Н.И. ГРАЧЕВ, Ю.Г. ЕВТУШЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 24 XII 1976)

1. Рассмотрим задачу об отыскании минимакса

$$\min_{x\in E_n}\max_{y\in E_m} F(x,y); \tag{1}$$

здесь $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, E_i есть i-мерное эвклидово пространство, $x = [x^1,\ldots,x^n]$, $y=[y^1,\ldots,y^m]$.

Пусть $z_* = (x_*, y_*)$ — точка строгого локального решения (1), т.е. существуют окрестности X и Y точек x_* и y_* соответственно такие, что для любых $x\in X$, $y\in Y$, $x\neq x_*$, $y\neq y_*$ имеют место неравенства

$$F(x_*,y) < F(x_*,y_*) < F(x,\bar y(x)) = \sup_{y\in Y} F(x,y).$$

Согласно [1], для того чтобы точка z_* была строгим локальным решением (1), необходимо, чтобы

$$F_x(z_*) = F_y(z_*) = 0, \tag{2}$$

и достаточно, чтобы были отрицательно определенными следующие квадратичные формы:

$$y^T F_{yy}(z_*) y < 0, \quad x^T[F_{xy}(z_*)F_{yy}^{-1}(z_*)F_{yx}(z_*) - F_{xx}(z_*)]x < 0 \tag{3}$$

для $\forall y\in E_m$, $||y||\neq 0$, $\forall x\in E_n$, $||x||\neq 0$.

В [1, 2] предложены итеративные методы решения (1), однако они оказались трудоемкими в случае задач высокой размерности, так как требовали многократного обращения матриц вторых производных. Для приближенных расчетов можно использовать следующий легко реализуемый прием. Будем отыскивать предельные (при $t\to\infty$) точки решения задачи Коши

$$\dot x = -\varepsilon F_x(x,y), \quad \dot y = F_y(x,y), \quad (\dot\cdot) = d/dt, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Возможен дискретный вариант, где

$$x_{s+1} = x_s - \varepsilon\alpha F_x(x_s,y_s), \qquad y_{s+1} = y_s + \alpha F_y(x_s,y_s), \qquad s = 0,1,2,\ldots; \tag{5}$$

здесь $0<\varepsilon<1$, $0<\alpha$.

Обозначим решения (4) через $x(z_0,t,\varepsilon)$, $y(z_0,t,\varepsilon)$, где $z_0 = (x_0,y_0)$. Используя результаты [3, 4], можно показать, что имеет место

Теорема 1 *Пусть функция $F(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки z_*, в ней выполнены условия (2), (3).*

Тогда существуют окрестность W точки z_* и числа $0<\bar\alpha$, $0<\bar\varepsilon$ такие, что для всех $z_0\in W$, $0<\alpha<\bar\alpha$, $0<\varepsilon<\bar\varepsilon$ имеет место сходимость решений (4) и (5) к z_*, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} x(z_0,t,\varepsilon) = x_*, \qquad \lim_{t\to\infty} y(z_0,t,\varepsilon) = y_*,$$
$$\lim_{s\to\infty} x_s = x_*, \qquad \lim_{s\to\infty} y_s = y_*.$$

Теорема 1 приводит к простой схеме решения (1). Наличие в (4) и (5) медленно и быстро меняющихся переменных усложняет расчеты, однако в ряде задач высокой размерности такой подход оказывается весьма эффективным. Фактически мы совершили переход, обратный тому, который обычно делается в теории сингулярных уравнений: вместо решения вырожденной системы (которая может оказаться чрезвычайно сложной) решается задача (4), эквивалентная сингулярно возмущенной.

Пример. Пусть $F(x,y) = e^{x^2}\sin 2\pi(x-y)$; легко видеть, что в этом случае

$$\min_{x\in E_1}\max_{y\in E_1} F(x,y) = 1, \qquad \max_{y\in E_1}\min_{x\in E_1} F(x,y) = -1.$$

В точках решения обеих задач выполнены необходимые и достаточные условия минимакса и максимина соответственно. Поэтому при $\varepsilon \ll 1$ решения (4), (5) сходятся к минимаксному решению, при $\varepsilon \gg 1$ — к максиминному решению.

Приведем еще два метода решения (1), в которых

$$\dot{x} = -F_x(x, y(x)), \qquad F(x, y(x)) = \max_{y \in E_m} F(x, y); \tag{6}$$

$$\dot{x} = -\varepsilon F_x(x, y), \qquad \dot{y} = -F_{yy}^{-1}(x, y) F_y(x, y). \tag{7}$$

Их дискретные варианты имеют вид

$$x_{k+1} = x_k - \varepsilon F_x(x_k, y_k), \qquad F_(x_k, y_k) = \max_{y \in E_m} F(x_k, y); \tag{8}$$

$$x_{k+1} = x_k - \varepsilon F_x(x_k, y_k), \qquad y_{k+1} = y_k - F_{yy}^{-1}(x_k, y_k) F_y(x_k, y_k). \tag{9}$$

Достаточные условия сходимости формулируются точно так же, как и в Теореме 1 (за исключением того, что в дискретных вариантах нет необходимости вводить малый шаг α).

2. Методы приходится значительно видоизменять для решения задач с иерархической структурой и игр с непротивоположными интересами [5]. Методы решения таких задач приведены в [6, 7]. Следуя [7], задачу отыскания гарантирующей стратегии запишем в следующем виде:

$$J = \min_{x \in E_n} F(x, y) \min_{y \in E_m} K(x, y); \tag{10}$$

здесь при каждом фиксированном x ищется множество $y(x)$ из условия

$$K(x, y(x)) = \min_{y \in E_m} K(x, y),$$

далее вычисляется

$$J = \min_{x \in E_n} \max_{y \in y(x)} K(x, y(x)) = K(x_*, y(x_*)) = K(x_*, y_*).$$

Точку (x_*, y_*) будем называть *решением задачи (10)*. Если функция $K(x, y)$ достигает значения строгого локального минимума по y в точках $y(x)$ при всех значениях x из некоторой окрестности x_* и функция $F(x, y(x))$ достигает значения строгого локального минимума в точке x_*, то будем говорить, что $z_* = (x_*, y_*)$ — точка строгого локального решения задачи (10). Обозначим

$$z = (x, y), \quad B(z) = K_{yy}^{-1}(z) K_{yx}(z), \quad H(z, \lambda) = F(z) + K_y^T(z)\lambda,$$
$$N(z, \lambda) = H_{xx}(z, \lambda) - B^T(z) H_{yx}(x, \lambda) - H_{yx}(z, \lambda) B(z) + B^T(z) H_{yy}(z, \lambda) B(z);$$

здесь $\lambda \in E_m$.

Согласно [7], для того чтобы точка z_* была строгим локальным решением (10), необходимо, чтобы

$$K_y(z_*) = 0, \qquad F_x(z_*) - B^T(z_*) F_y(z_*) = 0, \tag{11}$$

и достаточно, чтобы $\forall y \in E_m,\ \forall x \in E_n,\ ||x|| \neq 0, ||y|| \neq 0,$

$$y^T K_{yy}(z_*) y > 0, \qquad x^T N(z_*, \lambda_*) x > 0; \tag{12}$$

здесь λ_* определяется из условия

$$H_x(z_*, \lambda_*) = 0.$$

Приведем три метода решения (10):

$$\dot{x} = -\varepsilon[F_x(x, y) - B^T(x, y) F_y(x, y)] = -\varepsilon\varphi(x, y), \qquad \dot{y} = -K_y(x, y); \tag{13}$$

$$\dot{x} = -\varphi(x, y(x)), \qquad K(x, y(x)) = \min_{y \in E_m} K(x, y); \tag{14}$$

$$\dot{x} = -\varepsilon\varphi(x, y), \qquad \dot{y} = -K_{yy}^{-1}(x, y) K_y(x, y). \tag{15}$$

Теорема 2 *Пусть функции $F(z)$, $K(z)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки z_*, в ней выполнены условия (11), (12).*

Тогда методы (13), (14), (15) и их дискретные варианты вида (5), (8), (9) локально сходятся к точке z_*.

3. Применим изложенный подход к решению задач нелинейного программирования:

$$\min_{x\in X} F(x), \qquad X = \{x \in E_n : g(x) = 0,\ \ h(x) \le 0\}; \tag{16}$$

здесь $x \in E_n$, $g \in E_c$, $h \in E_m$. Следуя [8, 9], составим модифицированную функцию Лагранжа

$$L(x,p,w) = F(x) + \sum_{i=1}^{c} p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^{m} (w^i)^2 h^i(x).$$

Будем отыскивать

$$\max_{p\in E_c}\max_{w\in E_m}\min_{x\in E_n} L(x,p,w).$$

Приведенные выше методы дают три схемы решения задачи (16):

$$\dot p = \varepsilon L_p(x,p,w), \qquad \dot w = \varepsilon L_w(x,p,w), \qquad \dot x = -L_x(x,p,w); \tag{17}$$

$$\dot p = L_p(x(p,w),p,w), \quad \dot w = L_w(x(p,w),p,w), \quad L(x(p,w),p,w) = \min_{x\in E_n} L(x,p,w); \tag{18}$$

$$\dot p = L_p(x,p,w), \quad \dot w = L_w(x,p,w), \quad \dot x = -L_{xx}^{-1}(x,p,w)L_x(x,p,w). \tag{19}$$

Предполагаем, что существует решение задачи (16) — точка x_*, в ней выполнено условие регулярности ограничений (у.р.о.), т. е. все векторы $g_x^i(x_*)$ и векторы $h_x^j(x_*)$ такие, что $h^j(x_*) = 0$, линейно независимые. Кроме того, в стационарной точке $z_* = (x_*, p_*, w_*)$ (такой, что в ней $L_x = L_p = L_w = 0$) выполнено условие строгой дополняющей нежесткости (у.с.д.н.), т. е. из $h^j(x_*) = 0$ следует, что $w^j \ne 0$.

Теорема 3 *Пусть функция $L(x,p,w)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности допустимой стационарной точки z_*, матрица $L_{xx}(z_*)$ — положительно определенная, выполнены у.р.о. и у.с.д.н.*

Тогда существуют достаточно малые числа $\bar\varepsilon$, $\bar\alpha$ такие, что при $0 < \varepsilon < \bar\varepsilon$, $0 < \alpha < \bar\alpha$ методы (17), (18), (19) и их дискретные варианты вида (5), (8), (9) локально (экспоненциально и со скоростью геометрической прогрессии соответственно) сходятся к точке z_*.

Сходимость (17) доказана в [9] для случая $\varepsilon = 1$. Введение малого параметра ε улучшает сходимость, приближая метод к более трудоемкому, но практически более быстро сходящемуся методу (18).

References

[1] *Ю.Г. Евтушенко*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т.14, No.3 (1974).

[2] *Ю.Г. Евтушенко*, там же, т.14, No.5 (1974).

[3] *А.Н. Тихонов*, Матем. сб., т.31(73), No.3 (1952).

[4] *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., "Наука", 1973.

[5] *Ю.Г. Гермейер, Н.Н. Моисеев*, В сб.: Проблемы прикладной математики и механики, М., "Наука", 1971.

[6] *И.И. Еремин*, В сб.: Нестационарные процессы математического программирования, Свердловск, 1974.

[7] *Н.И. Грачев, Ю.Г. Евтушенко*, В сб.: Исследование операций, в.4, М., Изд. ВЦ АН СССР, 1974.

[8] *Ю.Г. Евтушенко*, ДАН, т.221, No.5 (1975).

[9] *Ю.Г. Евтушенко*, Журн. вычислит, матем. и матем. физ., т.15, No.2 (1975).