где через I_z обозначено множество тех i, для которых $a_i \le z$.

Заданные положительные величины a_i и b в практических случаях можно считать всегда целыми. Если это не так, то достаточно перейти к более мелким весовым единицам. Опираясь на рекуррентные соотношения (4.1.2), для решения интересующей нас задачи опишем простой численный метод, не требующий предварительного определения всех допустимых наборов. Соответствующий процесс состоит из двух этапов. На первом из них осуществляется так называемый прямой ход. По формуле (4.1.2) для всех целых $z = \overline{z_0, b}$ последовательно вычисляются величины $f(z)$ и при этом фиксируются индексы i_z, на которых достигаются максимумы в (4.1.2). Таким образом, заполняется табл. 1.1.

Таблица 1.1

z_0	z_0+1	z_0+2	…	b
$f(z_0)$	$f(z_0+1)$	$f(z_0+2)$	…	$f(b)$
i_{z_0}	i_{z_0+1}	i_{z_0+2}	…	i_b

На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход. Для получения искомого вектора (4.1.1), для которого $\mu(x) = f(b)$, в комплектуемый набор в первую очередь включается предмет с номером i_{z_1}, где $z_1 = b$, и подсчитывается величина $z_2 = z_1 - a_{i_{z_1}}$. Если $z_2 \ge z_0$, то в набор включается предмет с номером i_{z_2} и подсчитывается величина $z_3 = z_2 - a_{i_{z_2}}$, и т.д. Так как при каждом $k \ge 1$, очевидно, $z_{k+1} \le z_k - z_0$, то через конечное число описанных шагов окажется, что $z_{k+1} < z_0$. На этом комплектование искомого набора заканчивается. Для иллюстрации изложенного процесса рассмотрим простой числовой пример.

Пример. Пусть в задаче об оптимальной загрузке рюкзака m =10, b =65, а величины a_i и c_i совпадают с приведенными данными в табл. 1.2.

Таблица 1.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	7	10	12	15	17	19	22	25	28	30
c_i	11	18	22	29	34	40	47	55	60	65

В данном случае $z_0 = \min a_i = 7$. В табл. 1.3 приведены результаты первого этапа (прямого хода) процесса. В ней же выделены номера предметов, которые на втором этапе (при обратном ходе) последовательно включались в оптимальный набор, а также отвечающие им величины

$$z_1 = 66; \ \ z_2 = 66 - 19 = 47;$$

$$z_3 = 47 - 22 = 25;$$

Таблица 1.3

	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	11	11	11	18	18	22	22	22	29	29	34	34	40	40	40
	1	1	1	2	2	3	3	1	4	4	5	5	6	6	6
	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	47	47	47	55	55	55	60	60	65	65	66	66	69	73	74
	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	1	1	3	2	5
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
	77	80	81	84	87	89	89	95	95	95	102	102	105	110	110
	3	6	5	4	6	5	4	6	6	6	7	7	6	8	8
	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
	112	115	115	120	120	121	125	125	128	130	132	135	136	139	142
	7	8	8	8	8	1	9	9	2	10	3	6	5	4	6

Таким образом, искомый оптимальный набор характеризуется следующим десятимерным вектором

2. Расчет рационального раскроя линейных материалов

При решении задачи возникают специфические трудности, связанные с перечислением возможных способов раскроя каждой единицы исходного материала. Здесь будет показано, что в случае раскроя линейных материалов (полос профильного проката, труб и т. д.) указанные трудности могут быть легко преодолены путем решения на каждом шаге процесса последовательного улучшения некоторой задачи об оптимальной загрузке рюкзака.

Для определенности будем считать, что речь идет о раскрое профильного проката, поступающего в виде полос постоянной длины . Из этих полос при производстве некоторого изделия необходимо вырезать видов заготовок, причем заготовки вида имеют длину и их требуется для изготовления одного изделия штук.

Предполагается, что при любых целых неотрицательных , удовлетворяющих условию

(4.2.1)

из одной полосы можно вырезать набор заготовок, содержащий заготовок каждого вида . Следовательно, возможные раскрои поступающих полос характеризуются неотрицательными целочисленными векторами

(4.2.2)

удовлетворяющими условию (4.2.1). Множество таких векторов мы обозначим через и рассмотрим, кроме того, -мерный вектор отвечающий требуемому набору заготовок.

Раскройный план определяется выбором некоторых раскроев из , а также вектора с неотрицательными компонентами, указывающими, какое количество полос будет разрезаться по каждому из выбранных раскроев в расчете на одно изделие. Если при этом получаемый комплект заготовок совпадает с требуемым, т. е. то раскройный план называется допустимым.

Задача состоит в разыскании допустимого плана, при котором достигает минимума величина характеризующая расход материала на одно изделие. Другими словами, на множестве допустимых раскройных планов требуется максимизировать линейную функцию

(4.2.3)

Нетрудно проверить, что при выполнении естественного требования

(4.2.4)

означающего возможность получения из поступающих полос всех требуемых заготовок, в задаче всегда имеются допустимые раскройные планы. Действительно, ввиду (4.2.4) при любом из полосы может быть получено некоторое число соответствующих заготовок. Но тогда элементарные раскрои

(4.2.5)

где

(4.2.6)

вместе с вектором

(4.2.7)

определяют некоторый допустимый раскройный план. Так как, кроме того, максимизируемая линейная функция (4.2.3) на множестве допустимых раскройных планов, очевидно, ограничена сверху нулем, то исследуемая задача и двойственная к ней являются разрешимыми.

Множество раскроев , как и в общем случае, называется базисным, если соответствующие векторы образуют базис в . Каждому базисному множеству отвечает некоторый вектор

(4.2.8)

компоненты которого однозначно определяются из условия

(4.2.9)

Если при этом , т. е. множество *К* и отвечающий ему вектор (4.2.8), удовлетворяющий условию (4.2.9), определяют допустимый раскройный план, то *К* называется допустимым базисным множеством (д. б. м.). Точно так же каждому базисному множеству отвечает некоторый вектор

(4.2.10)

который однозначно определяется из системы линейных уравнений

(4.2.11)

Если при этом для всех векторов имеет место неравенство

(4.2.12)

то рассматриваемое базисное множество называется двойственно допустимым (д. д. б. м.).

Если же базисное множество является одновременно допустимым и двойственно допустимым, то оно вместе с отвечающим ему вектором (4.2.8) определяет оптимальный (наиболее экономный) раскройный план, а вектор (4.2.10) представляет решение двойственной задачи.

Лемма 1.1. *Если отвечающий базисному множеству К вектор* (4.2.10) *имеет, по крайней мере, одну отрицательную компоненту, например то такое базисное множество не является двойственно допустимым. При этом легко строится раскрой . Для которого имеет место строгое неравенство*

(4.2.13)

Доказательство. Каждое базисное множество ввиду линейной независимости соответствующих векторов содержит некоторый раскрой при котором в выкраиваемый набор входят заготовки типа , т.е. Так как все базисные раскрои удовлетворяют соотношениям (4.2.11), то и для выделенного раскроя имеет место равенство

Но тогда в качестве искомого может быть принят раскрой

который получается из путем исключения заготовок типа . Это завершает доказательство леммы.

Важно отметить, что рассмотренные элементарные раскрои (4.2.5), определяемые условием (4.2.6), образуют некоторое д. б. м. *К,* для которого вектор совпадает с вектором (4.2.7). Поэтому в данном случае при реализации прямого метода последовательного улучшения в качестве исходных могут быть приняты указанное д. б. м. *К* и отвечающий ему вектор (4.2.7).

Напомним, что на каждом шаге прямого метода последовательного улучшения имеется некоторое д. б. м. *К* и отвечающий ему вектор (4.2.7). Исходя из этих исходных данных, выполняются следующие процедуры.

I. Определение вектора *у(К).* Этот вектор, как и в общем случае, находится из системы (4.2.11).

II**.** Проверка двойственной допустимости д. б. м. . В этой процедуре требуется проверить выполнение неравенств (4.2.12) для всех раскроев . При этом возможны два случая:

а) указанные неравенства выполняются для всех , т. е. д. б. м. *К* является также двойственно допустимым. Тогда имеющийся раскройный план будет оптимальным, а вектор *у (К)* представляет решение двойственной задачи (процесс на этом заканчивается);

б) для некоторого раскроя имеет место строгое неравенство (4.2.13), т. е. д. б. м. *К* не является двойственно допустимым. Тогда необходимо найти соответствующий раскрой и перейти к следующей процедуре.

Остается пояснить, каким образом в рассматриваемой процедуре можно преодолеть трудности, связанные с определением всех раскроев , которые возникают ввиду леммы 1.1 лишь при неотрицательности соответствующих векторов (4.2.10).

В конечном счете нас интересует лишь вопрос о том, какой из двух возможных случаев имеет место для текущего д. б. м. *К.* Кроме того, при реализации случая б) необходимо определить раскрой . Все это может быть сделано с помощью решения задачи максимизации линейной функции

(4.2.14)

на множестве неотрицательных целочисленных векторов (4.2.2), удовлетворяющих условию (4.2.1). Но эта задача при неотрицательном векторе (4.2.10) отличается от рассмотренной задачи об оптимальной загрузке рюкзака лишь обозначениями. Следовательно, с помощью изложенного выше простого процесса может быть найдена величина

а также вектор , на котором достигается указанный максимум. При этом ввиду (4.2.11) имеем

Если в последнем неравенстве достигается равенство, то это означает, что имеет место случай а). Если же имеет место строгое неравенство, то мы находимся в ситуации б). Тогда, фиксируя найденный вектор , переходим к следующей процедуре.

III. Вычисление коэффициентов разложения вектора по базисным векторам. Искомые коэффициенты, как и в общем случае, определяются из системы линейных уравнений

При этом ввиду неотрицательности рассматриваемых векторов по крайней мере один из коэффициентов будет положительным, т. е.

IV. Определение . Эта величина вычисляется по формуле

Фиксируя при этом на котором достигается минимум, переходим к заключительной процедуре.

V. Подготовка информации к следующему шагу**.** Новое д. б. м. получается путем замены в старом д. б. м. *K* вектора вектором , которому в дальнейшем удобно присвоить номер Что касается компонент нового вектора , то они вычисляются по формулам

При этом

.

Описанный процесс поясним на простом числовом примере.

Пример. Пусть в задаче рационального раскроя m=3, L=24, а величины и совпадают с приведенными в табл. 2.1.

В соответствии с изложенным на первом шаге процесса последовательного улучшения в д. б. м. *K* включаются векторы

отвечающие элементарным раскроям. Компоненты этих векторов указаны в соответствующей части табл. 2.3, построенной по типу табл. 2.2, где через обозначены компоненты базисных векторов . В той же табл. 2.3 приведены результаты каждого из трех шагов процесса последовательного улучшения. В табл. 2.4 даны динамические шкалы, с помощью которых решались вспомогательные задачи об оптимальной загрузке рюкзака. При этом в первых двух из них, где , выделены номера заготовок, которые при обратном ходе последовательно включаются в оптимальные наборы.

Таблица 2.1

	1	2	3
	4	5	8
	1	8	1

Таблица 2.2

Номер шага						

Таблица 2.3

Шаг 1	6	0	0	0,167	0,167	0,167
	0	4	0	2,000	1,000	0,250
	0	0	3	0,333	0	0,333
	1	4	0	2,500	1,000	1,167
Шаг 2	1	4	0	1,000	0	0
	0	4	0	1,000	0,750	0,250
	0	0	3	0,333	0,333	0,333
	0	3	1	2,333	1,000	1,083
Шаг 3	1	4	0	1,000	-	0
	0	4	0	0,250	-	0,250
	0	3	1	1,000	-	0,250
	-	-	-	2,250	-	1,000

Таблица 2.4

Шаг 1		4	5-7	8	9	10,11	12	13	14	15
		0,167	0,250	0,334	0,417	0,500	0,501	0,584	0,667	0,750
		1	2	1	1	2	1	1	1	2
		16	17	18	19	20	21	22	23	24
		0,750	0,751	0,834	0,917	1,000	1,000	1,001	1.084	1,167
		2	1	1	1	2	2	1	1	1
Шаг 2		5-7	8,9	10-12	13-14	15-17	18,19	20-22	23	24
		0,250	0,333	0,500	0,583	0,750	0,833	1,000	1,083	1,083
		2	3	2	2	2	2	2	2	2
Шаг 3		5-7	8,9	10-12	13,14	15-17	18,19	20-22	23	24
		0,250	0,250	0,500	0.500	0,750	0,750	1,000	1,000	1,000
		2	2	2	2	2	2	2	2	2

3. Задача об увеличении объемов выпуска продукции

Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S=700 *тыс.руб*. Использование *i*-м предприятием *тыс.руб*. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемой значением нелинейной функции

Найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции, если значения и приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Объем капиталовложений (*тыс.руб.*)	Прирост выпуска продукции в зависимости от объема капиталовложений (*тыс.руб.*)		
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3
0	0	**0**	**0**
100	30	**50**	**40**
200	50	**80**	**50**
300	90	**90**	**110**
400	110	**150**	**120**
500	170	**190**	**180**
600	180	**210**	**220**
700	210	**220**	**240**

Решение.

Для решения данной задачи следует составить рекуррентное соотношение Беллмана. В рассматриваемом случае это соотношение приводит к следующим функциональным уравнениям:

(4.3.1)

Здесь функции определяют максимальный прирост выпуска продукции при соответствующих распределениях X *тыс.руб.* капиталовложений между *i* предприятиями. Поэтому значение функции вычисляется лишь для одного значения X=S, так как объем капиталовложений, выделяемых для всех n предприятий, равен S *тыс.руб.*

Используя теперь рекуррентное соотношение (4.3.1) и исходные данные табл. 3.1, приступим к нахождению решения задачи, то есть к определению сначала условно оптимальных, а затем и оптимальных распределений капиталовложений между предприятиями.

Начнем с определения условно оптимальных капиталовложений, выделяемых для развития первого предприятия. Для этого находим значения для каждого *X*, принимающего значения 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 и 700.

Пусть , тогда Возьмем теперь X=100. Тогда, используя табл. 3.1, получаем

Здесь первая строка соответствует решению , а вторая строка — решению Так как при первом решении прирост выпуска продукции не обеспечивается, а при втором равен 30 *тыс.руб.*, то условно оптимальным решением является

Аналогично находим условно оптимальные решения для других значений *X*:

Результаты вычислений и полученные соответствующие условию оптимальные решения записываем в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Объем капиталовложений X, выделяемых первому предприятию (*тыс.руб.*)	Максимальный прирост выпуска продукции (*тыс.руб.*)	Условно оптимальный объем капиталовложений , выделяемых первому предприятию (*тыс.руб.*)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Используя теперь данные таблиц 3.2 и 3.1, определим условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию. Найдем

для каждого из допустимых значений X, равных 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700:

Полученные результаты и найденные условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию, записываем в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

Объем капиталовложений X, выделяемых двум предприятиям (тыс.руб.)	Максимальный прирост выпуска продукции (тыс.руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений, выделяемых второму предприятию (тыс.руб.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходим теперь к нахождению значений

используя для этого данные табл. 3.3 и 3.1.

Так как в данном случае число предприятий равно трем, то проводим вычисление лишь для одного значения X=700:

Следовательно, максимальный прирост выпуска продукции составляет 270 *тыс.руб*. Это имеет место тогда, когда третьему предприятию выделяется 600 *тыс.руб*., а первому и второму предприятиям — 100 *тыс.руб*. Тогда, как видно из табл. 3.3, второму предприятию следует выделить 100 *тыс.руб*.

Итак, мы получили оптимальный план распределения капиталовложений между предприятиями, согласно которому обеспечивается максимальный прирост выпуска продукции.

4. Задача об оптимальной загрузке транспортного средства неделимыми предметами

Пусть в самолет требуется погрузить четыре вида предметов, чтобы сумма эффективностей этих предметов (например, стоимость) была максимальна. Грузоподъемность самолета равна ; — масса соответствующей единицы различных предметов; — соответствующая эффективность каждого предмета; — число предметов различных видов, взятых на борт самолета.

Решение.

Целевая функция задачи

ограничение

Для определенности примем, что , условных единиц. Будем решать задачу в два этапа. На первом этапе найдем возможные оптимальные варианты планов (решений) при последовательной оптимизации по одной переменной, а на втором этапе выберем из них оптимальное решение нашей задачи.

Первый этап. Он будет содержать четыре шага.

На первом шаге находим возможные оптимальные варианты загрузки самолета только предметами первого вида. Нам необходимо найти и запомнить значения и соответствующую им максимальную стоимость груза при различных возможных значениях В этом случае максимальная эффективность груза

при условии . Так как , то для нахождения максимума надо взять возможно большим, то есть — наибольшее целое число, не превосходящее , таким образом Через

обозначают наибольшее целое число, не превосходящее .

Зададим значения с некоторым шагом и найдем для них и . Очевидно, если грузоподъемность самолета меньше 24 ед., то ни одного предмета первого вида погрузить нельзя. При грузоподъемности от 24 до 47 ед. можно погрузить 1 ед. предмета первого вида и так далее. Результаты представим в виде таблиц. Значения и приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

0…23	0	0
24…47	96	1
48…71	192	2
72…87	288	3

В таблицах принят более широкий предел для — до 87 ед.

Проведем оптимизацию на втором шаге. Рассмотрим эффективность груза, если загрузить самолет предметами первого и второго типов.

Максимальную эффективность загрузки обозначим . Если предметов второго типа взято , то масса предметов первого типа должна быть не больше . Максимальная эффективность предметов первого типа при этом

,

а общая эффективность груза

.

Тогда

(4.4.1)

Максимум этого выражения ищем только по . Но мы не знаем какая грузоподъемность может потребоваться для предметов второго типа. Поэтому мы должны рассмотреть выражение (4.4.1) для различных значений от 0 до 83. При вычислении воспользуемся уже полученными данными (таблица 4.1).

Например, возьмем ед. Для возможны значения 0, 1, 2. Соответствующая эффективность от предметов второго вида равна 0, 85, 170, а для предметов первого вида остается грузоподъемность 46, 24, 2 ед. Из табл. 4.1 для 46, 24, 2 ед. находим 96, 96, 0 ед. Складываем соответствующие значения 0+96=96 ед., 85+96=181 ед., 170+0=170 ед., и выбираем наибольшее — 181 ед. Оно получено при . Для заносим в табл. 4.2 .

Результаты вычисления и X_2 приведены в табл. 4.2.