\hat{x}}{b^{\mathrm{T}}b\cdot\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} = \frac{b^{\mathrm{T}}A^{+\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AA^+b}{\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} - \frac{\left(b^{\mathrm{T}}AA^+b\right)^2}{b^{\mathrm{T}}b\cdot\hat{x}^{\mathrm{T}}\hat{x}} =$$

$$= \frac{1}{\left\|\hat{x}\right\|^2}\left(\left\|\hat{b}\right\|^2 \cdot \left(1 - \frac{\left\|\hat{b}\right\|^2}{\left\|b\right\|^2}\right)\right) = \frac{\left\|\hat{b}\right\|^2 \cdot \left\|\vartriangle b\right\|^2}{\left\|\hat{x}\right\|^2 \cdot \left\|b\right\|^2}.$$

Лемма 5.16. Пусть задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет решение (возможно, не единственное), $H^* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b)\right)$ - некоторая матрица, $z^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b\right)$ - соответствующий ей вектор. Тогда имеет место неравенство

$$\left\|z^*\right\| \ge \left\|\hat{x}\right\| \cdot \sqrt{1 + \frac{\left\|\vartriangle b\right\|^2}{\left\|\hat{b}\right\|^2}}. \tag{5.89}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 5.10 снова обратимся к условию (5.64). Теперь в качестве частного случая можно записать неравенство

$$\left\|\vartriangle b\right\|^2 \le \left\|b - Az^*\right\|^2. \tag{5.90}$$

Выполним некоторые преобразования (5.90), используя, в частности, неравенство (5.88) и тот факт, что в силу теоремы 4.2 выполняется условие

$$z^* = \frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ay}\cdot y,$$

где

$$y \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A\right).$$

Имеем:

$$\left\|b - Az^*\right\|^2 = b^{\mathrm{T}}b - 2b^{\mathrm{T}}Az^* + z^{*\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Az^* =$$

$$= b^{\mathrm{T}}b - \frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ay} \cdot 2b^{\mathrm{T}}Ay + \left(\frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ay}\right)^2 \cdot y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ay =$$

$$= \left(\frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ay}\right)^2 \cdot \left(y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ay - \frac{\left(b^{\mathrm{T}}Ay\right)^2}{b^{\mathrm{T}}b}\right) = \left\|z^*\right\|^2 \cdot y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)Ay =$$

$$= \left\|z^*\right\|^2 \cdot \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \le \left\|z^*\right\|^2 \cdot \frac{\left\|\hat{b}\right\|^2 \cdot \left\|\vartriangle b\right\|^2}{\left\|\hat{x}\right\|^2 \cdot \left\|b\right\|^2}. \qquad (5.91)$$

Для завершения доказательства остается объединить неравенства (5.90)-(5.91) и использовать тождество $\|b\|^2 = \left\|\hat{b}\right\|^2 + \|\vartriangle b\|^2$.

Лемма 5.17. Если задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ имеет некоторое (возможно, не единственное) решение $H^* \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{b\}}(A,b)\right)$, то справедливо условие

$$\hat{x}^{\mathrm{T}}z^* = \frac{\|\vartriangle b\|^2}{\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right)} > 0, \qquad (5.92)$$

где $z^* = \mathcal{X}\left(A + H^*, b\right)$.

Доказательство. 1) Заметим, что если задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ разрешима, то

$$\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) > 0. \qquad (5.93)$$

Действительно, поскольку матрица $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A$ является матрицей Грама столбцов матрицы $\left(I - bb^+\right)A$, все ее собственные значения – вещественные неотрицательные числа [27]. Если же предположить, что $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) = 0$, то в силу теоремы 4.2 получаем, что несовместная система линейных алгебраических уравнений может быть сделана совместной с помощью нулевой матрицы коррекции, т.е., фактически является совместной (противоречие).

2) Заметим, что в силу несовместности системы $Ax = b$ выполняется условие $\|\vartriangle b\| > 0$.

3) Покажем, что величину $\hat{x}^{\mathrm{T}}z^*$ действительно можно вычислить, пользуясь соотношением (5.92). Действительно, в силу теоремы 4.2,

$$\hat{x}^{\mathrm{T}}z^* = \hat{x}^{\mathrm{T}}y \cdot \frac{\|b\|^2}{b^{\mathrm{T}}Ay}, \qquad (5.94)$$

где

$$y \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A\right) \Big| b^{\mathrm{T}}Ay = 0.$$

Выведем несколько вспомогательных соотношений. Так, покажем, что имеет место равенство

$$b^{\mathrm{T}} A = \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A. \qquad (5.95)$$

Действительно, в силу (3.1), (3.3) и (3.10)

$$b^{\mathrm{T}} A = b^{\mathrm{T}} AA^{+} A = \left(AA^{+} b \right)^{\mathrm{T}} A = \left(A^{+} b \right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A = \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A.$$

Теперь обоснуем еще одно вспомогательное равенство

$$b^{\mathrm{T}} Ay = \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \frac{\|b\|^2}{\|\vartriangle b\|^2} \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y. \qquad (5.96)$$

Действительно, в силу (5.68) и (5.95)

$$b^{\mathrm{T}} Ay = \hat{x}^{\mathrm{T}} \left(A^{\mathrm{T}} bb^{+} A + A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) y =$$

$$= \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} bb^{+} Ay + \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y.$$

Но в силу (3.9)-(3.10) и (5.95)

$$A^{\mathrm{T}} bb^{+} A = \|b\|^{-2} \cdot A^{\mathrm{T}} A\hat{x} \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A,$$

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} bb^{+} Ay = \|b\|^{-2} \cdot \left(\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\hat{x} \right) \cdot \left(\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Ay \right) =$$

$$= \|b\|^{-2} \cdot \left(\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\hat{x} \right) \cdot b^{\mathrm{T}} Ay.$$

В то же время, в силу (3.1), (3.3) (3.10) и (3.13)

$$\hat{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\hat{x} = \left(AA^{+} b \right)^{\mathrm{T}} \left(AA^{+} b \right) = b^{\mathrm{T}} AA^{+} b = \left\| \hat{b} \right\|^2 .$$

Таким образом,

$$b^{\mathrm{T}} Ay = \frac{\left\| \hat{b} \right\|^2}{\|b\|^2} \cdot b^{\mathrm{T}} Ay + \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^{\mathrm{T}} Ay \cdot \left(1 - \frac{\left\| \hat{b} \right\|^2}{\|b\|^2} \right) = \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^{\mathrm{T}} Ay \cdot \frac{\|\vartriangle b\|^2}{\|b\|^2} = \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^{\mathrm{T}} Ay = \lambda_{\min} \left(A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^{+} \right) A \right) \cdot \frac{\|b\|^2}{\|\vartriangle b\|^2} \cdot \hat{x}^{\mathrm{T}} y.$$

Окончательный результат получаем, объединив (5.94) и (5.96).

Теорема 5.8. Пусть задача $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ имеет решение, и оно не является единственным. Тогда условие $x^{**} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^{**},b)$, где $H^{**} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^{*}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)\right)$, эквивалентно условию

$$x^{**} = \underset{x^{*}(a),\ \text{где}\ \|a\|=1}{\arg\min} \left\| \hat{x} - x^{*}(a) \right\|. \qquad (5.97)$$

Доказательство. Пусть задача $Z_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ имеет решение, которое не является единственным. Тогда существует параметрическое семейство векторов $x^*(a)$, описываемое формулой (5.80). Представим вектор $x^*(a)$ как $x^*(a) = \left\|x^*(a)\right\| \cdot \overline{x}^*(a)$, где $\overline{x}^*(a) \in \mathbb{R}^n$ $\left\|\overline{x}^*(a)\right\| = 1$. Указанное представление с учетом (5.52) позволяет записать

$$\min_{a\|a\|=1} \left\|\hat{x} - x^*(a)\right\|^2 = \min_{a\|a\|=1} \left(\left\|\hat{x}\right\|^2 - 2\hat{x}^{\mathrm{T}} x^*(a) + \left\|x^*(a)\right\|^2 \right). \tag{5.98}$$

Но величина $\left\|\hat{x}\right\|$ от a не зависит, и, что нетривиально, в силу леммы 5.17 (соотношение (5.92)) от a не зависит величина $\hat{x}^{\mathrm{T}} x^*(a)$. Но тогда минимум в (5.98) достигается на том же значении a^*, что и в задаче (5.86). Дальнейшие выкладки очевидны.

Следствие. Рассмотрим вектор

$$\widehat{x} = XX^{\mathrm{T}}\hat{x} = P_{columns(X)}\hat{x}, \tag{5.99}$$

где, как и раньше, X - ортогональная матрица, являющаяся базисом линейного подпространства, натянутого на собственные векторы матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A$, соответствующие ее минимальному собственному значению. В силу (5.99) вектор $\widehat{x}$ является ортогональной проекцией вектора $\hat{x}$ в линейное подпространство собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^+\right)A$, соответствующих ее минимальному собственному значению. Опираясь на условие (5.97), можно показать, что вектор $\widehat{x}$ отличается от вектора x^{**}, порождаемого задачей $Z^*_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$ и, как было показано выше, являющегося решением задачи (5.97), только некоторым скалярным множителем

$$\gamma = \frac{\left\|b\right\|^2}{b^{\mathrm{T}} A\widehat{x}}, \tag{5.100}$$

т.е., справедливо условие

$$x^{**} = \gamma\widehat{x}. \tag{5.101}$$

Таким образом, формулы (5.99)-(5.101) предоставляют альтернативный предложенному в теореме 5.7 способ вычисления вектора x^{**}.

6. Использование взвешенной евклидовой нормы в задачах $Z_{total}\left(A, b\right)$ и $Z_{fix\{b\}}\left(A, b\right)$

6.1. Взвешивание с помощью левого и правого умножения на невырожденные матрицы

Рассмотрим следующие две задачи:

$$Z^{LR-weited}_{total}\left(A, b\right):\ \left\|L \cdot \begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot R\right\|_E \to$$

$$\to \inf_{\mathcal{X}(A+H,b+h)\neq\varnothing} \left(= z_{total}^{LR-weited}(A,b)\right) \tag{6.1}$$

и

$$\begin{gathered} Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b):\ \|L\cdot H\cdot R\|_E \to \\ \to \inf_{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing} \left(= z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)\right), \end{gathered} \tag{6.2}$$

где L и R - вещественные квадратные невырожденные матрицы согласованных с H и $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}$ размеров. Матрицы L и R, в частности, могут быть диагональными, но это не обязательно. Как уже было отмечено во введении, использование весов является одним из способов приблизить задачи матричной коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений к возможным потребностям практики.

Невырожденность матриц L и R оказывается весьма важным свойством, которое, как мы сейчас покажем, позволяет после очевидных модификаций использовать для исследования и решения задач $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)$ тот же инструментарий, который использовался для исследования задач $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$. Так, для задач $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)$ оказываются справедливыми приводимые ниже аналоги теорем 4.1 и 4.2. Однако перед их рассмотрением необходимо обосновать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1. Пусть дана несовместная система вида (1.1)-(1.2) такая, что

$$\operatorname{rank} A = n. \tag{6.3}$$

Пусть также задана некоторая одноранговая матрица

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} = p\cdot\begin{bmatrix} q^{\mathrm{T}} & -\eta \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

где $p\in\mathbb{R}^m$, $q\in\mathbb{R}^n$, $\eta\in\mathbb{R}$, такая, что в общем случае

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \notin \mathcal{H}\left(Z_{total}(A,b)\right),$$

но, в то же время,

$$\mathcal{X}(A+H,b+h)\neq\varnothing. \tag{6.5}$$

В частности, пусть существует вектор $x\in\mathbb{R}^n$, принадлежащий множеству $\mathcal{X}(A+H,b+h)$. Тогда множество $\mathcal{X}(A+H,b+h)$ состоит только из вектора x.

Доказательство. Заметим, что в силу несовместности системы (1.1) - (1.2) выполняется условие

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p\neq 0, \\ \begin{bmatrix} q^{\mathrm{T}} & \eta \end{bmatrix}\neq 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Выполним некоторые преобразования условия $x\in\mathcal{X}(A+H,b+h)$:

$$x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b+h) \Leftrightarrow (A+H)x = b+h \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax + p \cdot q^{\mathrm{T}} x = b + p \cdot \eta \Leftrightarrow Ax = b + p\left(\eta - q^{\mathrm{T}} x\right). \tag{6.7}$$

Теперь предположим, что доказываемое утверждение неверно, т.е.,

$$\exists y \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b+h) \big| \; y \neq x. \tag{6.8}$$

Тогда из (6.7) и (6.8) следует совместность системы

$$A(x-y) = p \cdot \left(q^{\mathrm{T}} y - q^{\mathrm{T}} x\right) \Leftrightarrow Az = p\alpha, \tag{6.9}$$

где $z = x - y$, $\alpha = q^{\mathrm{T}} x - q^{\mathrm{T}} y$. Заметим, что $z \neq 0$ в силу условия (6.8). Рассмотрим два случая: (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha \neq 0$. Случай (a). Из (6.9) следует совместность системы

$$Az = 0,$$

которая, в тоже время, не может быть совместной при $z \neq 0$ из-за условия (6.3) (противоречие). Случай (b). Объединим последние уравнения из (6.7) и (6.9), получим, что должна быть совместна система

$$Ax = b + Az\frac{\eta - q^{\mathrm{T}} x}{\alpha} \Leftrightarrow A \cdot \left(x - z\frac{\eta - q^{\mathrm{T}} x}{\alpha}\right) = b \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система $Ax = b$ совместна (противоречие).

Лемма 6.2. Пусть дана несовместная система вида (1.1)-(1.2) такая, что выполняется условие (6.3). Пусть также задана некоторая одноранговая матрица

$$H = p \cdot q^{\mathrm{T}}, \tag{6.10}$$

где $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^n$, такая, что в общем случае

$$H \notin \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{fix\{b\}}(A, b)\right),$$

но, в то же время,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b) \neq \varnothing. \tag{6.11}$$

В частности, пусть существует вектор $x \in \mathbb{R}^n$, принадлежащий множеству $\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b)$. Тогда множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b)$ состоит только из вектора x.

Доказательство. Заметим, что в силу несовместности системы (1.1) - (1.2) выполняется условие

$$H \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 0, \\ q^{\mathrm{T}} \neq 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Выполним некоторые преобразования условия $x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b)$:

$$x \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b) \Leftrightarrow (A+H)x = b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax + p \cdot q^{\mathrm{T}} x = b \Leftrightarrow Ax = b - p \cdot q^{\mathrm{T}} x. \tag{6.13}$$

Теперь предположим, что доказываемое утверждение неверно, т.е.,

$$\exists y \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H, b) \big| \; y \neq x. \tag{6.14}$$

Тогда из (6.13) и (6.14) следует совместность системы (6.9), которая уже рассматривалась при доказательстве леммы 6.1. Так же, как и при доказательстве леммы 6.1, рассмотрим случаи (a) и (b). Случай (a) в настоящей лемме полностью совпадает со случаем (a) в лемме 6.1. Случай (b). Объединим последние уравнения из (6.13) и (6.9), получим, что должна быть совместна система

$$Ax = b - Az\frac{q^{\mathrm{T}}x}{\alpha} \Leftrightarrow A\cdot\left(x + z\frac{q^{\mathrm{T}}x}{\alpha}\right) = b \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система $Ax = b$ совместна (противоречие).

Теорема 6.1. (О существовании и виде решения задачи $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$)

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (1.1)-(1.2). Тогда для оптимального значения целевой функции в задаче $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ справедлива формула

$$z_{total}^{LR-weited}(A,b) = \lambda_{\min}^{1/2}\left(R^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}R\right). \tag{6.15}$$

При этом задача $Z_{total}(A,b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$y^* = Rz^*, \tag{6.16}$$

где

$$z^* \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(R^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\begin{bmatrix}A & -b\end{bmatrix}R\right), \tag{6.17}$$

и такой, что

$$y_{n+1}^* \neq 0. \tag{6.18}$$

При этом

$$\begin{bmatrix}H^* & -h^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-A & b\end{bmatrix}\cdot Rz^*z^{*+}R^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right), \tag{6.19}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^*\right) = x^*, \tag{6.20}$$

где

$$x^* = \frac{1}{y_{n+1}^*}\cdot\begin{bmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Доказательство. Как было показано при доказательстве теоремы 4.1, для любой матрицы $\begin{bmatrix}H & -h\end{bmatrix}$, корректирующей несовместную систему $Ax = b$ должно выполняться условие

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Придадим указанному условию вид, позволяющий использовать теорему 3.1. Для этого сделаем замену переменной

$$z = R^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6.22}$$

и умножим приведенное выше равенства слева на матрицу L. Поскольку L и R - квадратные и невырожденные, получаем эквивалентное равенство вида

$$\begin{bmatrix} \mathsf{H} & -\mathsf{h} \end{bmatrix} \cdot z = L\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} R \cdot z = -L\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} R \cdot z. \tag{6.23}$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения такой матрицы $\begin{bmatrix} \mathsf{H} & -\mathsf{h} \end{bmatrix}$, которая была бы решением системы (6.23) (при фиксированном векторе $z \neq 0$) с минимальной евклидовой нормой. В силу теоремы 3.1 решение указанной задачи существует и имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathsf{H}}(z) & -\hat{\mathsf{h}}(z) \end{bmatrix} &= L\begin{bmatrix} \hat{H}(z) & -\hat{h}(z) \end{bmatrix} R = \\ &= -L\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} R \cdot zz^{+}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

причем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} \hat{\mathsf{H}}(z) & -\hat{\mathsf{h}}(z) \end{bmatrix} \right\|_E &= \left\| L\begin{bmatrix} \hat{H}(z) & -\hat{h}(z) \end{bmatrix} R \right\|_E = \\ &= \frac{\left\| L\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} Rz \right\|}{\|z\|}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Как несложно заметить, матрица $\begin{bmatrix} \hat{H}(z) & -\hat{h}(z) \end{bmatrix}$, фигурирующая в формулах (6.24)- (6.25), является решением системы

$$\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} \cdot y(z) = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot y(z), \tag{6.26}$$

где

$$y(z) = Rz, \tag{6.27}$$

с минимальной взвешенной евклидовой нормой $\left\| L\begin{bmatrix} \hat{H}(z) & -\hat{h}(z) \end{bmatrix} R \right\|_E$. Используя (6.25) и проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что

$$\begin{aligned} z_{total}^{LR-weited}(A,b) &= \min_{z \neq 0} \left\| L\begin{bmatrix} \hat{H}(z) & -\hat{h}(z) \end{bmatrix} R \right\|_E = \\ &= \lambda_{\min}^{1/2}\left(R^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} L \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} R \right), \end{aligned} \tag{6.28}$$

причем минимум в (6.28) достигается на векторе z^{*}, удовлетворяющем условию (6.17). В силу указанного условия $z^* \neq 0$, что гарантирует существование матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathrm{H}^* & -\mathrm{h}^* \end{bmatrix} = -L\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} R \cdot z^* z^{*+}, \tag{6.29}$$

являющейся решением системы (6.23) с минимальной евклидовой нормой, при произвольных $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и невырожденных $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. В то же время, используя (6.23), формально можно построить и матрицу

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot R z^* z^{*+} R^{-1}, \tag{6.30}$$

которая также существует при произвольных $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и невырожденных $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, и для которой выполняется условие

$$\left\| L\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} R \right\|_E = \left\| \begin{bmatrix} \mathrm{H}^* & -\mathrm{h}^* \end{bmatrix} \right\|_E = z_{total}^{LR-weited}\left(A,b\right).$$

Но построенная таким образом матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ не всегда будет корректировать систему (1.1) - (1.2). Сформируем вектор y^* по формуле (4.2) и покажем, что условие (4.3) действительно является необходимым и достаточным для существования решения задачи $Z_{total}^{LR-weited}\left(A,b\right)$.

1. Достаточность. Пусть условие (4.3) выполняется. Тогда существует вектор x^*, определяемый формулой (4.6). Покажем, что в этом случае матрица $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ действительно корректирует систему (1.1)-(1.2) и выполняется условие (4.5). Для этого покажем сначала, что выполняется условие

$$x^* \in \mathcal{X}\left(A + H^*, b + h^*\right). \tag{6.31}$$

Введем блочное представление для матрицы R, и вектора y^*:

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ r \end{bmatrix},\ y^* = \begin{bmatrix} \tilde{y}^* \\ y_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}z^* \\ rz^* \end{bmatrix}, \tag{6.32}$$

где $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times n}$, $r \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\tilde{y}^* \in \mathbb{R}^n$, $y_{n+1}^* \in \mathbb{R}$. Тогда в силу (6.32)

$$x^* = \frac{1}{rz^*}\tilde{R}z^*. \tag{6.33}$$

В силу (6.30) и (6.33) имеем

$$\begin{bmatrix} A + H^* & -b - h^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \left(I - Rz^* z^{*+} R^{-1}\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{rz^*}\tilde{R}z^*. \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{rz^*} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \left(I - Rz^* z^{*+} R^{-1}\right) \cdot \begin{bmatrix} \tilde{R}z^*. \\ rz^* \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{rz^*} \cdot \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \left(I - Rz^* z^{*+} R^{-1} \right) \cdot Rz^* = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(A + H^* \right) x^* = b + h^* \Leftrightarrow x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \left(A + H^*, b + h^* \right).$$

2. Необходимость. Докажем сначала, что для того, чтобы задача $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ имела решение, необходимо, чтобы выполнялось условие (6.3). Предположим противное: пусть задача $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ имеет решение, но $\operatorname{rank} A < n$. В силу последнего условия

$$\exists z \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} z \neq 0, \\ Az = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим вектор $y = R^{-1} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$.. Имеем:

$$\begin{cases} y \neq 0, \\ L\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} Ry = L\begin{bmatrix} Az & -b \cdot 0 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{\min} \left(R^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} L \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} R \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

система $Ax = b$ совместна (противоречие).

Теперь заметим, что для матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, задаваемой формулой (4.4), справедливо представление (6.4), где

$$p = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot Rz^*, \tag{6.34}$$

$$\begin{bmatrix} q^{\mathrm{T}} & -\eta \end{bmatrix} = z^{*+} R^{-1}. \tag{6.35}$$

Пусть $z \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^*, b + h^* \right)$ - некоторый вектор. Тогда, в силу (6.7), оказывается совместной система

$$\begin{gathered} Az = b + \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} Rz^* \cdot \left(\eta - q^{\mathrm{T}} z \right) \Leftrightarrow Az = b - A \cdot \tilde{R}z^* \cdot \beta + b \cdot rz^* \cdot \beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A \cdot \left(z + \tilde{R}z \cdot \beta \right) = b \cdot \left(1 + rz^* \cdot \beta \right). \end{gathered} \tag{6.36}$$

Но последняя система в цепочке эквивалентных совместных систем (6.36) в силу несовместности системы $Ax = b$ может быть совместна только тогда, когда выполняются условия

$$z + \tilde{R}z \cdot \beta = 0$$

и

$$1 + rz^* \cdot \beta = 0. \tag{6.37}$$

Условие (6.37) представляет для нас больший интерес, поскольку в силу (6.32)

$$1 + rz^* \cdot \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta \neq 0, \\ rz^* \neq 0 \Leftrightarrow y_{n+1}^* \neq 0. \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что если задача $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ имеет решение, то при фиксированной оптимальной матрице коррекции $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$ множество решений скорректированной системы $\mathcal{X}\left(A + H^*, b + h^*\right)$ будет состоять из единственного элемента – вектора x^*, задаваемого формулами (4.2)-(6.17) и (4.6). Поскольку выше было показано выполнение условия (6.31), сейчас достаточно показать, что при разрешимости задачи $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ система $\left(A + H^*\right)x = b + h^*$ имеет единственное решение, причем вид этого решения можно уже не конкретизировать. Выше уже говорилось, что для матрицы $\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix}$, задаваемой формулой (4.4), справедливо представление (6.4). При этом условие (6.31) влечет за собой выполнение условия (6.5) леммы 6.1. Кроме того, как было показано выше, разрешимость задачи $Z_{total}^{LR-weited}(A,b)$ влечет выполнение условия (6.3). Таким образом, выполняются все условия, оговоренные в условии леммы 6.1. Следовательно, в силу леммы 6.1, система $\left(A + H^*\right)x = b + h^*$ имеет единственное решение. Из прочих выкладок, приведенных выше, следует, что указанное решение – вектор x^*, задаваемый формулами (4.2)-(6.17) и (4.6).

Теорема 6.2. (О существовании и виде решения задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)$)

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (1.1) - (1.2). Тогда для оптимального значения целевой функции в задаче $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)$ справедлива формула

$$z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b) = \lambda_{\min}^{1/2}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I - \tilde{b}\tilde{b}^+\right)\tilde{A}\right) = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right), \tag{6.38}$$

где

$$\tilde{A} = LAR, \tag{6.39}$$

$$\tilde{b} = Lb. \tag{6.40}$$

Для того чтобы задача имела решение необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$. В этом случае

$$\left(b - ARz^*\right)z^{*+}R^{-1} = H^* \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b)\right), \tag{6.41}$$

$$\mathcal{X}\left(A + H^*, b\right) = x^* = Rz^*, \tag{6.42}$$

где

$$z^{*} = \frac{\tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{b}}{\tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{A}z}\cdot z, \tag{6.43}$$

$$z \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}(I - \tilde{b}\tilde{b}^{+})\tilde{A}\right) \tag{6.44}$$

Доказательство.

1) Обоснование формулы (6.38).

Как было показано при доказательстве теоремы 4.2, для любой матрицы H, корректирующей несовместную систему $Ax = b$ должно выполняться условие

$$Hx = b - Ax.$$

Придадим указанному условию вид, позволяющий использовать теорему 3.1. Для этого сделаем замену переменной

$$z = R^{-1}\cdot x, \tag{6.45}$$

умножим приведенное выше равенства слева на матрицу L и используем (6.39) и (6.40). Поскольку L и R - квадратные и невырожденные, получаем эквивалентное равенство вида

$$\mathrm{H}\cdot z = LHR\cdot z = Lb - LAR\cdot z = \tilde{b} - \tilde{A}z. \tag{6.46}$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения такой матрицы H, которая была бы решением системы (6.46) (при фиксированном векторе $z \neq 0$) с минимальной евклидовой нормой. В силу теоремы 3.1 решение указанной задачи существует и имеет вид

$$\left\|\widehat{\mathrm{H}}(z)\right\|_{E} = \left\|L\widehat{H}(z)R\right\|_{E} = \frac{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}z\right\|^{+}}{\|z\|}. \tag{6.47}$$

причем

$$\left\|\widehat{\mathrm{H}}(z)\right\|_{E} = \left\|L\widehat{H}(z)R\right\|_{E} = \frac{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}z\right\|^{+}}{\|z\|}. \tag{6.48}$$

Заметим, что матрица $\widehat{H}(z)$, фигурирующая в формулах (6.47)-(6.48), является решением системы

$$H\cdot y(z) = b - A\cdot y(z), \tag{6.49}$$

где

$$y(z) = Rz, \tag{6.50}$$

с минимальной взвешенной евклидовой нормой $\left\|L\widehat{H}(z)R\right\|_{E}$. Используя (6.48) и проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 4.2, можно показать, что

$$\begin{aligned} z_{fix\{b\}}^{LR-weited}(A,b) &= \min_{z\neq 0}\left\|L\widehat{H}(z)R\right\|_{E} = \\ &= \lambda_{\min}^{1/2}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I - \tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}\right) = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right), \end{aligned} \tag{6.51}$$

причем минимум в (6.51) достигается на векторе z, удовлетворяющем условию (6.44).

2) Обоснование достаточности существования решения задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ для разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$.

Несложно убедиться, что существование решения задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ действительно является достаточным условием для существования решения задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$. Действительно, пусть задача $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ имеет решение. В силу теоремы 4.2 в этом случае существует вектор

$$z \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+})\tilde{A}\right)\Big|\,\tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{A}z \neq 0.$$

Следовательно, существует вектор z^{*}, задаваемый формулой (4.40), и вектор x^{*}, задаваемый правой частью формулы (4.39). Существует и матрица H^{*}, задаваемая левой частью формулы (4.38). Убедимся, что

$$x^{*} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right). \tag{6.52}$$

Действительно,

$$\left(A+H^{*}\right)x^{*} = ARz^{*} + \left(b-ARz^{*}\right)z^{*+}R^{-1}\cdot Rz^{*} = b.$$

3) Обоснование необходимости существования решения задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$ для разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$.

Пусть задача $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ имеет решение, т.е., существует некоторая матрица H^{*} такая, что

$$\left\|LH^{*}R\right\|_{E} = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right) \neq 0 \Rightarrow \exists x^{*}\Big|\left(A+H^{*}\right)x^{*} \equiv b.$$

Сформируем матрицу H и вектор z следующим образом:

$$\mathrm{H} = LH^{*}R,$$
$$z = R^{-1}\cdot x^{*}.$$

Несложно убедиться, что в отношении H и z справедливы следующие два условия, выполнение которых и означает разрешимость задачи $Z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$. Во-первых,

$$\left\|\mathrm{H}\right\|_{E} = \left\|LH^{*}R\right\|_{E} = z_{fix\{\tilde{b}\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right).$$

Во-вторых,

$$\left(\tilde{A}+\mathrm{H}\right)z = LAR\cdot R^{-1}x^{*} + LH^{*}R\cdot R^{-1}x^{*} =$$
$$= L\left(A+H^{*}\right)x^{*} = Lb = \tilde{b} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\tilde{A}+\mathrm{H},\tilde{b}\right) \neq \varnothing.$$

4) Обоснование того, что в случае разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ при некоторой фиксированной матрице H^{*}, задаваемой формулой (4.38),

множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right)$ состоит из единственного элемента – вектора x^{*}, задаваемого правой частью формулы (4.39) (т.е., обоснование левой части формулы (4.39)).

Поскольку выше было показано выполнение условия (6.52), сейчас достаточно показать, что при разрешимости задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ система $\left(A+H^{*}\right)x=b$ имеет единственное решение, причем вид этого решения можно уже не конкретизировать. Но сначала докажем, что для того, чтобы задача $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ имела решение, необходимо, чтобы выполнялось условие (6.3). Предположим противное: пусть задача $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ имеет решение, но $\operatorname{rank} A<n$. В силу последнего условия

$$\exists z\in\mathbb{R}^{n}\left|\begin{array}{l} z\neq 0,\\ Az=0.\end{array}\right.$$

Рассмотрим вектор $y=R^{-1}z\in\mathbb{R}^{n}$.. Имеем:

$$\begin{cases} \qquad y\neq 0, \\ \tilde{A}y=LARy=LAz=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_{\min}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Ꜧ}^{*}=0\Leftrightarrow H^{*}=0\Leftrightarrow$$

система $Ax=b$ совместна (противоречие).

Выше уже говорилось, что для матрицы H^{*}, задаваемой формулой (4.38) , справедливо представление (6.10). При этом условие (6.52) влечет за собой выполнение условия (6.11) леммы 6.2. Кроме того, как было показано выше, разрешимость задачи $Z_{fix\{b\}}^{LR-weited}\left(A,b\right)$ влечет выполнение условия (6.3). Таким образом, выполняются все условия, оговоренные в условии леммы 6.2. Следовательно, в силу леммы 6.2, система $\left(A+H^{*}\right)x=b$ имеет единственное решение. Из прочих выкладок, приведенных выше, следует, что указанное решение – вектор x^{*}, задаваемый формулами (4.39)-(6.44).

6.2. Взвешивание с произвольными положительными весами

Рассмотрим следующие две задачи:

$$Z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}\left(A,b\right):\ \left\|\mathrm{W}\circ\left[H\quad -h\right]\right\|_{E}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}\left(\mathrm{w}_{ij}h_{ij}\right)^{2}}\rightarrow$$
$$\rightarrow\inf_{\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b+h)\neq\varnothing}\left(=z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}\left(A,b\right)\right) \tag{6.53}$$

и

$$Z_{fix\{b\}}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b):\ \|\mathrm{W}\circ H\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{w}_{ij}h_{ij}\right)^2}\to$$

$$\to\inf_{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing}\left(=z_{fix\{b\}}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b)\right),\tag{6.54}$$

где $\mathrm{W}=\left(\mathrm{w}_{ij}>0\right)$ - весовая матрица с размерами $m\times(n+1)$, как у матрицы $\begin{bmatrix}H & -h\end{bmatrix}$, или с размерами $m\times n$, как у матрицы H, знак "$\circ$" означает перемножение матриц по Адамару.

По-видимому, критерии оптимальности матричной коррекции в форме (6.53) и (6.54) обладают почти максимальной общностью при использовании евклидовой нормы. Более общим является, пожалуй, только случай, когда допускаются нулевые значения элементов матрицы W. Заметим, что в настоящей работе положительность всех элементов матрицы W является существенным условием, от которого не удается отказаться в рамках тех выкладок, которые будут приведены ниже. Поэтому в том случае, когда некоторая прикладная задача может потребовать использования нулевых весов для отдельных элементов матриц H и $\begin{bmatrix}H & -h\end{bmatrix}$, представленные в настоящем параграфе подходы могут дать только приближенные решения задач матричной коррекции, основанные на замене нулевых весовых коэффициентов некоторыми малыми (в контексте прикладной задачи) положительными числами.

Решения задач (6.53)-(6.54) в общем случае, т.е., при произвольной матрице W с положительными элементами, по-видимому, уже не могут быть записаны в терминах собственных векторов каких-либо матриц, построенных с использованием матрицы A и вектора b. В настоящей работе мы не будем исследовать или обосновывать указанное предположение, которое основано на том факте, что произведение матриц по Адамару в общем случае не сводится к классическому матричному умножению. Решение, которое мы предлагаем ниже для проблем (6.53)-(6.54) является сведением указанных проблем к задачам безусловной минимизации, в которых возможно использование производных первого и второго порядка.

Лемма 6.2. Задача $Z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b)$ эквивалентна задаче

$$\|\mathrm{diag}(\omega)\hbar\|_E\to\inf_{X(x)\hbar=b-Ax}=z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b),\tag{6.55}$$

где

$$\omega=\left[\mathrm{w}_{11},\dots,\mathrm{w}_{1,n+1},\mathrm{w}_{21},\dots,\mathrm{w}_{2,n+1},\dots,\mathrm{w}_{m1},\dots,\mathrm{w}_{m,n+1}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\cdot(n+1)},\tag{6.56}$$

$$X(x)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix} & \cdots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix} \end{array}\right]\in\mathbb{R}^{m\times m\cdot(n+1)}, \qquad (6.57)$$

$$\hbar=\left[h_{11},\ldots,-h_{1,n+1},h_{21},\ldots,-h_{2,n+1},\ldots,h_{m1},\ldots,-h_{m,n+1}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\cdot(n+1)}. \qquad (6.58)$$

Доказательство. Непосредственно используя формулы (6.56)-(6.58), убеждаемся, что

$$X(x)\hbar\equiv\begin{bmatrix} H & -h\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow X(x)\hbar=b-Ax\Leftrightarrow\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b+h)\neq\varnothing$$

и

$$\left\|\operatorname{diag}(\omega)\hbar\right\|_E\equiv\left\|\mathrm{W}\circ\begin{bmatrix} H & -h\end{bmatrix}\right\|_E.$$

Лемма 6.3. Задача $Z^{\mathrm{W}\circ H}_{fix\{b\}}(A,b)$ эквивалентна задаче

$$\left\|\operatorname{diag}(\omega)\hbar\right\|_E\to\inf_{X(x)\hbar=b-Ax}=z^{\mathrm{W}\circ H}_{fix\{b\}}(A,b), \qquad (6.59)$$

где

$$\omega=\left[\mathrm{w}_{11},\ldots,\mathrm{w}_{1n},\mathrm{w}_{21},\ldots,\mathrm{w}_{2,n},\ldots,\mathrm{w}_{m1},\ldots,\mathrm{w}_{m,n}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\cdot n}, \qquad (6.60)$$

$$X(x)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} x^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & x^{\mathrm{T}} & \cdots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & x^{\mathrm{T}} \end{array}\right]\in\mathbb{R}^{m\times m\cdot n}, \qquad (6.61)$$

$$\hbar=\left[h_{11},\ldots,h_{1n},h_{21},\ldots,h_{2n},\ldots,h_{m1},\ldots,h_{mn}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\cdot n}. \qquad (6.62)$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 6.2, непосредственно используя формулы (6.56)-(6.58), получаем:

$$X(x)\hbar\equiv Hx\Rightarrow X(x)\hbar=b-Ax\Leftrightarrow\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b)\neq\varnothing$$

и

$$\left\|\operatorname{diag}(\omega)\hbar\right\|_E\equiv\left\|\mathrm{W}\circ H\right\|_E.$$

Теперь рассмотрим задачи (6.55), (6.59) при фиксированном векторе x. В случае задачи (6.59) оговорим также условие $x\neq 0$. Несложно заметить, что при фиксированном x задачи (6.55), (6.59) свелись к задаче нахождения решения $\widehat{\hbar}$ системы

$$X(x)\hbar = b - Ax, \tag{6.63}$$

обладающего минимальной взвешенной евклидовой нормой. Заметим, что матрица $X(x)$ в задаче (6.55) имеет полный строчный ранг при любом векторе x, так как при любом векторе x ее строки взаимно ортогональны. Аналогичное утверждение справедливо в отношении матрицы $X(x)$ в задаче (6.59) при любом $x \neq 0$. Отсюда следует, что в задаче (6.55) система (6.63) совместна при любом векторе x, а в задаче (6.59) - при любом $x \neq 0$. Кроме того, заметим, что в обеих задачах число строк матрицы $X(x)$ меньше числа столбцов, т.е., система (6.63) является недоопределенной и имеет бесконечное множество решений. Покажем, что при этом решение системы (6.63) с минимальной взвешенной евклидовой нормой является единственным. Действительно, в силу положительности всех элементов матрицы W (и, соответственно, вектора ω), существует матрица

$$\mathcal{W} = \left(\operatorname{diag}(\omega)\right)^{-1}, \tag{6.64}$$

диагональные элементы которой положительны. С использованием (6.64) систему (6.63) можно переписать в виде

$$X(x) \cdot \mathcal{W} \cdot \operatorname{diag}(\omega) \cdot \hbar = b - Ax \Leftrightarrow \tilde{X}(x)\tilde{\hbar} = b - Ax, \tag{6.65}$$

где

$$\tilde{X}(x) = X(x) \cdot \mathcal{W}, \tag{6.66}$$

$$\tilde{\hbar} = \operatorname{diag}(\omega) \cdot \hbar. \tag{6.67}$$

Заметим, что поскольку матрица $\mathcal{W}$ является квадратной и невырожденной, в отношении матрицы $\tilde{X}(x)$ справедливы те же замечания, которые были сделаны выше в отношении матрицы $\tilde{X}(x)$. Таким образом, замечания, относящиеся к системе (6.63) оказываются справедливы и в отношении системы (6.65), т.е., для задачи (6.55) указанная система совместна при любом векторе x, а для задачи (6.59) - при любом $x \neq 0$. Предположим, что рассматриваемые условия таковы, что система (6.65) совместна. Тогда, в соответствии с (3.10), ее нормальное решение (т.е., решение, обладающее минимальной евклидовой нормой), существует, является единственным и может быть найдено по формуле

$$\hat{\tilde{\hbar}} = \tilde{X}^{+}(x) \cdot (b - Ax) = \tilde{X}^{+}(x) \cdot r(x), \tag{6.68}$$

где

$$r(x) = \begin{bmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_m(x) \end{bmatrix} = b - Ax \quad - \tag{6.69}$$

вектор невязки системы $Ax = b$ при фиксированном векторе x. В силу (6.67)

$$\|\hat{\tilde{\hbar}}\|_E = \left\|\operatorname{diag}(\omega)\,\hat{\hbar}\right\|_E, \tag{6.70}$$

где

$$\begin{gathered}\hat{\hbar}(x) = \mathcal{W}\hat{\tilde{\hbar}} = \mathcal{W}\tilde{X}^{+}(x)\cdot r(x) = \\ = \left(\operatorname{diag}(\omega)\right)^{-1}\cdot\left(X(x)\cdot\left(\operatorname{diag}(\omega)\right)^{-1}\right)^{+}\cdot r(x).\end{gathered} \tag{6.71}$$

и есть решение задачи (6.55) или (6.59) при фиксированном векторе x Поскольку матрица $\mathcal{W}$ определена однозначно, вектор $\hat{\hbar}(x)$ также является единственным.

Таким образом, мы показали, что при фиксированном векторе x решение задачи (6.55) существует и единственно, решение задачи (6.59) существует и единственно при $x \neq 0$ и вид решения указанных задач определяется формулой (6.71), в которой, в зависимости от рассматриваемой задачи, объекты ω, $X(x)$ и $\hat{\hbar}(x)$ имеют структуру, которая определяется либо формулами (6.56)-(6.58), либо формулами (6.60)-(6.62).

В соответствии с (6.68)-(6.70) введем в рассмотрение функцию

$$f(x) = \|\,\hat{\tilde{\hbar}}\,\|_E^2 = r^{\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+}(x)r(x). \tag{6.72}$$

Тогда, в силу лемм 6.2 и 6.3

$$Z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b) \Leftrightarrow f(x) \to \inf_{x}, \tag{6.73}$$

$$Z_{fix\{b\}}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b) \Leftrightarrow f(x) \to \inf_{x\neq 0}. \tag{6.74}$$

Но задача (6.73) – это задача безусловной n-мерной минимизации. В виду элементарности условия $x \neq 0$ весьма небольшим отклонением от строгости изложения будет причисление к этому классу и задачи (6.74).

Уделим теперь некоторое внимание подходам к решению задач (6.73)-(6.74). Сразу же заметим, что детальное исследование указанных задач и алгоритмов и решения вполне могут быть предметом самостоятельного исследования. В настоящей работе мы только затронем указанную тему, выяснив условия существования частных производных функции $f(x)$ первого и второго порядка и указав явные формулы их вычисления. При этом мы надеемся на полезность упомянутых формул при разработке конкретных вычислительных алгоритмов, использующих информацию о частных производных функции $f(x)$ первого и второго порядка (например, для алгоритма метода Ньютона).

Введем в рассмотрение m вспомогательных функций $q_1(x),\ldots,q_k(x),\ldots,q_m(x)$ по формуле

$$q_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{w}_{k,n+1}^2} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell^2}{\mathrm{w}_{k\ell}^2} \text{ для задачи } Z_{total}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b), \\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell^2}{\mathrm{w}_{k\ell}^2} \text{ для задачи } Z_{fix\{b\}}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b). \end{cases} \tag{6.75}$$

Тогда, как будет показано ниже, справедливы следующие формулы для частных производных функции $f(x)$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -2\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{x_i r_k^2(x)}{\mathrm{w}_{ki}^2 q_k^2(x)} + \frac{r_k(x)a_{ki}}{q_k(x)}\right),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.76}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{8x_i^2 r_k^2(x)}{\mathrm{w}_{ki}^4 q_k^3(x)} + \frac{8x_i r_k(x)a_{ki} - 2r_k^2(x)}{\mathrm{w}_{ki}^2 q_k^2(x)} + \frac{2a_{ki}^2}{q_k(x)}\right), \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.77}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{8x_i x_j r_k^2(x)}{\mathrm{w}_{ki}^2\mathrm{w}_{kj}^2 q_k^3(x)} + \frac{4x_i r_k(x)a_{kj}}{\mathrm{w}_{ki}^2 q_k^2(x)} + \frac{4x_j r_k(x)a_{ki}}{\mathrm{w}_{kj}^2 q_k^2(x)} + \frac{2a_{ki}a_{kj}}{q_k(x)}\right), \quad i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n;\ i \neq j. \tag{6.78}$$

Обоснование формул (6.75)-(6.78) проведем в несколько этапов. При этом будем полагать, что в случае задачи $Z_{fix\{b\}}^{\mathrm{W}\circ H}(A,b)$ выполнено условие $x \neq 0$.

1) Покажем, что

$$\tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+}(x) = \left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}. \tag{6.79}$$

Действительно, поскольку $\tilde{X}(x)$ является матрицей полного строчного ранга и имеет ортогональные строки, матрица $\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)$ является невырожденной диагональной матрицей. Следовательно, существует матрица $\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}$. С другой стороны, известно (см., например, [10]), что для $\tilde{X}(x)$ как для матрицы полного строчного ранга справедливо тождество

$$\tilde{X}(x)\tilde{X}^{+}(x) = I. \tag{6.80}$$

Еще заметим, что матрица $\tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+}(x)$ является квадратной. Но тогда с учетом (6.80) получаем

$$\tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+}(x)\cdot\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x) = \tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\left(\tilde{X}^{+}(x)\tilde{X}(x)\right)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x) =$$

$$= \left(\tilde{X}(x)\cdot P_{rows\left(\tilde{X}(x)\right)}\cdot\tilde{X}^{+}(x)\right)^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{X}(x)\cdot\tilde{X}^{+}(x)\right)^{\mathrm{T}} = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{X}^{+\mathrm{T}}(x)\tilde{X}^{+}(x) = \left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}.$$

Таким образом, тождество (6.79) обосновано, что позволяет нам переписать формулу (6.72) в виде

$$f(x) = r^{\mathrm{T}}(x)\cdot\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}\cdot r(x). \tag{6.81}$$

Из формулы (6.81), в свою очередь, следует, что для $i = 1,2,\ldots,n$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} r^{\mathrm{T}}(x)\cdot\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}\cdot r(x) +$$

$$+r^{\mathrm{T}}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1} \cdot r(x) + r^{\mathrm{T}}(x) \cdot \left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} r(x). \quad (6.82)$$

2) Заметим, что в силу (6.69) для $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r(x) = -x_i \cdot a_i, \quad (6.83)$$

где $a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ - столбец матрицы A с номером i.

3) Покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1} =$$
$$= -2 \cdot \left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1} \cdot \left(x_i \cdot \mathrm{diag}\left(\mathrm{w}_{1i}^{-2}, \dots, \mathrm{w}_{mi}^{-2}\right)\right) \cdot \left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}. \quad (6.84)$$

Для вывода соотношения (6.84) необходимо уточнить используемые обозначения и выписать некоторые стандартные свойства производных от векторно-матричных выражений.

Пусть $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ - некоторая матрица, элементы которой являются функциями некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда запись $\frac{\partial}{\partial x_\ell} A(x)$, где $\ell = 1, 2, \dots, n$, будем трактовать как матрицу, составленную из соответствующих частных производных элементов матрицы $A(x)$, т.е.,

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} A(x) \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} a_{ij}(x)\right) \in \mathbb{R}^{m \times k}.$$

Пусть $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)$ и $B(x) = \left(b_{ij}(x)\right)$ - некоторые матрицы согласованных размеров, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда для $\ell = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(A(x) \cdot B(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} B(x). \quad (6.85)$$

Если матрица $A(x)$ квадратная и невырожденная, то, как известно, существует $A^{-1}(x)$. В этом случае, используя (6.85), можно показать, что для $\ell = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} A^{-1}(x) = -A^{-1}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell} A(x) \cdot A^{-1}(x). \quad (6.86)$$

Действительно, с одной стороны

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(A(x) \cdot A^{-1}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} I = 0,$$

а с другой стороны, в силу (6.85),

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(A(x)\cdot A^{-1}(x)\right)=\frac{\partial}{\partial x_\ell}A(x)\cdot A^{-1}(x)+A(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_\ell}A^{-1}(x).$$

Теперь, когда соотношения (6.85)-(6.86) выписаны, можно применить их к обоснованию формулы (6.84). Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}=\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)\cdot\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}=$$

$$=-\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{X}(x)\cdot\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)+\tilde{X}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)\cdot\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}.$$

Теперь заметим, что в силу (6.56)-(6.57), (6.60)-(6.61), (6.64) и (6.66)

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{X}(x)\cdot\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}X(x)\cdot\mathcal{W}^2\cdot X^{\mathrm{T}}(x)=x_i\cdot\operatorname{diag}\left(\mathrm{w}_{1i}^{-2},\ldots,\mathrm{w}_{mi}^{-2}\right)=\\=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{X}(x)\cdot\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{\mathrm{T}}=\tilde{X}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x),\end{gathered}\qquad(6.87)$$

что завершает обоснование формулы (6.84).

4) Выразим элементы матрицы $\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}$ через функции $q_k(x)$. В силу (6.56)-(6.57), (6.60)-(6.61), (6.64), (6.66) и (6.75)

$$\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)=X(x)\cdot\mathcal{W}^2\cdot X^{\mathrm{T}}(x)=\operatorname{diag}\left(q_1(x),\ldots,q_m(x)\right)\qquad(6.88)$$

С учетом формул (6.88) обращение матрицы $\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)$ не вызывает затруднений:

$$\left(\tilde{X}(x)\tilde{X}^{\mathrm{T}}(x)\right)^{-1}=\operatorname{diag}^{-1}\left(q_1(x),\ldots,q_m(x)\right).\qquad(6.89)$$

5) Дальнейшие шаги, направленные на получение формул (6.76)-(6.78), могут быть проделаны с использованием формул (6.82)-(6.84), (6.89) и привлечением средств компьютерной алгебры.

7. Регуляризация задач матричной коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы

7.1. Nongeneric TLS

Пусть исследуемая несовместная система линейных уравнений $Ax=b$ такова, что задача $Z_{total}(A,b)$ не имеет решения. В зарубежной литературе за подобными задачами закрепилось название "Nongeneric TLS problems". Соответствующего термина в отечественной математической литературе еще нет, хотя можно было бы, например, именовать подобные задачи неразрешимыми (несобственными) задачами обобщенного метода наименьших квадратов.

Поскольку коррекция системы $Ax = b$ в соответствии с обобщенным методом наименьших квадратов невозможна, возникает проблема поиска других методов коррекции или модификации указанного метода. Исторически первой оказалась модификация обобщенного метода наименьших квадратов, получившая название "Nongeneric TLS" (см. [56]). Суть Nongeneric TLS заключается в замене задачи $Z_{total}(A,b)$ задачей $Z_{total}^{NG}(A,b)$, которую можно сформулировать следующим образом:

$$Z_{total}^{NG}(A,b):\ \left\| \begin{matrix} H & -h \end{matrix} \right\|_E \to$$
$$\to \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b+h)\neq\varnothing, \\ \left[\begin{matrix} H & -h \end{matrix}\right]\cdot y=0\ \forall y\in\bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)}} \left(= z_{total}^{NG}(A,b)\right). \tag{7.1}$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использовавшимся при доказательстве теоремы 4.1, несложно получить соотношение

$$z_{total}^{NG}(A,b) = \left(\min_{z\neq 0 \left| \forall y\in\bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right) \Rightarrow z^{\mathrm{T}}y=0 \right.} \frac{z^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]z}{z^{\mathrm{T}}z} \right)^{1/2}. \tag{7.2}$$

Но в силу хорошо известных вариационных свойств собственных значений симметричных матриц (см., например, [9]), минимум в задаче (7.2) достигается на множестве собственных векторов $\mathrm{X}_{\mathrm{prev}}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)$ матрицы $\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]$, соответствующих второму после $\lambda_{\min}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)$ по величине ее собственному значению $\lambda_{\mathrm{prev}}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)$ и равен $\lambda_{\mathrm{prev}}^{1/2}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)$. Заметим, что для описания свойств решения задачи $Z_{total}^{NG}(A,b)$ может быть использована очевидным образом модифицированная теорема 4.1:

Теорема 7.1. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (1.1)-(1.2). Тогда для оптимального значения целевой функции в задаче $Z_{total}^{NG}(A,b)$ справедлива формула

$$z_{total}^{NG}(A,b) = \lambda_{\mathrm{prev}}^{1/2}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right). \tag{7.3}$$

При этом задача $Z_{total}^{NG}(A,b)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$y^* \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right) \tag{7.4}$$

такой, что

$$y_{n+1}^{*} \neq 0. \tag{7.5}$$

При этом

$$\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{*} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^{*} \\ 1 \end{bmatrix}^{+} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}^{NG}(A,b)\right), \tag{7.6}$$

$$x^{*} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^{*}, b + h^{*}\right), \tag{7.7}$$

где

$$x^{*} = \frac{1}{y_{n+1}^{*}} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{*} \\ \vdots \\ y_n^{*} \end{bmatrix}. \tag{7.8}$$

Замечание 1. В общем случае решение задачи $Z_{total}^{NG}(A,b)$ (если оно существует) не является единственным, что легко проверяется на примерах. Кроме того, в общем случае при выборе некоторой матрицы $\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix}$ вектор x^{*} не является единственным элементом множества $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^{*}, b + h^{*}\right)$. Проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что

$$x^{*} = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^{*}, b + h^{*}\right) \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n. \tag{7.9}$$

В противном случае множеству $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A + H^{*}, b + h^{*}\right)$ принадлежит любой вектор $y = x^{*} + \alpha z$, где $z \in \overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$, α - произвольное число.

Замечание 2. В общем случае задача $Z_{total}^{NG}(A,b)$ может оказаться неразрешимой также как и задача $Z_{total}(A,b)$, что также легко проверяется на примерах**.** Тогда можно рассмотреть задачу

$$\begin{gathered} Z_{total}^{NG'}(A,b): \ \left\| \begin{matrix} H & -h \end{matrix} \right\|_E \to \\ \to \inf_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b+h)\neq\varnothing, \\ \left[\begin{matrix} H & -h \end{matrix}\right]\cdot y=0 \ \forall y\in\overline{\mathbf{X}}_{\min}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right), \\ \left[\begin{matrix} H & -h \end{matrix}\right]\cdot y=0 \ \forall y\in\overline{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\left[\begin{matrix} A & -b \end{matrix}\right]\right)}} \left(= z_{total}^{NG'}(A,b)\right). \end{gathered} \tag{7.10}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, несложно показать, что при разрешимости задачи (7.10) минимум будет достигаться на множестве собственных векторов матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующих третьему по величине собственному значению указанной матрицы. При этом описание необходимых и достаточных условий существования решения указанной задачи, а также вида решения может быть получено путем соответствующей модификации теоремы 7.1. Соответственно остается справедливым замечание 1, а при невыполнении правой части условия (7.9) множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*, b+h^*\right)$ может быть представлено как параметрическое семейство векторов вида

$$y = x^* + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2\,,$$

где $z_1 \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$, $z_2 \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$, α_1, α_2 - произвольные числа.

Продолжая рассуждения, аналогичные приведенным в замечании 2, можно перейти к семейству задач, получаемых из (7.10) последовательным наращиванием множеств собственных векторов матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ (соответствующих взятым в порядке возрастания ее собственным числам), которым должны быть ортогональны строки матрицы $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}$. При этом описание необходимых и достаточных условий существования решения указанных задач, а также вида их решения может быть получено путем соответствующих модификаций теоремы 7.1. Соответственно остается справедливым замечание 1, а при невыполнении правой части условия (7.9) множество $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^*, b+h^*\right)$ может быть представлено как параметрическое семейство векторов вида

$$y = x^* + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_k z_k,$$

где

$$z_1 \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

$$z_2 \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

$$\cdots$$

$$z_k \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, \lambda_{p-k+1}\right),$$

$$\lambda_{\min} < \lambda_{\mathrm{prev}} < \ldots < \lambda_{p-k+1} < \ldots < \lambda_{\max},$$

$$\lambda_{\min}, \lambda_{\mathrm{prev}}, \ldots, \lambda_{p-k+1}, \ldots, \lambda_{\max} \in \mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

p - число различных собственных значений матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - произвольные числа.

Заметим, что решения задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$, где

$$Z_{total}^{NG^*}(A,b):\ \left\| H \quad -h \right\|_E \to$$

$$\rightarrow \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b+h)\neq\varnothing, \\ \left[H \quad -h\right]\cdot y=0\ \forall y\notin \bar{\mathbf{X}}_{\max}\left(\left[A \quad -b\right]^{\mathrm{T}}\left[A \quad -b\right]\right)}} \left(= z_{total}^{NG^*}(A,b)\right), \tag{7.11}$$

а $\bar{\mathbf{X}}_{\max}\left(\left[A \quad -b\right]^{\mathrm{T}}\left[A \quad -b\right]\right)$ - множество нормированных собственных векторов матрицы $\left[A \quad -b\right]^{\mathrm{T}}\left[A \quad -b\right]$, соответствующих ее максимальному собственному значению, могут формально существовать, но быть бессодержательными в контексте той прикладной задачи, которая потребовала коррекции системы линейных алгебраических уравнений (1.1) - (1.2). Пусть, например, среди задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ имеет решение только задача $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$, и это решение – некоторая матрица $\left[H^* \quad -h^*\right]$. "Коррекцию" системы (1.1)-(1.2) с помощью матрицы $\left[H^* \quad -h^*\right]$ вряд ли можно считать оптимальной, поскольку для любой другой матрицы коррекции $\left[H \quad -h\right]$, отличной от $\left[H^* \quad -h^*\right]$, будет справедливо условие $\left\|\left[H \quad -h\right]\right\|_E < \left\|\left[H^* \quad -h^*\right]\right\|_E$.

Заметим, что проблема содержательности матричной коррекции с помощью задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ актуальна не только для приведенного выше случая. Указанная проблема достаточно серьезна и может служить предметом отдельного исследования, выходящего за рамки настоящей работы. Мы сделаем попытку слегка ее затронуть, указав в приводимой ниже лемме и соответствующем следствии некоторый класс несовместных систем линейных алгебраических уравнений, коррекция которых в рамках задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ приводит к весьма своеобразным результатам, возможно являющимся аномальными в контексте некоторой прикладной задачи.

Лемма 7.1. Пусть система линейных алгебраических уравнений (1.1) - (1.2) такова, что выполняется условия

$$A^{\mathrm{T}}b = 0, \tag{7.12}$$

$$b^{\mathrm{T}}b \notin \mathbf{L}\left(A^{\mathrm{T}}A\right). \tag{7.13}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

$$b^{\mathrm{T}}b \in \mathbf{L}\left(\left[A \quad -b\right]^{\mathrm{T}}\left[A \quad -b\right]\right), \tag{7.14}$$

$$\mathrm{k}\left(b^{\mathrm{T}}b, \left[A \quad -b\right]^{\mathrm{T}}\left[A \quad -b\right]\right) = 1, \tag{7.15}$$

$$\bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, b^{\mathrm{T}}b\right) = \pm e_{n+1}, \tag{7.16}$$

где e_{n+1} - последний столбец единичной матрицы порядка $n+1$,

$$\begin{gathered}\forall\lambda \in \mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)\Big|\, \lambda \neq b^{\mathrm{T}}b,\\ \forall x \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, \lambda\right) \Rightarrow x_{n+1} = 0.\end{gathered} \tag{7.17}$$

Доказательство. Выпишем блочное представление матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ с учетом условия (7.12):

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}A & 0 \\ 0 & b^{\mathrm{T}}b \end{bmatrix}. \tag{7.18}$$

Используя (7.18), убеждаемся в справедливости условия (7.14), а также в том, что $\pm e_{n+1} \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, b^{\mathrm{T}}b\right)$. Теперь любому вектору y из множества $\bar{\mathbf{X}}\left(A^{\mathrm{T}}A, \lambda\right)$, где $\lambda \in \mathbf{L}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, поставим в соответствие вектор $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ по следующему правилу:

$$x = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой с использованием (7.18) несложно убедиться, что

$$\forall\lambda \in \mathbf{L}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \Rightarrow \lambda \in \mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right), \tag{7.19}$$

$$\forall y \in \bar{\mathbf{X}}\left(A^{\mathrm{T}}A, \lambda\right) \Rightarrow x \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, \lambda\right). \tag{7.20}$$

Теперь заметим, что количество элементов множества $\mathbf{L}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$, подсчитанное с учетом кратности элементов, не может превосходить больше чем на единицу соответствующее количество элементов множества $\mathbf{L}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, также подсчитанное с учетом кратности элементов. Отсюда, с учетом (7.14) и (7.19), получаем (7.15). Теперь соотношение (7.17) можно обосновать "от противного". Действительно, пусть

$$\exists x \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, \lambda \neq b^{\mathrm{T}}b\right) \Rightarrow x_{n+1} \neq 0.$$

Поскольку $\lambda \neq b^{\mathrm{T}}b$, вектор x должен быть ортогонален линейному подпространству векторов $\bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, b^{\mathrm{T}}b\right)$, т.е., ортогонален вектору e_{n+1}. Но в силу условия $x_{n+1} \neq 0$ это невозможно (противоречие).

Следствие. При выполнении условий (7.12)-(7.13) только одна из задач в цепочке $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ формально будет иметь решение. Указанное решение имеет вид

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}, \tag{7.21}$$

система (1.1)-(1.2) после коррекции становится однородной, и, в зависимости от ранга матрицы A, имеет либо только тривиальное решение ($\operatorname{rank} A = n$), либо (при $\operatorname{rank} A < n$) параметрическое семейство решений вида

$$P_{rows(A)}^{\perp} \vartriangle x,$$

где $\vartriangle x \in \mathbb{R}^n$ - произвольный вектор.

Замечание. Если условие (7.12) выполняется, а условие (7.13) – нет, то по-прежнему будет иметь решение только одна из задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$, однако указанное решение может быть представлено в виде параметрического семейства матриц (с одной и той же евклидовой нормой)

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} x x^{\mathrm{T}}, \tag{7.22}$$

где

$$x \in \bar{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}, b^{\mathrm{T}} b \right). \tag{7.23}$$

При этом матрица, описываемая формулой (7.21), принадлежит указанному семейству и ей соответствует минимальное по норме (имеющее нулевую норму) нормальное решение скорректированной системы (1.1). Но семейству (7.22)-(7.23) принадлежат также матрицы, применение которых к коррекции системы (1.1)-(1.2) приводит к сколь угодно большому по норме нормальному решению скорректированной системы, что эквивалентно сохранению несовместности "скорректированной" системы. Таким образом, соответствующим выбором матрицы из семейства (7.22)-(7.23) можно добиться, чтобы нормальное решение скорректированной системы имело любую заданную норму.

Перейдем теперь к исследованию возможных способов обобщения задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ на тот случай, когда сама задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения. Очевидно, что при отсутствии решений у задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ можно действовать по аналогии с рассуждениями, приведенными выше для случая отсутствия решения у задачи $Z_{total}(A,b)$. Формальное следование аналогии с постановкой (7.1) приводит к задаче

$$Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b):\ \|H\|_E \to \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing,\\ H\cdot y=0\ \forall y\in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)}} \quad \left(= z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)\right). \tag{7.24}$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, использовавшимся при доказательстве теоремы 4.2, можно получить соотношение

$$z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)=\left(\min_{z\neq 0\left|\forall y\in\bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)\Rightarrow z^{\mathrm{T}}y=0\right.}\frac{z^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)z}{z^{\mathrm{T}}z}\right)^{1/2}. \qquad (7.25)$$

По-прежнему опираясь на вариационные свойства собственных значений симметричных матриц, можно заключить, что минимум в задаче (7.25) достигается на множестве собственных векторов $\mathrm{X}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)$ матрицы $A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A$, соответствующих второму после $\lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)$ по величине ее собственному значению $\lambda_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)$ и равен $\lambda^{1/2}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)$. Для описания необходимых и достаточных условий существования решения задачи $Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$, а также вида ее решения может быть использована очевидным образом модифицированная теорема 4.2:

Теорема 7.2. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида (1.1)-(1.2). Тогда для оптимального значения целевой функции в задаче $Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ справедлива формула

$$z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)=\lambda^{1/2}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right). \qquad (7.26)$$

При этом задача $Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует вектор

$$y^{*}\in\bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right) \qquad (7.27)$$

такой, что

$$b^{\mathrm{T}}Ay^{*}\neq 0. \qquad (7.28)$$

При этом

$$H^{*}=\left(b-Ax^{*}\right)x^{*+}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)\right), \qquad (7.29)$$

$$x^{*}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right), \qquad (7.30)$$

где

$$x^{*}=\frac{b^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}Ay^{*}}\cdot y^{*}. \qquad (7.31)$$

Замечание 1. Пусть решение задачи $Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$ существует. Тогда в общем случае оно не является единственным, что можно показать на примерах. Пусть H^{*} - некоторое решение задачи $Z^{NG}_{fix\{b\}}\left(A,b\right)$. Тогда в общем случае вектор x^{*} не является единственным элементом множества $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right)$. Проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 4.2, можно показать, что

$$x^{*}=\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right)\Leftrightarrow \operatorname{rank}\,A=n. \qquad (7.32)$$

В противном случае множеству $\boldsymbol{\mathcal{X}}\left(A+H^{*},b\right)$ принадлежит любой вектор

$y = x^* + \alpha z$, где $z \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A\right)$, α - произвольное число.

Замечание 2. В общем случае задача $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$ может оказаться неразрешимой, как и задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, что можно показать на примерах. Применяя схему рассуждений, аналогичную той, которая использовалась выше при рассмотрении неразрешимости задачи $Z_{total}^{NG}(A,b)$, можно рассмотреть задачу

$$Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b): \ \|H\|_E \to$$
$$\to \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing, \\ H\cdot y=0 \ \forall y\in\bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^+)A\right), \\ H\cdot y=0 \ \forall y\in\bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^+)A\right)}} \left(= z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)\right), \tag{7.33}$$

а также другие задачи, получаемые из (7.33) последовательным наращиванием множеств собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A$ (соответствующих взятым в порядке возрастания ее собственным числам), которым должны быть ортогональны строки матрицы H. При этом описание необходимых и достаточных условий существования решения указанных задач, а также вида их решения может быть получено путем соответствующих модификаций теоремы 7.2. Соответственно остается справедливым замечание 3, а при невыполнении правой части условия (7.32) множество $\mathcal{X}\left(A + H^*, b\right)$ может быть представлено как параметрическое семейство векторов вида

$$y = x^* + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_k z_k,$$

где

$$z_1 \in \bar{\mathbf{X}}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A\right),$$
$$z_2 \in \bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{prev}}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A\right),$$
$$\ldots$$
$$z_k \in \bar{\mathbf{X}}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A, \lambda_{p-k+1}\right),$$
$$\lambda_{\min} < \lambda_{\mathrm{prev}} < \ldots < \lambda_{p-k+1} < \ldots < \lambda_{\max},$$
$$\lambda_{\min}, \lambda_{\mathrm{prev}}, \ldots, \lambda_{p-k+1}, \ldots, \lambda_{\max} \in \mathbf{L}\left(A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A\right),$$

p - число различных собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}(I - bb^+)A$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - произвольные числа.

Аналогично последовательности задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$, может быть рассмотрена последовательность задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$,…, $Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b)$, в которой

$$Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b): \ \|H\|_E \to$$

$$\to \inf_{\substack{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing,\\ H\cdot y=0\ \forall y\notin\bar{\mathbf{X}}_{\max}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)}} \left(= z_{total}^{NG^{*}}(A,b)\right), \tag{7.34}$$

где $\bar{\mathbf{X}}_{\max}\left(A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A\right)$ - множество нормированных собственных векторов матрицы $A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A$, соответствующих ее максимальному собственному значению. Заметим, что несовместные системы линейных алгебраических уравнений, которые не могут быть скорректированы с помощью задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$, ..., $Z_{fix\{b\}}^{NG^{*}}(A,b)$, существуют. Описание подобных систем дают приводимые ниже лемма и следствие.

Лемма 7.2. Пусть система линейных алгебраических уравнений (1.1)-(1.2) такова, что выполняется условие (7.12). Тогда для любого собственного вектора y матрицы $A^{\mathrm{T}}(I-bb^{+})A$ справедливо условие

$$b^{\mathrm{T}}Ay = 0.$$

Следствие. При выполнении условия (7.12) ни одна из задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$, ..., $Z_{fix\{b\}}^{NG^{*}}(A,b)$ не имеет решения.

7.2. Связи между Nongeneric TLS, регуляризацией по Тихонову нормального псевдорешения несовместной системы линейных алгебраических уравнений и регуляризованным обобщенным методом наименьших квадратов

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (1.1). Как известно, (см., например, [25], [30]), в простейшем случае регуляризация по Тихонову указанной системы заключается в ее замене на систему вида

$$\left(A^{\mathrm{T}}A+\mu I\right)x = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.35}$$

где $\mu \geq 0$ - параметр регуляризации. При этом, как правило, используются значения $\mu > 0$, при которых, как несложно показать с использованием, например, сингулярного разложения матрицы A, матрица $A^{\mathrm{T}}A+\mu I$ оказывается невырожденной и система (7.35) имеет единственное решение

$$x_{\mu} = \left(A^{\mathrm{T}}A+\mu I\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}b. \tag{7.36}$$

Заметим, что если исходная система (1.1) несовместна, то вектор x_{μ} фактически представляет собой регуляризованное нормальное псевдорешение системы (1.1).

Заметим также, что существуют и более "продвинутые" методы регуляризации системы (1.1) (см., например, [28]), которые используют переход к регуляризованной системе алгебраических уравнений вида

$$\left(A^{\mathrm{T}}A+\mu B^{\mathrm{T}}B\right)x = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.37}$$

где $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - некоторая регуляризующая матрица. При $\mu \to 0$ системы (7.35) и (7.37) превращаются в так называемую систему нормальных уравнений, связанную с системой (1.1):

$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b. \qquad (7.38)$$

Как известно, (см., например, [8], [30]) указанная система разрешима даже при несовместности системы (1.1), причем множество решений системы (7.38) совпадает с множеством МНК-решений системы (1.1) $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(A,b)$, описываемым формулой (3.11). Заметим также, что если матрица B такова, что при $\mu > 0$ обратная матрица к $A^{\mathrm{T}}A + \mu B^{\mathrm{T}}B$ существует, то

$$\lim_{\mu\to 0}\left(A^{\mathrm{T}}A + \mu I\right)^{-1} = \lim_{\mu\to 0}\left(A^{\mathrm{T}}A + \mu B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1} = A^{+},$$

и, как следствие, и решение уравнения (7.35) и решение уравнения (7.37) удовлетворяют условию

$$\lim_{\mu\to 0} x_{\mu} = A^{+}b = \hat{x}. \qquad (7.39)$$

Обратимся теперь к проблеме, представляющей непосредственный интерес в контексте настоящей работы, - проблеме регуляризации задачи $Z_{total}(A,b)$. Так сложилось, что одними из первых появились работы (см., например, [37], [40],[48]), в которых в качестве метода регуляризации предлагалась регуляризация задачи $Z_{total}(A,b)$ по Тихонову. В простейшем случае регуляризованная по Тихонову задача $Z_{total}(A,b)$ может быть записана как

$$Z_{total}^{REG(\delta)}(A,b):\ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\forall x\in\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b+h)\Rightarrow\|x\|\le\delta}\left(= z_{total}^{REG(\delta)}(A,b)\right), \qquad (7.40)$$

где $\delta > 0$ - параметр регуляризации. Большая общность при регуляризации задачи $Z_{total}(A,b)$ может быть достигнута в задаче $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$ при замене условия $\|x\| \le \delta$ на условие

$$\|Lx\| \le \delta, \qquad (7.41)$$

где $L \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ - некоторая матрица, а само выражение $\|Lx\|$ в общем случае является векторной полунормой:

$$Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b):\ \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|_E \to \inf_{\forall x\in\boldsymbol{\mathcal{X}}(A+H,b+h)\Rightarrow\|Lx\|\le\delta}\left(= z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)\right). \qquad (7.42)$$

Задачу $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, также как и задачу $Z_{total}(A,b)$ можно решать в два этапа: на первом этапе при некотором фиксированном векторе x в соответствии с теоремой 3.1 строится корректирующая систему (1.1)-(1.2) матрица

$$\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix} = (b - Ax)\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{+}, \qquad (7.43)$$

обладающая минимальной евклидовой нормой такой, что

$$\left\|\begin{bmatrix} \widehat{H}(x) & -\widehat{h}(x) \end{bmatrix}\right\|_E^2 = \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2 + 1} = \frac{b^{\mathrm{T}}b - 2b^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x + 1} = F(x), \qquad (7.44)$$

а на втором этапе с учетом ограничения (7.41) решается задача

$$F(x) \to \min_{x|\|Lx\|\le\delta}. \tag{7.45}$$

Если x^* - некоторое решение задачи (7.44) - (7.45), то, в соответствии с (7.43),

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(b - Ax^*\right)\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}^+ \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)\right) \tag{7.46}$$

и

$$x^* \in \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^*, b + h^*).$$

Поскольку задача (7.44)-(7.45) является задачей условной минимизации, ее исследование удобно проводить с использованием метода множителей Лагранжа. Соответствующая функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(x,\lambda) = F(x) + \lambda\left(\|Lx\|^2 - \delta^2\right). \tag{7.47}$$

В свою очередь, с учетом (7.47), условия Куна-Таккера для задачи (7.44)-(7.45), которые в силу невыпуклости $F(x)$ являются лишь необходимыми условиями условного минимума, принимают вид:

$$\left(A^{\mathrm{T}}A + \lambda\left(x^{\mathrm{T}}x + 1\right)L^{\mathrm{T}}L - F(x)I\right)x = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.48}$$

$$x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx \le \delta^2, \tag{7.49}$$

$$\lambda\left(x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx - \delta^2\right) = 0, \tag{7.50}$$

$$\lambda \ge 0. \tag{7.51}$$

Заметим, что система линейных алгебраических уравнений (7.48) очень похожа на систему линейных алгебраических уравнений (7.37). Формально система (7.48) приводится к виду (7.37), если положить

$$B = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\lambda\left(x^{\mathrm{T}}x + 1\right)}{F(x)}\right)^{1/2} \cdot L \\ \sqrt{-1} \cdot I_n \end{bmatrix},\ \mu = F(x).$$

В то же время в данном случае, в отличие от регуляризации системы нормальных уравнений, уже не гарантировано выполнение условия $\mu \ge 0$.

Пусть $\hat{\lambda}$ и $\hat{x}$ характеризуют некоторое (произвольное) решение системы (7.48)-(7.51), а λ^* и x^* - такие решения системы (7.48)-(7.51), что

$$x^* \in \operatorname*{Arg\,min}_{\|Lx\|\le\delta} F(x).$$

Рассмотрим теперь два случая. 1) Пусть в точке $x_{TLS} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(A + H^*, b + h^*)$, где $\begin{bmatrix} H^* & h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right)$, ограничение (7.41) оказывается выполненным. Тогда, как несложно показать,

$$\lambda^* = 0,\ x^* = x_{TLS},$$

$$F\left(x^*\right) = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)\right) \equiv \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right).$$

Кроме того, заметим, что в силу (5.2) имеет место равенство

$$b^{\mathrm{T}}(b - Ax^*) = F(x^*). \qquad (7.52)$$

2) Пусть $\forall \begin{bmatrix} H^* & h^* \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\left(Z_{total}(A,b)\right) \Rightarrow \left\| Lx_{TLS} \right\| > \delta$. Тогда из (7.48)-(7.51) следует, что $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{x}$ должны удовлетворять условиям

$$\left(A^{\mathrm{T}}A + \widehat{\lambda}\left(\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x} + 1\right)L^{\mathrm{T}}L - F(\widehat{x})I\right)\widehat{x} = A^{\mathrm{T}}b, \qquad (7.53)$$

$$\widehat{x}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\widehat{x} = \delta^2, \qquad (7.54)$$

$$\widehat{\lambda} \geq 0. \qquad (7.55)$$

Нахождение λ^* и x^* сводится к минимизации $F(\widehat{x})$ с учетом условий (7.53)-(7.55). При этом оказывается, что при соответствующем выборе параметров L и δ задача $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$ сводится к задаче $Z_{total}^{NG}(A,b)$, т.е., другими словами, задача $Z_{total}^{NG}(A,b)$ является частным случаем задачи $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$. Для того, чтобы показать это, временно откажемся от условия (7.41) и будем решать задачу

$$F(x) \to \min_x. \qquad (7.56)$$

Казалось бы, мы не получаем ничего нового, поскольку с задачи (4.12), очень близкой по форме к задаче (7.56), и начиналось исследование задачи $Z_{total}(A,b)$ в теореме 4.1. Поэтому уточним постановку задачи (7.56) и определим, что теперь, в отличие от (4.12), мы ищем наиболее глубокий локальный минимум целевой функции вместо ее нижней грани. Поскольку $F(x)$ из (7.56) непрерывна и дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$, указанная задача сводится к поиску стационарной точки $F(x)$ с наименьшим значением целевой функции, что можно сделать, используя классические для задачи безусловной минимизации необходимые условия существования минимума в виде равенства нулю градиента функции $F(x)$. В силу (7.44)

$$\nabla F(x) = \frac{2}{x^{\mathrm{T}}x + 1}\left(A^{\mathrm{T}}Ax - A^{\mathrm{T}}b - x \cdot F(x)\right),$$

откуда, в свою очередь, получаем, что

$$\nabla F(x) = 0 \Leftrightarrow \left(A^{\mathrm{T}}Ax - F(x) \cdot I\right)x = A^{\mathrm{T}}b.$$

Умножив левую и правую часть записанной выше системы слева на x^{T} и, используя (7.44), получаем дополнительное соотношение, характеризующее величину $F(x)$ в некоторой стационарной точке:

$$F(x) = b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}Ax.$$

Таким образом, задача (7.56) может быть переписана в виде

$$F(x) \to \min, \tag{7.57}$$

$$\left(A^{\mathrm{T}} A - F(x) \cdot I\right) x = A^{\mathrm{T}} b, \tag{7.58}$$

$$F(x) = b^{\mathrm{T}} b - b^{\mathrm{T}} A x. \tag{7.59}$$

Теперь заметим, что условия (7.58)-(7.59) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = F(x) \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.60}$$

Таким образом, вектор x, являющийся решением системы (7.58)-(7.59), оказывается составленным из первых n компонент некоторого собственного вектора z матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, такого, что $z_{n+1} = 1$. При этом $F(x)$ - собственное значение матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, которому соответствует вектор z. Но левую и правую часть системы (7.60) можно умножить на произвольный ненулевой скалярный множитель, из чего следует, что минимизация $F(x)$ при ограничениях (7.58)-(7.59) сводится к поиску наименьшего по величине собственного значения λ^* матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, для которого существует соответствующий собственный вектор $z^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что $z^*_{n+1} \neq 0$.

Заметим, что используя приведенные выше рассуждения, можно показать, что любая стационарная точка в задаче (7.56) представляет собой с (точностью до ненулевого скалярного множителя) вектор, составленный и первых n компонент некоторого собственного вектора матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$ с ненулевой $n+1$-й компонентой.

Очевидно также, что если у задачи $Z_{total}(A,b)$ нет решения, то $\lambda^* > \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right)$. Но собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям, лежат во взаимно ортогональных линейных подпространствах. Следовательно, вектор z^* будет ортогонален любому собственному вектору матрицы $\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}$, соответствующему любому ее собственному значению $\lambda < \lambda^*$. Тем самым мы показали, что задача (7.56) эквивалентна какой-либо из задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b)$.

Вернемся теперь к задаче $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$. Положим

$$L \equiv I, \tag{7.61}$$

(т.е., фактически перейдем к задаче $Z_{total}^{REG(\delta)}(A,b)$) и выразим $\widehat{\lambda}$ через $\widehat{x}$ и δ из условий (7.53)-(7.55). Для этого умножим обе части равенства (7.53) слева на $\widehat{x}^{\mathrm{T}}$ и используем (7.44) и (7.54). Получаем

$$\widehat{\lambda} = \frac{b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}A\widehat{x} - F(\widehat{x})}{\delta^2(\delta^2+1)}. \tag{7.62}$$

В свою очередь, формулы (7.61)-(7.62) позволяют переписать условия (7.53)-(7.55) в виде

$$\left(A^{\mathrm{T}}A + \left(\frac{b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}A\widehat{x} - F(\widehat{x})}{\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x}} - F(\widehat{x})\right)\cdot I\right)\widehat{x} = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.63}$$

$$\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x} = \delta^2, \tag{7.64}$$

$$F(\widehat{x}) \le b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}A\widehat{x}. \tag{7.65}$$

Теперь предположим, что хотя бы одна из задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ имеет решение – некоторый вектор x^*. Положим $\delta^* = \|x^*\|$ и рассмотрим задачу $Z_{total}^{REG(\delta^*)}(A,b)$. В силу сделанных предположений задача $Z_{total}^{REG(\delta^*)}(A,b)$ фактически оказывается задачей безусловной минимизации. При этом условия (7.63)-(7.65) упрощаются, и, в частности, могут быть приведены к виду (7.58)-(7.59).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 7.3. Если хотя бы одна из задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ имеет решение, то оно может быть получено как решение задачи $Z_{total}^{REG(\delta)}(A,b)$ при соответствующем выборе регуляризующего параметра δ.

Замечание. Можно показать, что утверждение теоремы 7.3 обобщается и на задачи из класса $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, если матрица L такова, что для любого вектора x^*, являющегося решением задачи $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, справедливо условие

$$\|x^*\| \le \delta_L < +\infty.$$

При этом требования к матрице L могут быть и более слабыми, так как фактически необходимо лишь, чтобы множества решений задач $Z_{total}(A,b)$, $Z_{total}^{NG}(A,b)$, $Z_{total}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{total}^{NG^*}(A,b)$ с одной стороны, и задачи $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$ - с другой стороны, имели непустое пересечение.

Результаты, аналогичные теореме 7.3, могут быть получены при рассмотрении регуляризации по Тихонову задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$.

Пусть

$$Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b):\ \|H\|_E \to \inf_{\forall x\in\mathcal{X}(A+H,b)\Rightarrow\|Lx\|\le\delta}\left(=z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)\right), \tag{7.66}$$

где $\delta > 0$ - параметр регуляризации, $L \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ - некоторая матрица, а само выражение $\|Lx\|$ в общем случае является векторной полунормой. Так же, как и задачу $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, будем решать задачу $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)$ в два этапа: на первом этапе при некотором фиксированном векторе x в соответствии с теоремой 3.1 построим корректирующую систему (1.1) - (1.2) матрицу

$$\widehat{H}(x) = (b - Ax)\,x^{+}, \tag{7.67}$$

обладающую минимальной евклидовой нормой

$$\left\|\widehat{H}(x)\right\|_E^2 = \frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{b^{\mathrm{T}}b - 2b^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x} = F(x), \tag{7.68}$$

а на втором этапе с учетом ограничения (7.41) и формулы (7.68) будем решать задачу (7.45). Обратный переход от задачи (7.68),(7.45) очевидно, может быть осуществлен следующим образом: если x^* - некоторое решение задачи (7.68) и (7.45), то, в соответствии с (7.67),

$$H^* = \left(b - Ax^*\right)x^{*+} \in \mathcal{H}\left(Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)\right)$$

и

$$x^* \in \mathcal{X}(A + H^*, b).$$

Перейдем теперь к решению задачи (7.68),(7.45). Так же, как и при решении задачи (7.44)-(7.45), воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (7.68),(7.45) по-прежнему может быть записана в виде (7.47). При этом условия Куна-Таккера, которые в силу невыпуклости $F(x)$ представляют собой необходимые условия условного минимума, принимают вид равенства

$$\left(A^{\mathrm{T}}A + \lambda\cdot x^{\mathrm{T}}x\cdot L^{\mathrm{T}}L - F(x)I\right)x = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.69}$$

дополненного условиями (7.49)-(7.55).

Теперь, по аналогии с рассуждениями, проделанными при анализе $Z_{total}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, временно откажемся от условия (7.41) и рассмотрим "более простую" задачу вида

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{H}(x)\right\|_E^2 &= \left\|(b - Ax)\,x^{+}\right\|_E^2 = \\ &= F(x) \to \min_x .\end{aligned} \tag{7.70}$$

Так же, как и при рассмотрении задачи (7.56), оговорим, что в задаче (7.70) подразумевается не поиск нижней грани функции $F(x)$, а нахождение наиболее глубокого локального минимума.

Представим, как это уже делалось при доказательстве теоремы 4.2, вектор x в виде $x = \alpha\cdot\bar{x}$, где $\alpha \ne \pm\infty$ - некоторое число, $\bar{x}$ - вектор с единичной евклидовой нормой. Заметим, что $F(\alpha\bar{x}) \to +\infty$ при $\alpha \to 0$, поэтому на результат решения задачи (7.70) не повлияет дополнительное условие $\alpha \neq 0$. Пусть $\beta = \alpha^{-1}$. Тогда для вектора x получаем представление

$$x = \beta^{-1} \cdot \overline{x}, \tag{7.71}$$

и, следовательно, $\|x\| \neq +\infty \Leftrightarrow \beta \neq 0$, а задача (7.68), (7.70) принимает вид

$$F(x) = \mathcal{F}(\overline{x}, \beta) = b^{\mathrm{T}} b \cdot \beta^2 - 2b^{\mathrm{T}} A\overline{x} \cdot \beta + \overline{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\overline{x} \to \min_{\|\overline{x}\|=1, \beta \neq 0}. \tag{7.72}$$

Зафиксируем, также как и при доказательстве теоремы 4.2, вектор $\overline{x}$ и проведем минимизацию функции $\mathcal{F}(\overline{x}, \beta)$ по параметру β. Поскольку $b \neq 0$, и, следовательно, $b^{\mathrm{T}} b > 0$, очевидно, что

$$\beta^*(\overline{x}) = \arg\min_{\beta \neq 0, \|\overline{x}\|=1} \mathcal{F}(\overline{x}, \beta) = \frac{b^{\mathrm{T}} A\overline{x}}{b^{\mathrm{T}} b} \neq 0. \tag{7.73}$$

Подстановка (7.73) в (7.72) приводит к задаче

$$F(x) = \mathfrak{F}(\overline{x}) = \overline{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^+\right) A\overline{x} \to \min_{\overline{x}}, \tag{7.74}$$

$$b^{\mathrm{T}} A\overline{x} \neq 0, \tag{7.75}$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}} \overline{x} = 1. \tag{7.76}$$

Пусть $\overline{x}^*$ - решение задачи (7.74)-(7.76), а x^* - решение задачи (7.68), (7.70). Тогда, в силу (7.71) и (7.73), справедливы условия

$$x^* = \frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} A\overline{x}^*} \overline{x}^*, \tag{7.77}$$

$$F(x^*) = \frac{x^{*\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \left(I - bb^+\right) A x^*}{x^{*\mathrm{T}} x^*}. \tag{7.78}$$

Заметим, что из (7.77) следует условие

$$\frac{b^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} A x^*} = 1 \Leftrightarrow b^{\mathrm{T}} A x^* = b^{\mathrm{T}} b. \tag{7.79}$$

Условие (7.79) оказывается весьма ценным для последующих выкладок. Так, оказывается справедливым следующее

Утверждение 7.1. Если задача (7.68), (7.70) имеет решение, то оно совпадает с решением задачи

$$F(x) \to \min_{x | b^{\mathrm{T}} A x = b^{\mathrm{T}} b}. \tag{7.80}$$

При этом совпадают и оптимальные значения целевых функций обеих задач.

Займемся теперь исследованием задачи (7.68),(7.80). Она также является задачей условной минимизации, и для нее также будем использовать метод множителей Лагранжа. Сформируем функцию Лагранжа для задачи (7.68),(7.80) в виде

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \lambda \left(b^{\mathrm{T}} A x - b^{\mathrm{T}} b\right). \tag{7.81}$$

Тогда условия Лагранжа (характеризующие возможные условно-стационарные точки функции $F(x)$) принимают вид

$$\left(A^{\mathrm{T}}A - F(x)I\right)x = \left(1 - \lambda \frac{x^{\mathrm{T}}x}{2}\right) \cdot A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.82}$$

$$b^{\mathrm{T}}Ax = b^{\mathrm{T}}b. \tag{7.83}$$

С учетом условий (7.82)-(7.83) задача сводится к минимизации функции $F(x)$ при ограничениях (7.82)-(7.83). Пусть объекты $\widehat{\lambda}$, $\widehat{x}$ являются некоторым решением системы (7.82)-(7.83). Умножив равенство (7.82) слева на $\widehat{x}^{\mathrm{T}}$ и используя (7.83), получаем

$$b^{\mathrm{T}}b \cdot \left(1 - \widehat{\lambda} \frac{\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x}}{2}\right) = b^{\mathrm{T}}b,$$

откуда следует, что

$$\widehat{\lambda} = 0. \tag{7.84}$$

С учетом условия (7.84) задача (7.68),(7.80) может быть переписана в виде

$$F(x) \to \min, \tag{7.85}$$

$$\left(A^{\mathrm{T}}A - F(x) \cdot I\right)x = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.86}$$

$$b^{\mathrm{T}}Ax = b^{\mathrm{T}}b. \tag{7.87}$$

Теперь заметим, что из совокупности условий (7.86)-(7.87) следует соотношение

$$A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)Ax = F(x) \cdot x, \tag{7.88}$$

а сама система (7.86)-(7.87) эквивалентна системе (7.87)-(7.88). Как несложно заметить, система линейных алгебраических уравнений (7.88) является системой специального вида: любой вектор y, являющийся ее решением, является собственным вектором матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A$. При этом число $F(y)$ является собственным значением матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A$, которому соответствует вектор y.

Таким образом, задача (7.85)-(7.87) сводится к поиску наименьшего по величине собственного значения λ^{*} матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A$, для которого существует соответствующий собственный вектор y^{*} такой, что $b^{\mathrm{T}}Ay^{*} = b^{\mathrm{T}}b.$ Очевидно, что если задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ не имеет решения, то $\lambda^{*} > \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A\right)$. Но собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям, лежат во взаимно ортогональных линейных подпространствах. Следовательно, вектор y^{*} будет ортогонален любому собственному вектору матрицы $A^{\mathrm{T}}\left(I - bb^{+}\right)A$, соответствующему любому ее собственному значению $\lambda < \lambda^{*}$.

Таким образом, мы показали, что если задача (7.70) имеет решение, то она эквивалентна какой-либо из задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$, …,

$Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b)$.

Вернемся теперь к задаче $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)$. Положим $L \equiv I$ и выразим $\widehat{\lambda}$ через $\widehat{x}$ и δ из условий (7.69), (7.54)-(7.55). Для этого умножим обе части равенства (7.69) слева на $\widehat{x}^{\mathrm{T}}$ и используем (7.68) и (7.54). Получаем

$$\widehat{\lambda} = \frac{b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}A\widehat{x}}{\delta^4}. \tag{7.89}$$

В свою очередь, формулы (7.61), (7.89) позволяют переписать условия (7.69), (7.54)-(7.55) в виде

$$\left(A^{\mathrm{T}}A + \left(\frac{b^{\mathrm{T}}b - b^{\mathrm{T}}A\widehat{x}}{\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x}} - F(\widehat{x}) \right) \cdot I \right) \widehat{x} = A^{\mathrm{T}}b, \tag{7.90}$$

$$\widehat{x}^{\mathrm{T}}\widehat{x} = \delta^2, \tag{7.91}$$

$$b^{\mathrm{T}}b \geq b^{\mathrm{T}}A\widehat{x}. \tag{7.92}$$

Сопоставляя условия (7.86)-(7.87) с условиями (7.90)-(7.92) и проводя рассуждения, аналогичные использовавшимся при доказательстве теоремы 7.3, убеждаемся, что при подходящем выборе параметра δ задача (7.56) эквивалентна задаче $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta)}(A,b)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 7.4. Если хотя бы одна из задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b)$ имеет решение, то оно может быть получено как решение задачи $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta)}(A,b)$ при использовании соответствующем выборе регуляризующего параметра δ .

Замечание. Можно показать, что утверждение теоремы 7.4 обобщается и на задачи из класса $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, если матрица L такова, что для любого вектора x^*, являющегося решением задачи $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)$, справедливо условие

$$\left\| x^* \right\| \leq \delta_L < +\infty.$$

При этом требования к матрице L могут быть и более слабыми, так как фактически необходимо лишь, чтобы множества решений задач $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG}(A,b)$, $Z_{fix\{b\}}^{NG'}(A,b)$, …, $Z_{fix\{b\}}^{NG^*}(A,b)$ с одной стороны, и задачи $Z_{fix\{b\}}^{REG(\delta,L)}(A,b)$ - с другой стороны, имели непустое пересечение.

8. Численные примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.69)-(4.71) получаем:

$$S^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \; R = I - SS^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = RA = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; \tilde{b} = Rb = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$, имеем:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \; \mathrm{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{b} \end{bmatrix}\right), \; x_A^{*} = [1].$$

Теперь, в соответствии с (4.75),

$$\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} = \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_A^{*}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^{*} \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться, $\left\|\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix}\right\|_E^2 = \frac{1}{3}$.

$$A+H^{*}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{5}{6}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ b+h^{*}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.77)-(4.78),

$$x_S^{*}=S^{+}(b-Ax_A^{*})+(I-S^{+}S)\vartriangle x_S=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\vartriangle x_S,$$

где $\vartriangle x_S\in\mathbb{R}^3$ - произвольный вектор. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A+H^{*}\right)x_A^{*}+Sx_S^{*}\equiv b+h^{*}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,b\}}\left(\begin{bmatrix}A & S\end{bmatrix},b\right)$ при следующих данных:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.69)-(4.71) получаем:

$$S^{+}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix},\ R=I-SS^{+}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}=RA=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}9&3\\3&9\\-3&3\\3&-3\end{pmatrix},\ \tilde{b}=Rb=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(\tilde{A},\tilde{b}\right)$, имеем:

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}\right)=\begin{bmatrix}9\\ 3\end{bmatrix},$$

$$x=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\in\mathbf{X}_{\min}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}\right),\ \tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{A}x=\frac{3}{2}\neq 0,$$

$$x_A^*=\frac{\tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{b}}{\tilde{b}^{\mathrm{T}}\tilde{A}x}x=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Теперь, в соответствии с (4.102),

$$H^*=\left(\tilde{b}-\tilde{A}x_A^*\right)\cdot x_A^{*+}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться, $\left\|H^*\right\|_E^2=3$.

$$A+H^*=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

В соответствии с формулами (4.77)-(4.78),

$$x_S^*=S^+(b-Ax_A^*)+(I-S^+S)\vartriangle x_S=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\vartriangle x_S,$$

где $\vartriangle x_S\in\mathbb{R}^3$ - произвольный вектор. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A+H^*\right)x_A^*+Sx_S^*\equiv b.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.232) получаем:

$$P = I - UU^{+} = 0,\ Q = I - U^{+}U = 0,$$

$$\breve{A} = A - SU^{-1}T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \breve{b} = b - SU^{-1}d = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Далее, поскольку имеет место случай (а) теоремы 4.7, решаем задачу $Z_{total}\left(\breve{A},\breve{b}\right)$:

$$\begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \frac{13}{2} \end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{A} & -\breve{b} \end{bmatrix}\right),\ x_A^{*} = [-2].$$

Теперь, в соответствии с (4.246),

$$\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} = \left(\breve{b} - \breve{A}x_A^{*}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_A^{*} \\ 1 \end{bmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться, $\left\|\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix}\right\|_E^2 = \frac{1}{2}$.

$$A + H^{*} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix},\ b + h^{*} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулой (4.248),

$$x_S^* = U^{-1}\left(d - Tx_A^*\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^*\right)x_A^* + Sx_S^* \equiv b + h^*,$$
$$Tx_A^* + Ux_S^* \equiv d.$$

Пример 4. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$T = (-1),\ U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ d = [1],$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$P = I - UU^+ = 0,\ Q = I - U^+U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Далее, поскольку имеет место случай (b) теоремы 4.7, в соответствии с формулами (4.229)-(4.230), (4.233)-(4.236), имеем:

$$\breve{S} = SQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ \breve{S}^+ = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\breve{R} = I - \breve{S}\breve{S}^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \breve{R}\breve{\breve{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{total}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)$, имеем:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} & -\tilde{\tilde{b}} \end{bmatrix}\right),\ x_A^{*} = [1].$$

Теперь, в соответствии с (4.252),

$$\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix} = \left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^{*}\right)\begin{bmatrix} x_A^{*} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Как несложно убедиться, $\left\|\begin{bmatrix} H^{*} & -h^{*} \end{bmatrix}\right\|_E^2 = 3$.

$$A + H^{*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b + h^{*} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.253)-(4.255),

$$\hat{x}_S = U^{+}\left(d - Tx_A^{*}\right) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \vartriangle x_S = \breve{S}^{+}\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^{*}\right) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q\vartriangle x_S = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_S^* = \hat{x}_S + Q_\Delta x_S + \left(I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} \right) \chi_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \chi_S ,$$

где $\chi_S \in \mathbb{R}^3$ - произвольный вектор. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^* \right) x_A^* + Sx_S^* \equiv b + h^* ,$$
$$Tx_A^* + Ux_S^* \equiv d .$$

Пример 5. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$P = I - UU^+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = 0 ,$$

Далее, поскольку имеет место случай (c) теоремы 4.7, в соответствии с (4.233)-(4.234), имеем:

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^+T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^+d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{total}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}} \right)$, имеем:

$$\begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \breve{\breve{A}} & -\breve{\breve{b}} \end{bmatrix} \right),\ x_A^* = [1].$$

Теперь, в соответствии с (4.259),

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^* \right) \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Как несложно убедиться, $\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E^2 = 5$.

$$A + H^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ b + h^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.254) и (4.260),

$$\hat{x}_S = U^+ \left(d - T x_A^* \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$x_S^* = \hat{x}_S.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^* \right) x_A^* + S x_S^* \equiv b + h^*,$$

$$T x_A^* + U x_S^* \equiv d.$$

Пример 6. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$P = I - UU^{+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = I - U^{+}U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Далее, поскольку имеет место случай (d) теоремы 4.7, в соответствии с формулами (4.229)-(4.230), (4.233)-(4.238), имеем:

$$\breve{S} = SQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \breve{S}^{+} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\breve{R} = I - \breve{S}\breve{S}^{+} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \breve{R}\breve{\breve{A}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{T} = PT = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \widehat{d} = Pd = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь необходимо решить задачу $Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$. Поскольку система $\widehat{T}x = \widehat{d}$ имеет единственное решение,

$$x_A^{*} = [1] = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\widehat{T}, \widehat{d}\right).$$

В соответствии с (4.252),

$$\begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} = \left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}} x_A^*\right) \begin{bmatrix} x_A^* \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться, $\left\| \begin{bmatrix} H^* & -h^* \end{bmatrix} \right\|_E^2 = 3$.

$$A + H^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b + h^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.253)-(4.255),

$$\hat{x}_S = U^+ \left(d - T x_A^*\right) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \vartriangle x_S = \breve{S}^+ \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}} x_A^*\right) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q \vartriangle x_S = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} = 0,$$

$$x_S^* = \hat{x}_S + Q \vartriangle x_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^*\right) x_A^* + S x_S^* \equiv b + h^*,$$
$$T x_A^* + U x_S^* \equiv d.$$

Пример 7. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\ b=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ d=\begin{bmatrix}-4\\8\\0\end{bmatrix},$$

$$U^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&-2&-2\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.232) получаем:

$$P=I-UU^{+}=0,\ Q=I-U^{+}U=0,$$

$$\breve{A}=A-SU^{-1}T=\begin{pmatrix}1&3\\0&-3\\0&3\end{pmatrix},\ \breve{b}=b-SU^{-1}d=\begin{bmatrix}-3\\3\\-2\end{bmatrix},$$

Далее, поскольку имеет место случай (а) теоремы 4.8, решаем задачу $Z_{fix\{b\}}\left(\breve{A},\breve{b}\right)$:

$$\breve{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\breve{b}\breve{b}^{+}\right)\breve{A}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}13&-3\\-3&9\end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\tilde{b}\tilde{b}^{+}\right)\tilde{A}\right)=\begin{bmatrix}1\\\frac{9}{22}\end{bmatrix},$$

$$x=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\in\mathbf{X}_{\min}\left(\breve{A}^{\mathrm{T}}\left(I-\breve{b}\breve{b}^{+}\right)\breve{A}\right),\ \breve{b}^{\mathrm{T}}\breve{A}x=-57\neq 0,$$

$$x_A^{*}=\frac{\breve{b}^{\mathrm{T}}\breve{b}}{\breve{b}^{\mathrm{T}}\breve{A}x}x=\begin{bmatrix}-\frac{22}{19}\\-\frac{44}{57}\end{bmatrix}.$$

Теперь, в соответствии с (4.291),

$$H^* = \left(\breve{b} - \breve{A}x_A^*\right) \cdot x_A^{*+} = \begin{pmatrix} -\frac{81}{286} & -\frac{27}{143} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{27}{143} & -\frac{18}{143} \end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления в рациональной арифметике, убеждаемся, что $\left\|H^*\right\|_E^2 = 3$.

$$A + H^* = \begin{pmatrix} \frac{205}{286} & \frac{116}{143} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{14}{11} \\ -\frac{27}{143} & \frac{125}{143} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (4.248),

$$x_S^* = U^{-1}\left(d - Tx_A^*\right) = -\frac{1}{57}\begin{bmatrix} 68 \\ 158 \\ 116 \end{bmatrix},$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^*\right)x_A^* + Sx_S^* \equiv b,$$

$$Tx_A^* + Ux_S^* \equiv d.$$

Пример 8. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$P = I - UU^{+} = 0\,,\ Q = I - U^{+}U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку имеет место случай (b) теоремы 4.8, в соответствии с формулами (4.229)-(4.230), (4.233)-(4.236), имеем:

$$\breve{S} = SQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \breve{S}^{+} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\breve{R} = I - \breve{S}\breve{S}^{+} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \breve{R}\breve{\breve{A}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 3 \\ 2 & -18 \\ 3 & 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}, \ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{b}}\right)$, имеем:

$$\tilde{\tilde{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \tilde{\tilde{b}}\tilde{\tilde{b}}^{+}\right)\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \ \mathrm{eigenvals}\left(\tilde{\tilde{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \tilde{\tilde{b}}\tilde{\tilde{b}}^{+}\right)\tilde{\tilde{A}}\right) = \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\tilde{\tilde{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \tilde{\tilde{b}}\tilde{\tilde{b}}^{+}\right)\tilde{\tilde{A}}\right), \ \tilde{\tilde{b}}^{\mathrm{T}}\tilde{\tilde{A}}x = \frac{2}{5} \neq 0,$$

$$x_A^* = \frac{\tilde{\tilde{b}}^{\mathrm{T}}\tilde{\tilde{b}}}{\tilde{\tilde{b}}^{\mathrm{T}}\tilde{\tilde{A}}x}x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь, в соответствии с (4.295),

$$H^* = \left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^*\right) \cdot x_A^{*+} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Как несложно убедиться, $\left\|H^*\right\|_E^2 = 3$.

$$A + H^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 10 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

В соответствии с (4.253)-(4.255),

$$\hat{x}_S = U^+\left(d - Tx_A^*\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix},\ \vartriangle x_S = \breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q\vartriangle x_S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+\begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$x_S^* = \hat{x}_S + Q\vartriangle x_S + \left(I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+\begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}\right)\chi_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\chi_S,$$

где $\chi_S \in \mathbb{R}^3$ - произвольный вектор. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^*\right)x_A^* + Sx_S^* \equiv b + h^*,$$
$$Tx_A^* + Ux_S^* \equiv d.$$

Пример 9. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$P = I - UU^{+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = I - U^{+}U = 0\,.$$

Далее, поскольку имеет место случай (c) теоремы 4.8, в соответствии с (4.233)-(4.234), имеем:

$$\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Далее, в соответствии с логикой решения задачи $Z_{fix\{b\}}\left(\breve{\breve{A}}, \breve{\breve{b}}\right)$, имеем:

$$\breve{\breve{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \breve{\breve{b}}\breve{\breve{b}}^{+}\right)\breve{\breve{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ \mathrm{eigenvals}\left(\breve{\breve{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \breve{\breve{b}}\breve{\breve{b}}^{+}\right)\breve{\breve{A}}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{X}_{\min}\left(\breve{\breve{A}}^{\mathrm{T}}\left(I - \breve{\breve{b}}\breve{\breve{b}}^{+}\right)\breve{\breve{A}}\right),\ \breve{\breve{b}}^{\mathrm{T}}\breve{\breve{A}}x = \frac{2}{5} \neq 0\,,$$

$$x_A^{*} = \frac{\breve{\breve{b}}^{\mathrm{T}}\breve{\breve{b}}}{\breve{\breve{b}}^{\mathrm{T}}\breve{\breve{A}}x}x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

в соответствии с (4.233)-(4.234),

$$H^{*} = \left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^{*}\right)\cdot x_A^{*+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться, $\left\|H^{*}\right\|_E^2 = 2\,.$

$$A + H^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (4.300), а также (4.254)-(4.255),

$$x_S = \hat{x}_S = U^{+}\left(d - Tx_A^{*}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A+H^{*}\right)x_A^{*}+Sx_S^{*}\equiv b+h^{*},$$
$$Tx_A^{*}+Ux_S^{*}\equiv d\,.$$

Пример 10. Рассмотрим задачу $Z_{fix\{S,T,U,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ при следующих данных:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ d=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (4.227)-(4.228) получаем:

$$U^{+}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$P=I-UU^{+}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$
Q = I - U^{+}U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Далее, поскольку имеет место случай (d) теоремы 4.8, в соответствии с формулами (4.229)-(4.230), (4.233)-(4.238), имеем:

$$
\breve{S} = SQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \breve{S}^{+} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\breve{R} = I - \breve{S}\breve{S}^{+} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},
$$

$$
\breve{\breve{A}} = A - SU^{+}T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & -16 \\ 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\tilde{\breve{\breve{A}}} = \breve{R}\breve{\breve{A}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 3 \\ 2 & -18 \\ 3 & 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}, \ \breve{\breve{b}} = b - SU^{+}d = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},
$$

$$\widehat{T} = PT = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \widehat{d} = Pd = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Теперь необходимо решить задачу $Z_{fix\{\widehat{T},\widehat{d}\}}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{A}} \\ \widehat{T} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}} \\ \widehat{d} \end{bmatrix}\right)$. Поскольку система $\widehat{T}x = \widehat{d}$ имеет единственное решение,

$$x_A^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{X}}\left(\widehat{T}, \widehat{d}\right).$$

В соответствии с (4.295),

$$H^* = \left(\tilde{\tilde{b}} - \tilde{\tilde{A}}x_A^*\right) \cdot x_A^{*+} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -1 & 1 \\ -19 & 19 \\ -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Как несложно убедиться,

$$\left\|H^*\right\|_E^2 = 10\frac{2}{5}.$$

$$A + H^* = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 9 & 21 \\ -19 & -31 \\ 9 & 21 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (4.253)-(4.255),

$$\hat{x}_S = U^+\left(d - Tx_A^*\right) = 0,\ \vartriangle x_S = \breve{S}^+\left(\breve{\breve{b}} - \breve{\breve{A}}x_A^*\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q\vartriangle x_S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$x_S^* = \hat{x}_S + Q\vartriangle x_S + \left(I - \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} S \\ U \end{bmatrix} \right) \chi_S =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \chi_S,$$

где $\chi_S \in \mathbb{R}^3$ - произвольный вектор. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\left(A + H^* \right) x_A^* + S x_S^* \equiv b + h^*, \; T x_A^* + U x_S^* \equiv d.$$

9. Замечания, краткие исторические сведения и комментарии к списку литературы

Исторически сложилось так, что период начала систематизированных и достаточно интенсивных исследования задач многопараметрической коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений пришелся на 80-е годы уже ушедшего века. При этом в России (СССР) и за рубежом примерно в одно и то же время были независимо, с использованием разного математического аппарата получены близкие результаты. При этом прикладные задачи, вызвавшие указанные исследования, также были разными.

Первые отечественные работы связаны с Екатеринбургской математической школой (Институт математики и механики УрО РАН) и именами И.И. Еремина, Вл.Д. Мазурова, Н.Н. Астафьева и, в особенности, с именем Екатеринбургского математика А.А. Ватолина, ученика академика И.И. Еремина. Основная задача, которую рассматривал А.А. Ватолин, заключалась в оптимальной многопараметрической коррекции несобственных задач линейного программирования в различных нормах. В указанном контексте задача оптимальной матричной коррекции несовместной системы линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы возникает в качестве вспомогательной задачи при исследовании несобственных задач линейного программирования, записанных в канонической форме.

Наиболее детально А.А. Ватолиным было выполнено исследование задач, которые в настоящей работе обозначены как $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$. Для указанных задач в работе [17] сформулированы все основные утверждения, приведенные в настоящей работе в формулировках теорем 4.1 и 4.2. При анализе указанных задач используется лемма А.Н. Тихонова [24]. Следует, однако, отметить, что в работе [17] только часть указанных утверждений обоснована достаточно строго – это формулы для $z_{total}(A,b)$ и $z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$, формулы, описывающие вид оптимальных матриц коррекции, а также достаточные условия разрешимости указанных задач. В последующих работах [3]-[4] А.А. Ватолин вводит в рассмотрение радиусы совместности и несовместности системы $Ax = b$ соответственно как

$$\inf_{\mathcal{X}(A+H,b+h)=\varnothing} \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|^2 = \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$$

и

$$\inf_{\mathcal{X}(A+H,b+h)\neq\varnothing} \left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\|^2 = \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & -b \end{bmatrix}\right),$$

что можно считать дальнейшим развитием исследования задачи $Z_{total}(A,b)$. Кроме того, в работах [3]-[6] рассматривается модифицированная задача $Z_{total}(A,b)$, дополненная совместной системой линейных неравенств, но главный акцент делается на исследовании несобственных задач линейного программирования. Заметим также, что еще в работе [17] делается предположение, что техника, использованная при анализе задач $z_{total}(A,b)$ и $z_{fix\{S\}}\left(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}, b\right)$, может быть использована и в задачах с фиксированными строками.

В конце 90-х годов в Москве (ВЦ РАН и МПГУ) возникает еще один центр исследования несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования. Появляются работы [11] и [22], в которых улучшается обоснование необходимых и достаточных условий задачи $Z_{total}(A,b)$, рассматривается и строго обосновывается задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$. Примерно в такой же форме основные результаты, касающиеся указанных задач, изложены и в теоремах 4.1 и 4.2 настоящей работы. Кроме того, в работе [22] впервые рассматривается задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, для которой удается получить формулу для оценки величины $z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, а также достаточные условия существования решения и вид корректирующей матрицы. Независимо от работ [11] и [22] задача $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ исследуется в работе [18], а в работе [19] удается получить альтернативную формулировку необходимых и достаточных условий существования решения задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, которая представлена в параграфе 5.2 настоящей работы.

В работе [13] удается сделать более строгими формулировки и доказательства необходимых и достаточных условий существования решения задачи $Z_{total}(A,b)$, а также обосновать следующие утверждения:

Утверждение 9.1. Если $\|b\|^2 \le \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$, то решение задачи $Z_{total}(A,b)$ существует.

Утверждение 9.2. Если $\|b\|^2 > \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$ и $A^{\mathrm{T}}b = 0$, то решение задачи $Z_{total}(A,b)$ не существует.

В работе [14] кроме задач $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ рассматриваются также аналогичные задачи, в которых используется не евклидова, а спектральная матричная норма, а также задачи с дополнительным требованием неотрицательности решения скорректированной системы. Для задачи $Z_{total}(A,b)$ удается обосновать еще одно

Утверждение 9.3. Если $\|b\|^2 > \lambda_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$ и $\exists x \in \mathbf{X}_{\min}\left(A^{\mathrm{T}}A\right) \middle| b^{\mathrm{T}}Ax \ne 0$, то решение задачи $Z_{total}(A,b)$ существует.

Среди других результатов работы [14], относящихся к задачам коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы, - неравенства для норм матриц коррекции и норм решений скорректированных систем, связывающие задачи $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$ с методом наименьших квадратов (см. (5.63), (5.66), (5.88) и (5.89). Кроме того, в работе рассматриваются достаточные условия существования решения задачи $Z_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, а также модифицированные с помощью дополнительных линейных ограничений на матрицу коррекции задачи $Z_{total}(A,b)$ и $Z_{fix\{b\}}(A,b)$.

В работе [15] задача получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$, указан вид оптимальной матрицы коррекции и вид множества решений скорректированной системы, а сама задача $Z_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right)$ используется как вспомогательная в задаче матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования, записанной в канонической форме.

Заметим, что в настоящей работе задачи $\tilde{Z}_{fix\{T,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, D\right)$ и $\tilde{Z}_{fix\{T,b,d\}}\left(\begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, D\right)$ исследуются с помощью другой техники, позволяющей получить более детализированные результаты в зависимости от свойств решений совместной подсистемы $Tx = d$.

Публикации [20]-[21] непосредственно предшествовали появлению настоящей работы. В них намечаются подходы к регуляризации задачи $Z_{fix\{b\}}(A,b)$, которые в настоящей работе получили дальнейшее развитие (см. параграфы 5.3, 5.4, 5.7, 5.8, а также главу 7).

Обратимся теперь к зарубежным исследованиям, так или иначе посвященным проблеме оптимальной матричной коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. Исторически сложилось так, что в зарубежных исследованиях указанное направление развивалось в связи с другой прикладной задачей – задачей обработки экспериментальных данных с помощью так называемого обобщенного метода наименьших квадратов – Total Least Squares (TLS). TLS является обобщением классического МНК на случай, когда шум присутствует в наблюдениях как зависимых, так и независимых переменных. Если принять гипотезу, что погрешности всех переменных подчиняются нормальному закону распределения с одними и теми же средним и дисперсией, то TLS получает статистическое обоснование как метод, дающий оценки неизвестных параметров линейной модели, гарантирующий максимум функции правдоподобия. Системы линейных алгебраических уравнений, обрабатываемые с помощью TLS – это, как правило, переопределенные системы полного ранга. Для сравнения – системы, возникающие при коррекции несобственных задач линейного программирования в канонической форме – как правило, являются недоопределенными. Главная задача TLS – определить квазирешение исследуемой линейной системы. В то же время, можно показать, что указанное квазирешение – это точное решение модифицированной системы, повергшейся матричной коррекции по минимуму евклидовой нормы.

Как свидетельствуют обзоры и популярные статьи, посвященные TLS (см., например, [29], [39], [47] и [50]), интенсивные исследования метода и его активное использование при решении прикладных задач начались в конце 80-х годов после появления работ Бельгийского математика S. Van Huffel. Ее диссертация [51] и в особенности написанная в соавторстве с J. Vandewalle монография [54] до сих пор являются одними из наиболее часто цитируемых материалов по TLS.

С учетом обозначений, принятых в настоящей работе, задачу TLS можно записать в следующей форме:

1) Решить задачу

$$\left\| \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{b} \end{bmatrix} \right\|_E \to \min_{\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{b} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \tilde{A}}. \tag{9.1}$$

(Система $Ax = b$ предполагается переопределенной и несовместной)

2) Если решение задачи (9.1) – матрица $\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{b} \end{bmatrix}$ найдена, определить вектор $\tilde{x}$ как решение системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$. Указанный вектор и есть TLS-решение системы $Ax = b$.

Заметим, что задача (9.1) является частным случаем из обширного класса задач матричной аппроксимации и известна достаточно давно. Работы [47] и [49] содержат достаточно интересные исторические сведения, свидетельствующие о том, что задача (9.1) или близкие к ней задачи многократно переоткрывались и связаны с именами как E. Beltrami (1873) C. Jordan (1874), E. Schmidt [50] (1907), H. Weyl [57] (1912), L. Mirsky [46], C. Eckart, G. Young [31] (1936).

Задача (9.1) просто и элегантно решается с помощью сингулярного разложения матрицы $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ (см. главу 2). Мы знаем, что соответствующая техническая база (универсальные вычислительные машины третьего поколения), позволяющая решать нетривиальные задачи линейной алгебры, появилась в начале 70-х годов. В это же время появляются и соответствующие математические работы, закладывающие алгоритмическую базу для вычисления сингулярного разложения [33]-[34], а затем и для решения задачи TLS [35]-[36].

В настоящее время обобщенный метод наименьших квадратов (TLS) представляет собой широко и мощно развивающееся научное направление. Описание всевозможных известных к настоящему времени модификаций TLS вполне может быть самостоятельной специализированной публикации. По этой причине мы отметим только одно развивающееся направление, которое связано с материалом, изложенным в настоящей работе. Речь идет о регуляризации задач матричной коррекции, рассмотренной в главе 7, и, соответственно, о RTLS – регуляризованном обобщенном методе наименьших квадратов. Поскольку постановки соответствующих проблем и методы их решения достаточно подробно изложены в указанной главе, приведем ссылки на работы, которые были использованы при ее написании. Во первых, укажем работы "идеологического" характера, которые не использовались непосредственно в математических выкладках, но, если так можно выразиться, "задавали тон". Это работы [25] и [2]. Непосредственно были использованы работы [30], [32], [37], [40], [43]-[45], [48], [54]-[56],[58]. С материалом главы 7 достаточно близко перекликаются работы [41],[42], посвященные исследованию минимизации квадратичной функции на сфере.

Литература

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. – 224 с.
2. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Уральская изд. ф-ма. "Наука", 1993. – 263 с.
3. Ватолин А.А. Об аппроксимации несобственных задач линейного программирования. – Деп. в ВИНИТИ, № 3501-84 Деп., 1984. – 31 с.
4. Ватолин А.А. Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, Т. 24, № 12, С. 1907-1908.
5. Ватолин А.А. Множества разрешимости и коррекция седловых функций и систем неравенств. Препринт. Свердловск: ИММ УрО РАН, 1989. – 90 с.
6. Ватолин А.А. Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции: Дисс. на соиск. учен. степ. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09. - Екатеринбург, 1992.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. – 320 с.
8. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. – 336 с.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. – 368 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. – 552 с.
11. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. – 548.
12. Горелик В.А., Кондратьева В.А. Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. – С.57-82.
13. Горелик В.А., Муравьева О.В. Необходимые и достаточные условия существования минимальной матрицы в задаче коррекции несовместной системы линейных уравнений // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2000. – С.14-20.
14. Горелик В.А., Муравьева О.В. Задача аппроксимации с коррекцией всех данных // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2000. – С.21-32.

15. Горелик В.А., Ерохин В.И., Муравьева О.В. Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. – С.57-87.
16. Горелик В.А. Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, Т. 41, № 11, С. 1697-1705.
17. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. – 336 с.
18. Ерохин В.И. Исследование и оптимальная многопараметрическая коррекция несовместных линейных моделей // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тез. докл. – Воронеж, ВГУ, 2001. – С. 95.
19. Ерохин В.И. Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей // Дискрет. анализ и исслед. операций, Сер. 2, 2002, Т. 9, № 1, С. 33-60.
20. Ерохин В.И. Аналог нормального решения в задаче матричной коррекции несовместной системы линейных алгебраических уравнений // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. конф. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. С. 266-267.
21. Ерохин В.И. Регуляризация матричной коррекции несовместной системы линейных алгебраических уравнений // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. конф. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. С. 268-269.
22. Кондратьева В.А. Несобственные задачи линейной оптимизации и параметрическое программирование: Дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. – М., 2000.
23. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. – 232 с.
24. Тихонов А.Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР, 1980, Т. 254, № 3, С. 549-554.
25. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.
26. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
27. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. – 655 с.
28. Björck Å. A bidiagonalization algorithm for solving large and sparse ill-posed systems of linear equations // BIT, 1988, Vol. 18, pp. 659-670.
29. Branham R. Jr. Astronomical data reduction with total least squares // New Astronomy Reviews, 2001, 45, pp. 649-661.
30. Calvetti D., Morigi S., Reichel L., Sgallari F. Tikhonov regularization and the

L-curve for large discrete ill-posed problems // J. of Computational and Appl. Mathematics, 2000, Vol. 123, pp. 423-446.
31. Eckart, C., Young, G. The approximation of one matrix by another of lower rank // Psychometrika, 1936, Vol 1, pp. 211-218.
32. Fierro R.D., Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P. Regularization by truncated total least squares // SIAM J. Sci. Comput., 1997, Vol. 18, No 4, pp. 1223-1241.
33. Golub G.H., Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions // Numerishe Mathematik, 1970, Vol. 14, pp. 403-420.
34. Golub G.H. Some modified matrix eigenvalue problems // SIAM Review, 1973, Vol. 15, No 2, pp. 318-344.
35. Golub G.H., Van Loan C.F. An analysis of the total least squares problem // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, Vol. 17, No 3, pp. 883-893.
36. Golub G.H., Hoffman A., Stewart G.W. A generalization of Eckart-Young-Mirsky matrix approximation theorem // Linear Algebra and Its Applications, 1987, Vol. 88/89, pp. 317-327.
37. Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1999, Vol. 21, No 1, pp. 185-194; Computer Science Department Report CS-TR-3829, Instutute for Advanced Computer Studies Report UMIACS-TR-97-65, University of Maryland, Sept. 1997. http://www.cs.umd.edu/~oleary/tr.html
38. Golub G.H., Pereyra V. The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate // SIAM J. Numer. Anal, 1973, Vol. 10, No 3, pp. 413-432.
39. De Groen P. An introduction to total least squares // Niew Archief voor Wiskunde, 1996, Vol. 14, No 2, pp. 237-254.
40. Guo H., Renaut R.A. A regularized total least squares algorithm // in Total Least Squares and Errors-in-Variables Modeling: Analysis, Algorithms and Applications (S. Van Huffel and P. Lemmerling, eds.), Kluwer Academic Publishes, 2001, pp. 57-66. http://math.la.asu.edu/~rosie http://math.la.asu.edu/~hongbin/
41. Hager W.W. Minimizing a quadratic over a sphere // SIAM Journal on Optimization, 2001, Vol. 12, No 1, pp. 188-208.
42. Hager W.W., Park S.C. Global convergence of SSM for minimizing a quadratic over a sphere, Department of Mathematics, Univesity of Florida, Gainesville, FL 32611, August 12, 2003.
43. Hansen P.C., O'Leary D.P. Regularization algorithms based on total least squares // Computer Science Department Report CS-TR-3684, Instutute for Advanced Computer Studies Report UMIACS-TR-96-65, University of Maryland, Sept. 1996. http://www.cs.umd.edu/~oleary/tr.html
44. Hansen P.C. Regularization Tools. A Matlab package for analysis and Solution of Discrete ill-posed problems, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, June 1992 - September 2001,

109 p. http://www.imm.dtu.dk/~pch

45. Kilmer M.E., O'Leary D.P. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems // Computer Science Department Report CS-TR-3937, Instutute for Advanced Computer Studies Report UMIACS-TR-98-48, University of Maryland, Oct. 1999. http://www.cs.umd.edu/~oleary/tr.html
46. Mirsky L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2 11 (41) (1960) 50-59.
47. Nievergelt Y. A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, Vol. 121, Issues 1-2, pp. 37-72.
48. Renaut R.A., Guo H. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, to appear. http://math.la.asu.edu/~rosie http://math.la.asu.edu/~hongbin/
49. Stewart G.W. On the early history of the singular value decomposition // SIAM Rev., 1993, Vol. 35, No 4, pp. 551-566.
50. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 1. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann. 63 (1907) 433-476.
51. Vandewalle J. Linear concepts and methods for data processing // Lecture presentations on Belgian Francqui Chair 2001-2002 http://www.cs.kuleuven.ac.be/~stefan http://www.etro.vub.ac.be/communications/Francqui2002/Francqui2002_page.htm
52. Van Huffel S. Analysis of the total least squares problem and its use in parameter estimation // PhD thesis, Dept. of Electr. Eng., K.U.Leuven, Belgium, June 1987.
53. Van Huffel S., Vandewalle J. Subset selection using the total least squares approach in collinearity problems with errors in the variables // Linear Algebra and its Applications, 1987, Vol. 88/89, pp. 695-714.
54. Van Huffel S., Vandewalle J. Analysis and solution of the nongeneric total least squares problem // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1988, Vol. 9, No 2, pp. 360-372.
55. Van Huffel S., Vandewalle J. The total least squares problem: computational aspects and analysis // Philadelphia: SIAM Publishing, 1991.
56. Van Huffel S. On the significance of nongeneric total least squares problems // SIAM J. Matrix Analysis and Applications, 1992, Vol. 13, No 1, pp. 20-35.
57. Weyl H. Das asymptotische Vertielungsgesetz der Eigenwert linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwerndung auf der Theorie der Hohlraumstrahlung) // Math. Ann., 1912, Vol. 71, pp. 441-479.
58. Zhu Wenwu, Wang Y., Galatsanos N.P., Zhang J. Regularized total least squares for nonconvolutional linear inverse problems // IEEE Transactions on Image Processing, 1999, Vol. 8, No 11, pp. 1657-1661.