УДК 519.61

ОБ АТТРАКТОРАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ *

Ю.Н. Павловский

Введение

Настоящая статья является продолжением статьи [1], а также статьи [2]. В обеих статьях дается "элементарная теория" декомпозиции отображений в себя — сжатая в [1] и развернутая в [2]. Прилагательное "элементарная" означает, что понятия геометрической теории декомпозиции [3-13] вводятся в статьях [1,2] для отображений в себя, хотя они применимы для широкого класса математических объектов. Таким образом обстоит дело с фактами геометрической теории декомпозиции: они доказываются для отображений в себя, хотя часть утверждений является простым следствием утверждений геометрической теории декомпозиции, имеющими место для широкого класса математических объектов. Для удобства читателей первая часть настоящей статьи является повторением статьи [1]. Вторая часть, являющаяся как раз продолжением [1,2], посвящена гипотезе в некоторой мере,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00335, при поддержке Совета программы поддержки ведущих научных школ НШ - 2094.2003.1 Президента РФ.

как представляется автору, объясняющей "существо" явления, которое именуется "странным аттрактором". Слово "существо" взято в кавычки из следующих соображений. Когда говорят о "существе" некоторого явления, то имеют в виду его описание в рамках какой-то языковой среды (теории). Автор не считает излагаемую здесь трактовку того, что называется "странным аттрактором" единственно возможной. Не исключено какое-то другое объяснение этого явления, выполненное в рамках языковой среды, отличной от среды геометрической теории декомпозиции, которое также естественно будет называть "существом" явления, о котором идет речь.

1. Декомпозиции отображений в себя

Как уже было сказано выше, излагаемые понятия и факты, касающиеся декомпозиции отображений в себя, являются конкретизацией для отображений в себя некоторых общих конструкций и положений геометрической теории декомпозиции [3-13], для развития которой в качестве инструментального средства использовался бурбаковский формализм [11]. Использование таких "тяжелых" средств, конечно, сделало бы изложение более коротким, но, в то же время, недоступным для большинства читателей.

Далее через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных целых чисел. Пусть X — множество, $Q \subset X \times X$ — отношение эквивалентности на X. Через x_Q обозначается класс эквивалентности по Q, которому принадлежит x, через X_Q — соответствующее фактор-множество. Пусть $f : X \to X$ — отображение. $U \subset X$ называется Р-множеством (или инвариантным множеством) для f (относительно естественных канонических морфизмов [3]), если $f(U) \subset U$. Через $f_U : U \to U$

обозначается подобъект объекта f на Р-множестве U, т. е. функция, индуцированная f на U, через $P_\pi(f) = \{U \mid U \subset X \wedge f(U) \subset U\}$ — множество Р-множеств для f, через $P(f)$ — множество подобъектов отображения f.

Поскольку X и $\emptyset$ являются Р-множествами (если $P_\pi(f) = \{\emptyset, X\}$, то f называется Р-простым отображением [10]), а также пересечение и объединение любого семейства Р-множеств является Р-множеством, то множества $P_\pi(f)$ и $P(f)$ снабжаются структурами полной решетки $VP_\pi(f))$ и $VP(f))$ соответственно. А $P_\pi(f)$ есть топология на X (открытыми являются Р-множества). Отображение f в этой топологии, называемой далее f-топологией, является открытым, поскольку образ Р-множества при отображении f является Р-множеством. Отношение эквивалентности Q называется F-отношением для f, если $(x, x') \in Q \Rightarrow (f(x), f(x')) \in Q$. Если Q является F-отношением, то функция $f_Q : X_Q \to X_Q$, определенная соотношением $f_Q(x_Q) = f(x)_Q$, будет называться фактор-объектом для f.

Пусть $x \in X$. Отображение $d_f(x) : \mathbb{N} \to X$, заданное последовательностью $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$, где $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x), \ldots, f^i(x) = f(f^{i-1}(x))$, $i = 0, 1, 2, ...$, будет называться "динамическим процессом", ассоциированным с f и начинающимся в x или просто "динамическим процессом", если ясно или несущественно каковы x и f. Обозначим $x_f = \{f^i(x)\}_{i=0,1,2,...}$, т.е. x_f является множеством значений функции $d_f(x)$. Множество x_f является наименьшим Р-множеством, содержащим x. Значит, вся совокупность этих множеств является базисом f-топологии. Динамические процессы, для которых множество x_f конечно, отнесем к первому классу, в противном случае — ко второму. У динамических процессов первого класса существуют такие целые k

и p, что $f^k(x) = f^{k+p}(x)$. В этом случае множество $A_f(x) = \{f^k(x), f^{k+1}(x), \ldots, f^{k+p-1}(x)\}$ будет называться собственным аттрактором динамического процесса $d_f(x)$ и Р-множества x_f. Собственный аттрактор является Р-множеством, а соответствующий подобъект является биективной циклической подстановкой конечного множества и Р-простым отображением. Любое Р-простое отображение является биективной циклической подстановкой конечного множества. Два различных собственных аттрактора не имеют общих элементов. Если трактовать i как целочисленное время, то динамические процессы $d_f(x) = (f^i(x))_{i=0,1,2,\ldots}$, имеющие собственный аттрактор, можно наглядно описать следующим образом: динамический процесс в некоторый момент "выходит на аттрактор" и, начиная с этого момента, "крутится" по аттрактору.

Семейство $(f_{U_i} : U_i \to U_i)_{i\in I}$ подобъектов отображения f называется Р-декомпозицией для f, если имеет место $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Если множество I конечно, то Р-декомпозиция называется конечной. Множество Р-декомпозиций обозначается через $PD(f)$, а множество семейств Р-множеств, удовлетворяющих соотношению $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ — через $PD_\pi(f)$. Между множествами $PD(f)$ и $PD_\pi(f)$ существует каноническая биекция. Множества $PD(f)$ (и $PD_\pi(f)$) снабжаются отношением "более простая" следующим образом: Р-декомпозиция $(f_{U_i} : U_i \to U_i)_{i\in I}$ считается более простой, чем Р-декомпозиция $(f_{U'_j} : U'_j \to U'_j)_{j\in J}$, если для всякого i существует такое j, что $f_{U_i} = f_{U'_j}$. Отношение "более простая" является отношением частичного порядка. Отображение f называется Р-компактным, если для всякой его Р-декомпозиции существует более простая конечная Р-декомпозиция. Множество минимальных Р-декомпозиций относительно отношения "более простая" обозначается через $MPD(f)$.

Р-декомпозиция $(f_{U_i} : U_i \to U_i)_{i \in I}$ для f называется СС-декомпозицией или декомпозицией на дизъюнктивную сумму, если семейство $(U_i)_{i \in I}$ является семейством классов эквивалентности по отношению эквивалентности Q, которое будет называться СС-декомпозирующим для f. Всякая СС-декомпозиция отображения f принадлежит множеству $MPD(f)$. Для того, чтобы Q было СС-декомпозирующим для f, необходимо и достаточно, чтобы оно было F-отношением и чтобы фактор-объект по этому отношению действовал на фактор-множестве тождественно. Эквивалентным условием является $(\forall x \in X)((x, f(x)) \in Q)$. Отсюда следует, что пересечение СС-декомпозирующих отношений для f является СС-декомпозирующим для f и, значит, существует минимальное СС-декомпозирующее для f отношение Q_{min}. Имеет место соотношение $x_{Q_{min}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}} f^{-l}(f^k(x))$. Если $Q_{min} = X \times X$, то f называется СС-простым отображением. Р-объекты $f_{x_{Q_{min}}}$ являются СС-простыми для всякого x. Если динамический процесс $d_f(x) = (f^i(x))_{i=0,1,2,\ldots}$ имеет собственный аттрактор, то $x_{Q_{min}} = \bigcup_l f^{-l}(A_f(x))$. Так как прообразы непересекающихся множеств не пересекаются, то в каждом классе эквивалентности $x_{Q_{min}}$ имеется не более одного собственного аттрактора.

Если X конечно, то в каждом классе эквивалентности $x_{Q_{min}}$ имеется единственный собственный аттрактор и поэтому класс $x_{Q_{min}}$ будет называться “областью притяжения” этого аттрактора. Используя терминологию теории графов, можно наглядно описать отображение конечного множества в себя: оно “распадается” на “независимые” подобъекты $f_{x_{Q_{min}}} : x_{Q_{min}} \to x_{Q_{min}}$ (связные компоненты графа), каждый из которых является простым циклом с “прицепленными” к некоторым элементам этого цикла деревьями.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ является областью, замыкание $\overline{E}$ которой ограниченно, $f : \overline{E} \to \overline{E}$ — отображение.

Введем в $\overline{E}$ ε-сеть: такое конечное множество $E_\varepsilon = \{x_i\}_{i=1,2,\ldots N}$ элементов $\overline{E}$, что для любого элемента $x \in \overline{E}$ существует элемент x_k ε-сети E_ε, отстоящий от x на расстояние меньшее ε. Определим отображение $f_\varepsilon : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ следующим образом:

$$f_\varepsilon(x_i) = arg \min_{x_k \in E_\varepsilon} \|f(x_i) - x_k\|$$

Если

$$arg \min_{x_k \in E_\varepsilon} \|f(x_i) - x_k\|$$

состоит более чем из одной точки, то в качестве $f_\varepsilon(x_i)$ выбирается та из них, которая имеет наименьший номер. При численном расчете на компьютере значений динамического процесса $d_f(x_k) = (f^i(x_k))_{i=0,1,2,\ldots}$, где x_k — некоторый элемент множества E_ε, вместо значений $(f^i(x_k))_{i=0,1,2,\ldots}$ будут получаться значения $(f^i_\varepsilon(x_k))_{i=0,1,2,\ldots}$, где ε определяется точностью, с которой выполняются расчеты. Поскольку в силу сделанных предположений функция $f_\varepsilon : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ является отображением в себя конечного множества, то для нее верно все, что было получено выше: множество E_ε “распадается” на классы эквивалентности по отношению $Q_{min}(f_\varepsilon)$, на каждом классе $x_{Q_{min}(f_\varepsilon)}$ соответствующий подобъект является СС-простым, каждый такой класс содержит единственный собственный аттрактор, а сам класс является “областью притяжения аттрактора”. Поэтому “конечное состояние” любого динамического процесса, получаемого путем расчетов, ведущихся на компьютере с некоторой фиксированной точностью, при сделанных предположениях относительно функции $f : \overline{E} \to \overline{E}$ — циклическое движение по аттрактору.

Пусть теперь $f : \overline{E} \to \overline{E}$ — непрерывно везде в $\overline{E}$, $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$ — динамический процесс второго класса, т. е. такой, что все его элементы попарно различны, $B_f(x)$ — множество пределов сходящихся подпоследовательностей последовательности $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$. Множество $B_f(x)$ замкнуто и, силу непрерывности f, является Р-множеством. Динамический процесс $(f^i(x))_{i=0,1,2,...}$ "посещает" любую окрестность любого элемента множества $B_f(x)$. Поэтому множество $B_f(x)$ естественно назвать несобственным аттрактором этого процесса (хотя может быть так, что $\{f^i(x)\}_{i=0,1,2,...} \subset B_f(x)$.

2. Аттракторы динамических систем

Пусть

$$dx^i/dt = g^i(x^1, ..., x^n), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad x \in \overline{E} \qquad (1)$$

— гладкая динамическая система, правые части которой определены в замыкании $\overline{E}$ ограниченной области E. Предполагается, что решение $G(t, x_0)$ системы (1) при начальных условиях $t_0 = 0, x_0 \in \overline{E}$ определено при всех t и принадлежит $\overline{E}$. С помощью понятий и фактов, относящихся к декомпозиции отображений в себя, можно высказать предположения, касающиеся "картины", которая будет наблюдаться при численном интегрировании системы (1). Пусть, для определенности, интегрирование ведется с постоянным шагом h по схеме Рунге-Кутта, имеющей точность $O(h^p)$. Обозначим $t_k = kh, x_k = x(t_k), \quad k = 0, 1, ...$ (здесь $x = (x^1, ..., x^n)$). Переход от значения x_k к значению x_{k+1} осуществляется по формуле $x_{k+1} = x_k + hR(x_k) = f(x_k)$, где функция $R(x_k)$ определяется выбранной точностью p схемы интегрирования (например, для схемы третьего порядка точности $R(x_k) =$

$0.5g(g(x_k) + g(x_k + hg(x_k)))$) и функция $f(x)$ в этом случае есть $x + 0.5g(g(x) + g(x + hg(x)))$. Можно считать, что значения $x_k, \quad k = 0, 1, ...,$ "аппроксимирующие" интегральную кривую, получающуюся при численном интегрировании динамической системы (1), есть динамический процесс, ассоциированный с отображением $f_\varepsilon(x)$ конечного множества E_ε в себя. Функция $f_\varepsilon(x)$ и множество E_ε получаются так, как было описано выше, а ε определяется точностью, с которой числа представимы в компьютере, на котором ведутся расчеты (в любом компьютере представимы конечное количество рациональных чисел, поэтому все расчеты происходят на некоторой ε-сети). Сформулированные выше результаты, касающиеся декомпозиций отображений в себя конечных множеств позволяют сделать вывод о том, при численном интегрировании динамической системы (1) при сделанных предположениях "конечным" состоянием интегральной кривой, получаемой в результате интегрирования динамической системы, является ее циклическое движение по аттрактору. Автор не располагает какими-либо результатами, позволяющими судить о зависимости количества аттракторов и их расположении в $\overline{E}$ от h. Представляется, однако, естественным предположение о том, что если интегрирование ведется сначала при некотором h_1, а затем при $h_2 < h_1$, то аттракторы, получающиеся при h_1 будут в каком-то смысле аппроксимировать аттракторы, получающиеся при h_2. Возможно, например, что динамический процесс, получающийся при h_2 будет некоторое время "крутиться" около аттрактора, получающегося при h_1, затем уходить к другому такому аттрактору, возвращаться к первому и т.д. Описанная картина имеет некоторое сходство с явлением, которое получило название "странный аттрактор" [14].

Подчеркнем, что речь идет о том, какая ситуация будет иметь место при численном интегрировании системы (1), а не о поведении ее реальной интегральной кривой. В настоящее время автор не располагает какими либо данными, позволяющими судить о том, в какой мере аттракторы, получаемые в известных примерах, отражают поведение реальной интегральной кривой той динамической системы, которая подвергалась численному интегрированию в этих примерах.

Если система (1) есть модель некоторого реального процесса, и значения $x^1, ..., x^n$ являются характеристиками реальных объектов, то при трактовке результатов численного интегрирования системы (1) необходимо иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, существует характерная точность $\varepsilon_i \quad i = 1, 2, ..., n$, измерения значений характеристик $x^1, ..., x^n$ такая, что их измерение с точностью на порядок больше $\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, не имеет смысла, поскольку при этом становится непонятно, что есть $x^1, ..., x^n$. (Например, нельзя измерить длину обычного канцелярского стола с точностью до микрона поскольку становится непонятно что есть длина, нельзя измерить расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом с точностью до сантиметра, поскольку непонятно что есть это расстояние, нельзя измерить количество людей на Земле в данную секунду, потому что относительно некоторых людей будет неясно живы они или уже умерли, аналогично для рождений людей и т.д.) Это означает, что те знаки в представлении значений $x^1, ..., x^n$, которые выходят за пределы $\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, не несут об этих характеристиках никакой информации. Во-вторых, имеется характерное время ΔT, на котором модель (1) адекватна и определяет значения $x^1, ..., x^n$ с точностью $\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$. На больших характерных временах на значения характеристик $x^1, ..., x^n$ начинают влиять или внешние по отношению к (1) процессы, или процессы, с которыми процесс (1) взаимосвязан. Поэтому даже, если поведение реальной интегральной кривой динамической системы имеет какое-то отношение к аттракторам, наблюдаемым при ее численном интегрировании, сами аттракторы могут не иметь никакого отношения к реальному процессу, моделью которого является динамическая система.

Литература

1. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционных структурах математических объектов. Доклады РАН 2004, т. 399, №1, с. 15-17.

2. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционных структурах математических объектов. Доклады РАН 2004, т. 399, №1, с. 15-17.

3. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение. Доклады РАН, 1995, т. 340, № 3, с. 314-316.

4. *Павловский Ю.Н.* О P- и F-декомпозициях Σ объектов. Доклады РАН, 1996, т. 351, № 5, с. 603-605.

5. *Павловский Ю.Н.* О декомпозициях снабженных структурой над подчиненными структурами. Доклады РАН, 1997, т. 357, № 5, с. 589–591.

6. *Павловский Ю.Н.* О шкалах родов структур. Доклады РАН, 1998, т. 363, №2, с. 163–165.

7. *Elkin V.I., Pavlovsky J.N.*Decomposition of models of control processes. Journal of Mathematical science. Vol. 88., No. 5, pp. 723–761, 1998.

8. *Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.*Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: ФАЗИС. 1998. 272 с.

9. *Павловский Ю.Н.* О HPF- и PF-морфизмах. Доклады РАН, 1999, т. 369, № 6, с. 745–746.

10. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционном методе построения образов подмножеств, снабженных структурой множеств. Доклады РАН 2000, т. 374, №4, с. 450–452.

11. *Павловский Ю.Н.* Об одном декомпозиционном подходе к построению образов изображений. Доклады РАН 2003, т. 392, №6, с. 733–735.

12. *Павловский Ю.Н.* О декомпозиционных структурах математических объектов. Доклады РАН 2004, т. 399, №1, с. 15-17.

13. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир. 1965. 456 с.

14. *Sparrow C.*The Lorenz equation: bifurcation, chaos and strange4 attractors. Berlin: Springer, 1982. 269 p.