Глава 4. Нестратегические игры

Рассматриваются нестратегические аспекты теории игр, когда основным вопросом является не выбор оптимальных стратегий, а установление разумного определения выигрышей между участниками конфликта. Изучается случай кооперативного поведения игроков, вступающих в коалиции, действующих совместно и обменивающиеся выигрышами. Описываются важнейшие понятия и принципы оптимальности теории кооперативных игр: характеристическая

функция, дележ, конфигурация, ядро, решение по Нейману-Моргенштерну, арбитражная схема, вектор Шепли.

§ 4.1. Кооперативные игры

До сих пор игры исследовались с позиций индивидуального выбора рациональных стратегий. Совместные действия игроков почти не рассматрива- лись (исключение составляли интерпретация равновесия как коллективного соглашения и возможные коалиционные отклонения при определении понятия сильного равновесия). Информационные аспекты носили четко определенный характер, связанный с сообщением о выбранных стратегиях или текущем состоянии процесса игры.

Вместе с тем, в неантагонистических играх игрокам иногда полезно об- мениваться информацией до выбора стратегий о своих намерениях или принципах поведения, осуществлять совместные (коллективные) действия, делиться выигрышами во имя общих интересов и т.д. Все это может приводить к образованию коалиций (подмножеств всех игроков), предпринимающих совместные действия (коалиций действия) или имеющих общие интересы (коалиций интересов). Общей теории коалиционных игр в настоящее время практически нет, исследованы лишь отдельные простейшие классы.

При изучении игр, в которых допустимы совместные действия игроков, можно ставить вопрос не о принципах рационального (оптимального) выбора стратегий, а непосредственно о возможных выигрышах игроков, удовлетворяющих тем или иным принципам устойчивости (достижимости). Игры, в которых выбору подлежит исход в платежах (выигрыши игроков), а вопрос о его фактической реализации в стратегиях не ставится, называются нестратегическими. Принципы оптимальности в нестратегических играх отражают те или иные требования к выигрышам (устойчивость, справедливость и т.д.). Изучение нестратегических аспектов в коалиционных играх, вообще говоря, проще стратегических, так как позволяет отвлечься от конкретных механизмов переговоров об образовании коалиций, совместных выборах стратегий и т.п. Вместе с тем во многих практических ситуациях вполне достаточно определить выигрыши игроков.

Существует ряд классов нестратегических игр, различающихся формой описания и понятиями решений. Наиболее известны кооперативные игры в форме характеристической функции. Предположим, что в игре п лиц игроки могут образовывать всевозможные коалиции, т.е. множество коалиций представляет собой множество всех подмножеств из $N=\{1,2,...,n\}$. Пусть члены коалиции предпринимают совместные действия, т.е. координируют свои стратегии, и неограниченно обменивают выигрыши (игры с побочными платежами). Тогда результат деятельности коалиции естественно оценивать суммарным выигрышем её участников. Для его описания полезным является понятие характеристической функции.

Определение 4.1. *Характеристической функцией игры п лиц называется вещественная функция $v(S)$, ставящая в соответствие любой коалиции $S \subseteq N$ некоторое число (которое* обычно *интерпретируется как тот выигрыш, который могут гарантировать себе в сумме все члены коалиции S независимо от действий остальных игроков).*

Определение 4.2. *Игрой n лиц в форме характеристической функции называется объект* $<N, v(S\}>$, *где функция* $v(S)$ *удовлетворяет условиям (свойствам)*

$$v(\varnothing)=0; \tag{4.1}$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ если } S \cap T = \varnothing . \tag{4.2}$$

Свойство (4.2) называется супераддитивностью; очевидная интерпретация его такова: при объединении двух коалиций, не содержащих общих членов, возможности новой коалиции, по крайней мере, не меньше суммы возможностей объединившихся коалиций. Это свойство приводит к тому, что становится выгодным объединение возможно большего числа игроков. Самое широкое объединение-это коалиция всех игроков N (большая коалиция). Поэтому при условии (4.2) можно считать, что фактически образуется большая коалиция (т.е. она является единственной коалицией действия) и задача состоит в разумном распределении выигрышей между игроками.

Определение 4.2 является классическим определением кооперативной игры. В настоящее время существует ряд его обобщений и модификаций. Одно из них состоит в отказе от свойства супераддитивности характеристической функции. В этом случае уже не всегда имеет место стремление к максимально широкому объединению, т.к. некоторые игроки или коалиции могут быть «обузой» для других, что, кстати, типично в практических ситуациях. Другое обобщение связано с возможными запретами на образование некоторых коалиций, т.е. множество коалиций является не множеством всех подмножеств N (его принято обозначать 2^N), а некоторой его частью. Такое положение весьма характерно для практики (отсутствие каналов связи, антимонопольное законодательство, личные симпатии и антипатии и т.д.). Третье обобщение - запрет побочных платежей. Это может быть следствием того, что выигрыши игроков измеряются в разных единицах и их передача от одного к другому или невозможна (например, различные виды удовольствия), или приводит к изменению «полезности» (нетрансферабельная полезность). В этом случае для описания выигрышей игроков в коалиции вводят векторную характеристическую функцию, каждая компонента которой измеряет выигрыш одного из членов коалиции.

Более подробно различные обобщения и модификации освещены в специальной литературе [16,17].

Здесь мы будем рассматривать только классические кооперативные игры. Между игроками в нормальной форме и в форме характеристической функции (т.е. между стратегическими и нестратегическими аспектами) существуют определенные связи. Так, если первоначально игра задана в нормальной форме и игроки применяют только чистые стратегии, то можно ввести характеристическую функцию

$$v(S) = \max_{u_i,\, j\in S}\ \min_{u_j,\, j\in N\setminus S} \sum_{i\notin S} g_i(u_1,\ldots,u_n). \qquad \textbf{(4.3)}$$

Величина *v(S)* представляет собой максимально гарантированный суммарный выигрыш игроков, входящих в коалицию S, или нижнюю цену антагонистической игры, в которой один игрок - это коалиция S с функцией выигрыша, равной сумме выигрышей ее участников, а другой игрок - это остальные участники игры n лиц, объединившиеся в коалицию и стремящиеся уменьшить суммарный выигрыш коалиции S. Такое введение характеристической функции соответствует определению 4.1. Заметим, что функция (4.3), очевидно, является супераддитивной.

Если при переходе от нормальной формы к форме характеристической функции использовать смешанные стратегии, то в качестве функции ν(S) можно взять нижнюю цену антагонистической игры коалиций S и N\S в смешанных стратегиях (или цену этой игры, если она существует). Можно также использовать и совместные смешанные стратегии, т.е. вероятностные распределения на произведениях множеств чистых стратегий игроков, входящих в одну коалицию, что расширяет ее возможности.

Рассмотрим кооперативную игру с произвольной характеристической функцией, удовлетворяющей условиям (4.1),(4.2).

Исходным понятием при определении разумного распределения выигрышей в кооперативной игре является дележ.

Определение *4.3*. *Дележом для кооперативной игры в форме характеристической функции называется вектор* $z^{..}=(z_1,.,.,z_n)$, *удовлетворяющий условиям коллективной*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = v(N)$$

и индивидуальной рационалъностей

$$z_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N.$$

Требование коллективной рациональности означает, что все n участников этой игры получат в сумме максимально возможный выигрыш. Это требование валентно оптимальности по Парето, т.к. если для вектора z выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} z_i < v(N),$$

то он доминируется вектором, достижимым для всех участников (достаточно взять вектор z+ε, где $\varepsilon_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leq v(N) - \sum_{i=1}^{n} z_i$).

Таким образом, условие коллективной рациональности (или оптимальности по Парето) естественно, однако оно фактически подразумевает образование большой коалиции (иначе, если все игроки не договорятся об объединении, то они могут в сумме и не достичь величины *v(N)).* Требование индивидуальной рациональности является бесспорным, так как ни один игрок не согласится получить меньше, чем то, что он может обеспечить себе сам, независимо от действий других игроков.

Понятия решений в кооперативных играх так или иначе связаны с идеей устойчивости дележей, т.е. отсутствием у игроков мотивов или возможностей к нарушению сложившегося соглашения о распределении выигрышей.

Определение 4.4. *Дележ z доминирует дележ y по коалиции* $S(z \underset{s}{\succ} y)$,

если

$$z_i > y_i \ \forall \in S; \qquad (4.4)$$

$$\sum_{i\in S} z_i \le v(S). \qquad (4.5)$$

Дележ z доминирует y (z $\succ$ y), если существует такая коалиция S,что z доминирует y по коалиции S.

Условие (4.4) означает, что все члены коалиции S предпочитают дележ z, а (4.5), что они в состоянии обеспечить себе то, что им сулит дележ z.

Определение 4.5. *С-ядром кооперативной игры называется множество всех ее недоминируемых дележей.*

Из этого определения следует, что любой дележ из С- ядра устойчив в том смысле, что нет ни одной коалиции, которая одновременно хотела и могла изменить исход игры, поэтому ядро вполне может быть принято в качестве решения кооперативной игры. Структура этого множества описывается следующей теоремой.

Теорема 4.1. *Ядро игры есть множество всех таких векторов z,* что

$$\sum_{i\in S} z_i \ge v(S) \forall S \subset N; \qquad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = v(N). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Пусть вектор z удовлетворяет (4.6),(4.7). Тогда положив $S = \{i\}$, получим $z_i = v(\{i\})$, т.е. z- дележ.

Предположим, существует другой дележ y, который доминирует z, т.е. $\exists$ $S\subseteq N$ такое, что $\sum_{i\in S} y_i \le v(S)$ и $y_i > z_i$,$\forall i\in S$. Но при этом $\sum_{i\in S} y_i > \sum_{i\in S} z_i \ge v(S)$, т.е.

пришли к противоречию.

Пусть теперь вектор y не удовлетворяет (4.6) или (4.7). Если он не удовлетворяет (4.7), то это вообще не дележ; если он не удовлетворяет (4.6), то существует такое $S\subset N$, что $\sum_{i\in S} y_i = v(S) - \varepsilon, \varepsilon > 0$. Обозначим число игроков в коалиции S через $|S|$ и положим

$$\alpha - v(N) - v(S) - \sum_{i\notin S} v(\{i\}) \ge 0;$$

$$z_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\varepsilon}{|S|}, i \in S, \\ \\ v(\{i\}) + \dfrac{\alpha}{n-|S|}, i \notin S \end{cases}$$

Очевидно, z = ($z_1,\ldots,z_n$) является дележом и $z \underset{S}{\succ} y$, следовательно, $y \notin C$.

По доказанной теореме ядро является выпуклым замкнутым ограниченным многогранным множеством (многогранником).

Приведем еще один критерий принадлежности С-ядру.

Лемма. *Пусть z- дележ игры (N,v). Тогда z∈C-ядру в том и только том случае, когда для всех коалиций S⊂N выполняется неравенство*

$$\sum_{i \in S} z_i \le v(N) - v(N \setminus S)$$

Доказательство. Так как $\sum_{i \in N} z_i = v(N)$, то приведенное выше неравенство

можно записать в виде $v(N \setminus S) \le \sum_{i \in N \setminus S} z_i$. Теперь утверждение леммы следует из

(4.6).

Теорема 4.1 дает достаточное основание для использования С-ядра как важного принципа оптимальности в кооперативной теории. Однако во многих случаях С-ядро может оказаться пустым, а в других случаях оно представляет собой множественный принцип оптимальности и остается всегда открытым вопрос, какой все-таки дележ из С-ядра необходимо выбрать в конкретном случае.

Пример 4.1. Рассмотрим игру трех лиц. Для ее характеристической функции имеем $v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1,2,3)=1$, $v(1,2)= c_3$, $v(1,3)=c_2$, $v(2,3)=c_1$ *,где*

$0 \le c_i \le 1$, $i = 1,2,3$. На основании теоремы 4.1, чтобы дележ $z \in C$-ядру, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$z_1 + z_2 \ge c_3,\ \ z_1 + z_3 \ge c_2,\ z_2 + z_3 \ge c_1$$

или

$$z_3 \le 1 - c_3,\ z_2 \le 1 - c_2,\quad z_1 \le 1 - c_1. \tag{4.8}$$

Складывая неравенства (4.8), получаем

$$z_1 + z_2 + z_3 \le 3 - (c_1 + c_2 + c_3)$$

или

$$c_1 + c_2 + c_3 \le 2 \qquad (4.9)$$

Последнее неравенство является необходимым и достаточным условием существования в рассматриваемой игре непустого С-ядра.

Геометрически множество дележей в рассматриваемой игре есть симплекс: $z_1+z_2+z_3=1, z_i>0,\ i=1, 2, 3$ (Δ ABC, рис. 4.1).

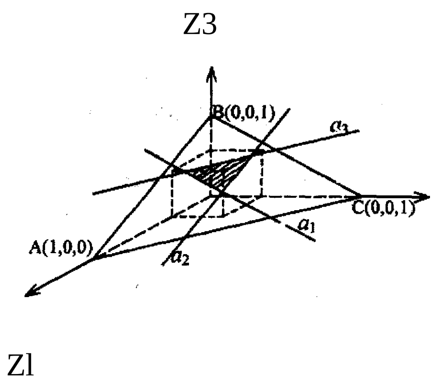

Рис 4.1

Непустое С-ядро представляет собой пересечение множества дележей (треугольник ABC) и выпуклого многогранника (параллелепипеда) $O \le z_i \le 1 - c_i$, $i = 1,2,3$. Это часть треугольника ABC, вырезаемая линиями пересечения плоскостей

$$z_i = 1 - c_i,\ i=1,2,3 \qquad (4.10)$$

и плоскостью треугольника ABC. На рис 4.1 через a_i, $i= 1,2,3$ обозначена прямая, образованная пересечением плоскостей $z_i =1- c_i$, и $z_1 + z_2 + z_3 =1$. Точка пересечения двух прямых a_i и a_j принадлежит треугольнику ABC, если неотрицательная *k-я* ($k \ne i,\ k \ne j$) координата этой точки, в противном случае она находится за пределами треугольника ABC. Таким образом, С-ядро имеет вид треугольника, если совместное решение любой лары уравнений (4.10) и уравнения $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ состоит из неотрицательных чисел. Это требование выполняется при

$$c_1 + c_2 \geq 1,\ c_1 + c_3 \geq 1, c_2 + c_3 \geq 1. \qquad (4.11)$$

В зависимости от различных случаев (а всего их может быть восемь) С-ядро будет приобретать тот или иной вид. Например, если не выполняется ни одно из трех неравенств (4.11), то С-ядро оказывается шестиугольником.

Определение 4.6. *Игра в форме характеристической функции называется игрой с постоянной суммой, если* $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)\ \forall S \subseteq N$.

Определение 4.7. *Игра называется существенной, если*

$$v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

В противном случае игра называется несущественной.

В несущественной игре есть только один дележ $z_i = v(\{\ i\ \}),\ i=1,\dots,n$.

Теорема 4.2. *Ядро существенной игры с постоянной суммой пусто.*

Доказательство. Предположим $C \neq \varnothing$ и $z \in C$, тогда по предыдущей теореме $\sum_{j \in N|\{j\}} z_j \geq v(N \setminus \{i\})$. Так как игра с постоянной суммой, то

$$v(N \setminus \{i\}) + v(\{i\}) = v(N),$$

поэтому $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} z_j \geq v(N) - v(\{i\}) \forall i$.

Отсюда, с учётом (4.7), получим $v(N) - z_i \geq v(N) - v(\{\ i\ \})$, *т.е.* $z_i \leq v(\{\ i\ \}) \forall\ i$.

Но тогда $\sum_{i=1}^{n} z_i \leq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) < v(N)$, т.е. z не является дележом, что противоречит предположению $z \in C$.

Определение 4.8. *Множество R дележей называется решением по Нейману-Моргенштерну, если любая пара принадлежащих ему дележей друг друга не доминирует и для любого дележа $y \notin R$ найдется дележ $z \in R$ такой, что $z \succ y$.*

Решение по Нейману-Моргенштерну может быть не единственным не только в том смысле, что множество R содержит не один дележ, но и в том смысле, что для данной игры может существовать не одно множество R, удовлетворяющее определению 4.8. Однако если ядро является одновременно и решением по Нейману-Моргенштерну (что в общем случае неверно), то это решение единственно.

Теорема 4.3. *Если кооперативная игра имеет непустое ядро, являющееся одновременно решением по Нейману-Моргенштерну, то других решений по Нейману-Моргенштерну в этой игре нет.*

Доказательство. Для любой игры, очевидно, ядро принадлежит решению по Нейману-Моргенштерну (если оно существует). Значит, если предположить противное утверждению теоремы, то существует два решения по Нейману-Моргенштерну R *и*
R' ,для которых выполняется $R \subset R'$. Следовательно, существует дележ $z \in R'$, $z \notin R$. По определению 4.8 этот дележ доминируется некоторым дележом $y \in R$, но тогда $y \in R'$, т.е. один дележ из R' доминирует другой дележ из R', что противоречит определению 4.8.

Пример 4.2. Годовой доход D акционерного общества требуется разделить между n владельцами акций. Известно, что i-й акционер имеет r_i акций, причем у каждого меньше 50% всех акций. При распределении дохода коалиция акционеров, владеющая контрольным пакетом (более 50% всех акций), имеет право потребовать дивиденты от дохода, равные ее доле акций. Коалиция, не владеющая контрольным пакетом, не имеет право диктовать какие-либо условия. Описать эту проблему кооперативной игрой и исследовать ее.

Построим характеристическую функцию

$$v(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S} r_i \dfrac{D}{R}, \text{если} \sum_{i \in S} r_i > \dfrac{R}{2}, \\ \\ 0, \text{если} \sum_{i \in S} r_i \le \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

где $R=\sum_{i=1}^{n} r_i$ -общее количество акций.

Так как *v(N)=D, v({i})=0, i=1,...,n,* то множество дележей есть n-мерный симплекс $\{z \mid z_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} z_i = D\}$. Покажем, что ядро состоит из единственного дележа С= $\{r_i \frac{D}{R},\ i=1,\dots,n\}$. Действительно, этот дележ удовлетворяет условиям (4.6), (4.7), значит по теореме 4.1 он принадлежит ядру.

При любом отличном от данного дележа хотя бы один j-й игрок получит больше $r_j \frac{D}{R}$. Тогда коалиция остальных игроков получит меньше $\sum_{i \in N \setminus \{j\}} r_i \frac{D}{R}$.. Но любая коалиция из (n-l)-го участника владеет контрольным пакетом, значит $v(N \setminus \{j\}) = \sum_{i \in N \setminus \{j\}} r_i \frac{D}{R}$, т.е. данный дележ не удовлетворяет условию (4.6) и не принадлежит ядру.

Структуру решения по Нейману-Моргенштерну рассмотрим в частном случае для трех равноправных участников: $n=3,\ r_1=r_2=r_3=R/3$.

Тогда $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$, $v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=2/3D$, $v(\{1,2,3\})=D$.

Множество дележей есть $\{(z_1,z_2,z_3) \mid z_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} z_i = D\}$, ядро $C=\{D/3,D/3,D/3\}$.

Нетрудно проверить, что в данном случае имеется 3 симметричных решения по Нейману-Моргенштерну вида $(z,z,D-2z),(z,D-2z,z),(D-2z,z,z)$, где $D/3 \leq z \leq D/2$.

Множество дележей можно представить в виде равностороннего треугольника, тогда каждое решение по Нейману-Моргенштерну есть отрезок, один конец которого лежит в середине соответствующей стороны треугольника, а другой конец - в центре треугольника, и эта единственная общая точка является ядром (рис.4.2).

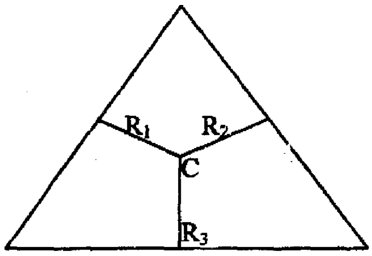

Рис. 4.2

В данном примере ядро, конечно, выглядит предпочтительнее в качестве решения игры, нежели решение по Нейману-Моргенштерну. Однако последнее предъявляет меньшие требования к устойчивости дележа, поэтому «чаще» является непустым по сравнению с ядром. Впрочем, имеются примеры, когда решение по Нейману-Моргенштерну не существует (а ядро при этом не пусто).

Приведенные понятия принципов оптимальности (ядро, решение по Нейману-Моргенштерну) основаны на идее устойчивости дележей. Для них характерна множественность решений (хотя возможна и пустота). Имеется и другой подход, связанный с идеей «разумности» («справедливости») исхода, обычно реализуемой в виде системы аксиом (требований к исходу). При соответствующем выборе аксиом такой исход обычно существует и является единственным.

§ 4.2. Арбитражные схемы

Основной недостаток введенных определений решений кооперативных игр заключается в том, что множества оказываются весьма широкими. Для выделения единственного результата игры можно использовать арбитражные схемы. Рассмотрим это понятие и одну конкретную арбитражную схему на примере игры двух лиц с ненулевой суммой.

Пусть задана игра двух лиц в нормальной форме. Построим в двумерном пространстве критериев игроков множество всех возможных значений критериев W, являющееся образом множества допустимых исходов игры. Аналогичное множество вводилось для задачи с вектором критериев (см. §2.1) при определении оптимальности по Парето. Будем считать его выпуклым (если оно не является таковым для исходов в чистых стратегиях, то этого можно добиться по крайней мере применением совместных смешанных стратегий). В множестве всех возможных значений критериев выделим исходную точку с координатами, равными минимальным величинам выигрышей z_1^*, z_2^*, на которые согласны первый и второй игрок. В качестве этих величин можно взять, например, максимальные значения критериев игроков. Так, в чистых стратегиях, если все исходы (u_1,u_2) допустимы, то

$$z_1^* = \max_{u_1\in U_1}\min_{u_2\in U_2} g_1(u_1,u_2),\ z_2^* = \max_{u_2\in U_2}\min_{u_1\in U_1} g_2(u_1,u_2),$$

а W-множество всех пар$(g_1(u_1,u_2), g_2(u_1,u_2))$, где u_1, u_2 пробегают множества U_1,U_2.

Задача «торга» заключается в определении «разумного» соглашения между игроками о результатах игры, т.е. установлении некоторой функции φ, называемой арбитражной схемой, которая ставит в соответствие произвольной тройке (W,z_1^*,z_2^*) пару чисел (z_1^0,z_2^0), являющихся соответственно выигрышами первого и второго игроков (арбитражное решение игры). Построение такой функции производится аксиоматическим путем. Наиболее известная арбитражная схема, предложенная Нэшом, базируется на следующих аксиомах:

А1 (допустимость): $(z_1^0,z_2^0)\in W$.

А2 (индивидуальная рациональность): $(z_1^0,z_2^0)\geq (z_1^*,z_2^*)$.

А3 (коллективная рациональность или оптимальность по Парето):
Если $(z_1,z_2)\in W$ *и* $(z_1,z_2)\geq (z_1^0,z_2^0)$, *то* $(z_1,z_2)= (z_1^0,z_2^0)$.

А4 (независимость от посторонних альтернатив):

Если $(z_1^0,z_2^0)=\varphi(W_1, z_1^*,z_2^*)$ *и* $(z_1^0,z_2^0)\in W_2\subset W_1$, *то* $(z_1^0,z_2^0)=\varphi(W_2, z_1^*,z_2^*)$.

А5 (независимость от линейного преобразования):
Если линейное преобразование L задало формулами $z_i'=a_i z_i+b_i$, a_i 0, i=1,2,

$LW=W'$, $(z_1^0,z_2^0)=\varphi(W, z_1^*,z_2^*)$, *то*

$\varphi(W, a_1 z_1^*+b_1, a_2 z_2^*+b_2)=(a_1 z_1^0+b_1, a_2 z_2^0+b_2)$.

А6 (симметрия):

Если из $(z_1,z_2)\in W$ *следует* $(z_2,z_1)\in W$ *и* $z_1^*=z_2^*$, *то* $z_1^0=z_2^0$.

Введем переговорное множество P, являющееся подмножеством W, высекаемым из него условиями $z_i\geq z_i^*$, i=l,2 (рис.4.3).

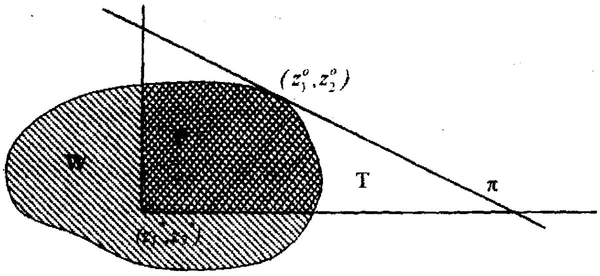

рис.4.3

Будем считать P выпуклым компактом (это всегда так, если исходное множество W является выпуклым компактом). Кроме того, предположим, что $\exists(z_1,z_2)\in P$ такая, что $z_i>z_i^*$, i=1,2 (для этого достаточно, чтобы (z_1^*,z_2^*) являлась внутренней точкой W). Случай, когда $\forall(z_1,z_2)\in W$ выполняется либо $z_1\leq z_1^*$, либо $z_2\leq z_2^*$, либо то и другое тривиальны и могут быть рассмотрены отдельно.

Фактически, согласно А2 достаточно ограничиться рассмотрением множества P. Обозначим через $\mathop{Arg\max}\limits_{(z_1,z_2)\in P} f(z_1,z_2)$ множество точек максимума функции $f(z_1,z_2)$ на множестве P. Если функция $f(z_1,z_2)$ унимодальна, т.е. имеет лишь одну точку максимума на P, то запишем $\arg\max\limits_{(z_1,z_2)\in P} f(z_1,z_2)$.

Теорема 4.4. *Если W является выпуклым компактом, (z_1^*,z_2^*) - внутренняя точка W, то существует единственная функция φ, удовлетворяющая аксиомам A1-A6, и эта функция есть* $\varphi_H\left(W, z_1^*, z_2^*\right) = \arg\max\limits_{(z_1,z_2)\in P}\left[\left(z_1 - z_1^*\right)\left(z_2 - z_2^*\right)\right]$.

Доказательство. Покажем сначала, что функция $f_0(z_1,z_2)= \left(z_1 - z_1^*\right)\left(z_2 - z_2^*\right)$ имеет единственную точку максимума (z_1^0,z_2^0) на P (существование следует из непрерывности на компакте). Обозначим $M = \max\limits_{(z_1,z_2)\in P} f_0(z_1,z_2)$.

По условию теоремы существует точка $\exists(z_1,z_2)\in P$ такая, что $z_i>z_i^*$, i=l,2, значит M>0. Предположим, что существуют две различные точки максимума (z_1',z_2') и (z_1'',z_2'') функции $f_0(z_1,z_2)$ на P. Если $z_1'>z_1''$, то очевидно, $z_2'>z_2''$ (и наоборот). В силу выпуклости P имеем $\left(\tfrac{1}{2}\left(z_1' + z_1''\right), \tfrac{1}{2}\left(z_2' + z_2''\right)\right)\in P$; и

$$f_0\left(\frac{1}{2}\left(z_1' + z_1''\right), \frac{1}{2}\left(z_2' + z_2''\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z_1' - z_1^*\right)\left(z_2' - z_2^*\right) + \frac{1}{2}\left(z_1'' - z_1^*\right)\left(z_2'' - z_2^*\right) + \frac{1}{4}\left(z_1' - z_1''\right)\left(z_2'' - z_2'\right) > M,$$

т,е. пришли к противоречию. Значит, у функции $f_0(z_1,z_2)$ на P существует единственная точка максимума (z_1^0,z_2^0).

Проведем через точку (z_1^0,z_2^0) прямую π, определяемую уравнением $f(z_1,z_2) = f(z_1^0,z_2^0)$,где $f(z_1,z_2)= (z_2^0-z_2^*)\, z_1+ (z_1^0-z_1^*)\, z_2$.

Покажем, что $f(z_1,z_2)\le f(z_1^0,z_2^0)$ $\forall(z_1,z_2)\in W$. Предположим противное, т.е. существует $(z_1,z_2)\in W$ такая, что $f(z_1,z_2)> f(z_1^0,z_2^0)$. В силу выпуклости W при $\tilde{z}_i = \alpha\bar{z}_i + (1-\alpha)z_i^0 = z_i^0 + \alpha\left(\bar{z}_i - z_i^0\right)$, i=1,2,0<α<1,точка $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)\in W$. Кроме того,

$$f_0(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = f_0\left(z_1^0, z_2^0\right) + \alpha f\left(\bar{z}_1 - z_1^0, \bar{z}_2 - z_2^0\right) + \alpha^2\left(\bar{z}_1 - z_1^0\right)\left(\bar{z}_2 - z_2^0\right)$$

Так как $f_0(z_1^0,z_2^0)=M$; $f\left(\bar{z}_1 - z_1^0, \bar{z}_2 - z_2^0\right) = f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) -$ $f(z_1^0,z_2^0)>0$, то при достаточно малом α>0, пренебрегая третьим слагаемым, содержащим α^2, имеем $f_0(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$>M и, кроме того, $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)\in P$, т.е. пришли к противоречию. Значит прямая π является опорной к множеству W в точке (z_1^0,z_2^0) (рис. 4.3.).

Покажем теперь, что (z_1^0,z_2^0) является единственной точкой, удовлетворяющей аксиомам А1-А6. Аксиомам А1 и А2 она удовлетворяет по построению.

Если существует $(z_1,z_2)\geq(z_1^0,z_2^0)$, $(z_1,z_2)\in W$, $(z_1,z_2)\neq(z_1^0,z_2^0)$,то

$(z_1,z_2)\in P$, $f_0(z_1,z_2)>f_0(z_1^0,z_2^0)=M$, т.е. пришли к противоречию, значит, выполнена аксиома А3.

Так как точка максимума функции на множестве является одновременно и точкой максимума на любом подмножестве, которому она принадлежит, то выполнена аксиома А4. При линейном преобразовании L имеем

$$f_0(z_1',z_2')=\left(z_1'-a_1z_1^*-b_1\right)\left(z_2'-a_2z_2^*-b_2\right)=a_1a_2f_0(z_1,z_2).$$

Так как $a_1a_2>0$, то точка максимума $f_0(z_1,z_2)$ переходит в точку максимума $f_0(z_1',z_2')$,значит выполнена аксиома А5.

Если W симметрично и $z_1^*=z_2^*$, то $f_0(z_1,z_2)=f_0(z_2,z_1)$,и если (z_1^0,z_2^0)-точка максимума $f_0(z_1,z_2)$ на P, то и (z_1^0,z_2^0), - точка максимума. В силу единственности точки максимума $z_1^0=z_2^0$ выполнена аксиома А6. Чтобы доказать единственность арбитражной схемы, рассмотрим полуплоскость П, лежащую ниже прямой π, т.е.

$$\Pi=\{(z_1,z_2)\,/\,f(z_1,z_2)\leq f(z_1^0,z_2^0)\},$$

и треугольник Т, высекаемый из нее прямыми $z_i=z_i^*$, i=1,2 (на рис. 4.3 $\triangle$ABC). Так как $W\subset\Pi$, то $P\subset T$. При линейном преобразовании

$$z_i'=\frac{\left(z_i-z_i^*\right)}{\left(z_i^0-z_i^*\right)},i=1,2,$$

точка (z_1^*,z_2^*) переходит в начало координат, а треугольник Т- в треугольник Т′, ограниченный прямой $z_1'+z_2'\leq 2$ и осями координат. В силу симметричности Т′ по аксиоме А6 арбитражное решение для Т′ должно лежать на прямой $z_1'=z_2'$, а по аксиоме А3 - это точка (1,1). При обратном преобразовании точка (1,1) переходит в точку (z_1^0,z_2^0), следовательно, по аксиоме А5 (z_1^0,z_2^0) является единственным арбитражным решением для T, а по аксиоме A4 - для P и, наконец, по аксиоме A2 - для W.

Некоторые аксиомы схемы Нэша можно подвергнуть критике. Замены их другими аксиомами приводят к иным арбитражным схемам. Наиболее сомнительной является аксиома A4 (независимость от посторонних альтернатив), делающая схему нечувствительной к некоторым изменениям возможностей игроков.

Пример 4.3. Рассмотрим два переговорных множества:

$P_1=\{(z_1,z_2)\,/\,z_1\geq 0,\ z_2\geq 0,\ z_1^2+z_2^2\leq 1\}$, $P_2=\{(z_1,z_2)\,/\,0\leq z_1\leq\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2\geq 0,\ z_1^2+z_2^2\leq 1\}$.

Во втором случае возможности для торга у первого игрока представляются меньшими (рис.4.4), однако арбитражные решения по Нэшу одинаковы

$\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$

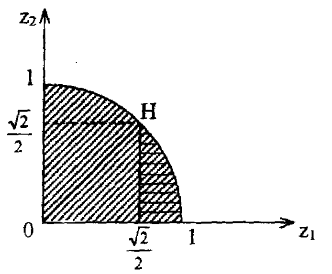

Рис. 4.4

Отмеченный недостаток устранен в арбитражной схеме Гермейера-Бутрима [3]. В ней аксиома A4 заменена на A4′: если $\bar{z}_1 - z^*{}_1 = \bar{z}_2 - z^*{}_2$,где

$\bar{z}_i = \max\limits_{(z_1,z_2)\in P} z_i$,i=1,2, то $z_1^{\ 0} - z_1^{\ *} = z_2^{\ 0} - z_2^{\ *}$.

Можно показать, что в условиях теоремы 4.4 единственной функцией, удовлетворяющей аксиомам A1-A3, A4′, A5,A6, является

$$\varphi_{ГБ}\left(W, z_1^*, z_2^*\right) = \arg\max_{(z_1,z_2)\in P}\left[\min\left(\frac{z_1 - z_1^*}{\bar{z}_1 - z_1^*}, \frac{z_2 - z_2^*}{\bar{z}_2 - z_2^*}\right)\right].$$

Из доказательства теоремы 4.4 следует, что в случае выпуклого множества W геометрически арбитражная точка Нэша Н характеризуется тем, что прямая, соединяющая начальную точку (z_1^*,z_2^*) («статус кво») с точкой Н, и опорная прямая для множества W в точке Н имеют равные по модулю и противоположные по знаку коэффициенты наклона.

Точка Гермейера-Бутрима ГБ для выпуклого множества W лежит на пересечении границы W с прямой, соединяющей точки $\left(z_1^*, z_2^*\right)$ и $\left(\bar{z}_1, \bar{z}_2\right)$ (последняя называется идеальной точкой).

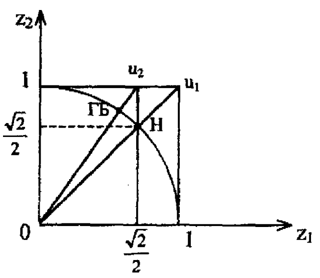

Рис. 4.5

На рис. 4.5 сделаны соответствующие построения для примера 4.3 (для переговорного множества P_1 точка ГБ совпадает с точкой Н, при переходе к переговорному множеству P_2 точка Н остается на месте, а ГБ смещается вверх, что отражает появляющееся преимущество второго игрока).

Арбитражные схемы Нэша и Гермейера-Бутрима естественным образом распространяются на игры n лиц.

Фактически арбитражными схемами для игр n лиц в форме характеристической функции являются известные решения кооперативных игр, выделяющие единственный «разумный» дележ. Например, одно из наиболее распространенных понятий решения - вектор Шепли. Компонентами его являются выигрыши игроков, определяемые формулой

$$\varphi_i(v) = \sum_{S_i \subset N} \frac{(|S_i|-1)!(n-|S_i|)!}{n!}\left[v(S_i) - v(S_i \setminus \{i\})\right], i = 1,\dots,n, \qquad (4.12)$$

где суммирование производится по всем коалициям S_i, содержащим i-го игрока, $|S_i|$ - число членов коалиции S_i.

Функция (4.12) является единственной, удовлетворяющей следующей системе аксиом:

1. Если игра с характеристической функцией v' получена из игры с характеристической функцией v путем только перемены нумерации игроков и игрок i при этом получил номер i′, то

   $\varphi_i'(v') = \varphi_i(v)$.
2. Если S - любой носитель v, т.е. $v(S \cap T) = v(T) \quad \forall T \subset N$, то

   $\sum_{i \in S} \varphi_i(v) = v(s)$ (вместо этого можно считать, что вектор $\varphi(v)$ является дележом).
3. Для игры, характеристическая функция которой равна сумме характеристических функций двух игр, справедливо $\varphi_i(v_1 + v_2) = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v_2)$.

Пример 4.4. Комитет из трех человек принимает различные решения простым большинством (два - «за»), но один его член (председатель) имеет право вето. Определить вектор Шепли для соответствующей игры.

Составим характеристическую функцию, считая выигрыш коалиции при принятии предлагаемого ею решения равным 1, а при отклонении — 0 (игроку, имеющему право вето, присвоим номер 1). Имеем *v({1,2})=v({1,3})=v({1,2,3})=1, v({1})=v({2})=v({3})=v({2,3})=0.*

По формуле (4.12), учитывая, что отличными от нуля в данном примере являются слагаемые, в которых коалиция S_i выигрывающая (получает 1), а коалиция $S_i\backslash\{i\}$ проигрывающая (получает 0), получим

$\varphi_1=\frac{1}{3!}\left[v(\{1,2\})-v(\{2\})\right]+\frac{1}{3!}\left[v(\{1,3\})-v(\{3\})\right]+\frac{2!0!}{3!}\left[v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})\right]=\frac{2}{3}$ (по определению 0!=1);

$$\varphi_2=\frac{1}{3!}\left[v(\{1,2\})-v(\{1\})\right]=\frac{1}{6};$$
$$\varphi_3=\frac{1}{3!}\left[v(\{1,3\})-v(\{1\})\right]=\frac{1}{6}.$$

Заметим, что С-ядро в этом примере содержит один дележ {(1,0,0)}, т.е. вектор Шепли здесь не принадлежит ядру.

§ 4.3. Коалиционные структуры

Формальные определения тех понятий решений, которые были рассмотрены в данной главе, не включают в себя механизмы достижения этих решений. Существуют различные попытки разработки таких механизмов (сценариев поведения, процессов переговоров и т.д.). Один из важнейших вопросов состоит в том, какие коалиции могут реально образовываться. Если характеристическая функция супераддитивна, то получение максимального общего выигрыша связано с образованием большой коалиции. В этом случае вопрос о коалициях более или менее ясен (хотя, вообще говоря, не исключено, что игроки не смогут договориться о совместном выборе) и правомерно делать акцент на определении возможных дележей. Однако, если характеристическая функция не является супераддитивной или не все коалиции допустимы правилами игры (на практике это может объясняться затратами, связанными с образованием коалиций, сложностью обеспечения координации в больших коллективах, антимонопольным законодательством и т.д.), то исход игры существенно зависит от того, в какие коалиции объединятся те или иные игроки, т.е. какая образуется структура.

Определение 4.9. *Коалиционной структурой в игре n лиц называется разбиение* $\sum = (S_1, S_2, ..., S_m)$ *множества N на непересекающиеся подмножества,*

т.е. $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = N, S_i \bigcap S_j = \varnothing$, i≠j.

Если сложилась некоторая коалиционная структура, то члены каждой коалиции S_i могут разделить между собой величину $v(S_i)$.

Определение 4.10. *Конфигурацией называется пара*

$$(x, \sum) = (x_1, ..., x_n, S_1, ..., S_m),$$

где Σ- коалиционная структура, x- n-мерный вектор, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j \in S_i} x_j = v(S_i), i = 1,.., m.$$

Понятие конфигурации, которая заменяет понятие дележа, должно удовлетворять некоторым требованиям рациональности. Конфигурация (x,Σ) называется индивидуально-рациональной, если

$$x_j \geq v(\{j\}) \forall j \in N. \qquad (4.13)$$

Конфигурация (x,Σ) называется коллективно-рациональной, если

$$\sum_{j \in S} x_j \geq v(S) \forall S \subset S_i \in \Sigma, \qquad (4.14)$$

т.е. любая подкоалиция любой коалиции из разбиения получает не меньше, чем она может обеспечить себе сама.

Условие (4.14) включает (4.13) как частный случай (подкоалиция из одного игрока). Будем считать, что конфигурации являются коллективно-рациональными (хотя иногда это требование является чересчур сильным) и рассмотрим вопрос об их устойчивости.

Определение 4.11. *Партнерами коалиции K в коалиционной структуре* $\Sigma = (S_1, \dots, S_m)$ *называются игроки, входящие в множество*

$$P(K, \Sigma) = \{j \mid j \in S_i, K \cap S_i \neq \varnothing, i = 1, \dots, m\}.$$

Таким образом, игрок j является партнёром коалиции K, если в структуре Σ существует коалиция S_i, которой принадлежит игрок j и какой-либо игрок из коалиции K (каждый ее член также является партнером). Смысл этого определения связан с тем, что для получения некоторых выигрышей членами коалиции K нужно согласие партнеров.

Определение 4.12. *Пусть (x,Σ)- коллективно-рациональная конфигурация, а K и T- непустые непересекающиеся подкоадиции некоторой коалиции $S_i \in \Sigma$.*

Угрозой коалиции K против коалиции T называется коллективно-рациональная конфигурация (y,Σ′), удовлетворяющая условиям

$$P(K,\Sigma')\cap T=\varnothing,$$

$$y_i>x_i \forall i\in K, y_i \geq x_i \ \forall i\in P(K,\Sigma').$$

Контругрозой коалиции T против коалиции K называется коллективно-рациональная конфигурация (z,Σ″), удовлетворяющая условиям

$$K\not\subset P(T,\Sigma''),$$

$$z_i \geq x_i \ \forall i\in P, \ \ z_i \geq y_i \ \forall i\in P(T,\Sigma'')\cap P(K,\Sigma').$$

Таким образом, члены коалиции K могут выдвинуть угрозу против коалиции T, если они смогут получить большие выигрыши путем перехода к новой коллективно-рациональной конфигурации, против которой у их новых партнеров нет причин для возражения. Члены коалиции T могут выдвинуть контругрозу против коалиции K, если они предложат другую конфигурацию, в которой они и все их партнёры получат не меньше, чем при первоначальной конфигурации. Если для этого им понадобятся в качестве партнеров некоторые игроки из коалиции K или их партнеров в структуре Σ′, то им они дают не меньше, чем они получат в конфигурации угрозы (при этом коалиция T не может использовать всех членов коалиции K).

Определение 4.13. *Коллективно-рациональная конфигурация (x,Σ) называется устойчивой, если на каждую угрозу коалиции K против коалиции T последняя может выдвинуть контругрозу.*

Множество всех устойчивых коллективно- рациональных конфигураций называется М-устойчивым множеством (и обозначается буквой М).

Понятие устойчивости конфигурации можно модифицировать разными способами. Если в ответ на угрозу коалиции К против коалиции Т хотя бы один член Т может выдвинуть контругрозу, то говорят об M_1-устойчивости коллективно-рациональной конфигурации (M_1-устойчивом множестве). Если на угрозу любого игрока против коалиции последняя может выдвинуть против него контругрозу, то говорят об M_2-устойчивости коллективно-рациональной конфигурации (M_2-устойчивом множестве). Если вместо коллективно-рациональных рассматривать индивидуально-рациональные конфигурации, то получаются соответственно M^u, M_1^u, M_2^u-устойчивости (и устойчивые множества). Следует отметить, что эти множества не пусты. Более того, можно, например, показать, что для любой коалиционной структуры Σ существует, по крайней мере, один вектор x такой, что $(x,\Sigma)\in M_1^u$ (см. [11]).

Недостатком введенных множеств устойчивости является то, что они обычно слишком широкие. Один из вариантов более сильного определения устойчивости конфигураций связан с понятием К-ядра, основанного на широко используемой в кооперативных играх функции

$$e\{x,S\}=v(S)-\sum_{i\in S} x_i \ .$$

Величина e(x,S) называется эксцессом коалиции S при дележе x (эту величину можно рассматривать как меру «неудовлетворенности» игроков коалиции S дележом x при $\sum_{i\in S} x_i < v(S)$).

Рассмотрим некоторую индивидуально-рациональную конфигурацию (x,Σ). Назовем максимальным эксцессом игрока i против j величину

$$e_{ij} = \max_{D_{ij}} e(x, D_{ij}),$$

где максимум берется по всем таким коалициям D_{ij}, что $i\in D_{ij}$, $j\notin D_{ij}$.

Говорят, что игрок i перевешивает игрока j, если $e_{ij} > e_{ji}$ и $x_j > v(\{j\})$; если игроки i и j не перевешивают друг друга, то говорят, что они находятся в равновесии.

Величина e_{ij} трактуется как максимальная добавка, которую может предложить игрок i любым возможным партнерам, угрожая игроку j (если $e_{ij} = 0$, то эти угрозы нереальны). Поэтому перевешивание означает, что угрозы игрока i игроку j сильнее ответных угроз, причем в силу $x_j > v(\{j\})$ игроку j есть что терять.

Определение 4.14. *К-ядром называется множество индивидуально-рациональных конфигурации (x,Σ), в которых любые два игрока из одной коалиции находятся в равновесии.*

Можно показать, что К-ядро не пусто и принадлежит множеству M_1^u. Более того, для любой коалиционной структуры Σ существует такой вектор x, что конфигурация (x, Σ) принадлежит К-ядру.

Пример 4.5. Рассмотрим игру трех лиц, в которой коалиция из двух или трех игроков является выигрывающей (получает 1), а из одного игрока - проигрывающей (получает 0). Характеристическая функция (супераддитивная) определяется следующими соотношениями:

$$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0,\ v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=v(\{1,2,3\})=1.$$

В этой игре С-ядро, очевидно, пусто; вектор Шепли равен (1/3,1/3,1/3).

В игре трех лиц возможны пять коалиционных структур:

$$(\{1\},\{2\},\{3\}),\ (\{1,2\},\{3\}),\ (\{1,3\},\{2\}),\ (\{1\},\{2,3\}),\ (\{1,2,3\}). \qquad \text{I}$$

Очевидно, конфигурация, составленная из вектора Шепли и большой коалиции, т.е. (1/3,1/3,1/3,{1,2,3}), принадлежит К-ядру, причем К-ядру принадлежат только такие конфигурации с большой коалицией, в которой игроки получают равные выигрыши. В то же время с другими коалиционными структурами сочетаются и неравные выигрыши, например, конфигурация (2/5.2/5,1/5,{1,2},{3}) также принадлежит К-ядру.

Упражнения и задачи

4.1. Показать, что максиминная характеристическая функция супераддитивна, т.е. для любых множеств $S,T \subset I$ таких, что $S \cap T = \varnothing$, выполнено неравенство

$$v(S)+v(T) \leq v(S \cup T).$$

4.2. Показать, что ядро и решение по Нейману-Моргенштерну кооперативной игры двух лиц совпадают с множеством всех дележей.

4.3. Доказать, что в кооперативной игре трех лип $< I, \nu >$ с супераддитивной характеристической функцией неравенство $\nu(12)+ \nu (13)+\nu (23)\leq 2\nu (123)$ является необходимым и достаточным условием непустоты ядра.

4.4. Найти ядро в следующих кооперативных играх $< I, \nu >$ трех лиц:

а) $v(I) =9$, $v(23) = 7$, $v(13) = v(12) = 4$, $v(i) = 0$, $i = 1,2,3$;

6) $v(I) = 8$, $v(12) = v(13) = v(23) = 6$, $v(i) = 0$, $i = 1,2,3$.

4.5. Найти все решения кооперативной игры трех лиц $< I, \nu >$ *с* характеристической функцией $v(I) = v(13) = v(23) = 6$, $v(S) == 0$ *для* остальных коалиций S.

4.6. Пусть С-ядро имеет непустое пересечение со всеми гранями $\alpha_i=v(\{i\})$ множества дележей. Показать, что в этом случае оно является единственным Неймана-Монгенштерна решением.

4.7. Для игры (N,ν) определим β_i равенством

$$\beta_i = \max_{S\subset N\setminus\{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Покажите, что если найдется i, для которого $\alpha_i>\beta_i$, то дележ α не может принадлежать ни С-ядру, ни одному из Неймана-Монгенштерна решений.

4.8. Найти арбитражное решение биматричной игры с матрицами

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, используя схему Нэша.

4.9. Пусть в кооперативной игре трех лиц с супераддитивной характеристической функцией все неравенства из определения супераддитивности выполнены как строгие. Покажите, что k-ядро состоит из единственного дележа y°, для которого выполнены неравенства $y_i^\circ > v(i)$, $i = 1,2,3$.

4.10. Найти k-ядра и n-ядра в следующих кооперативных играх трех лиц:

a) $v(I)=21$, $v(12)=5$, $v(13)=4$, $v(23)=8$, $v(1)=1$, $v(2)=2$, $v(3)=0$;

b) $v(I)=18, v(13)=v(23)=12, v(12)=15, v(i)=2, i=l,2,3$;

c) $v(I)=15$, $v(12)=v(13)=6$, $v(23)=10$, $v(1)=3$, $v(2)=v(3)=0$.

Глава 5. Вычислительные аспекты теории игр

§ 5.1. Методы решения матричных игр

Задача решения матричной игры заключается либо в нахождении цены игры и хотя бы одной оптимальной стратегии каждого игрока, либо в нахождении цены игры и множеств всех оптимальных стратегий обоих игроков. В последнем случае решение называется полным. Так как множества оптимальных стратегий игроков представляют собой подмножества точек S_n и S_m, удовлетворяющих системам линейных ограничений (3.18) и (3.19), то они являются выпуклыми замкнутыми ограниченными многогранниками.

В простейшем случае, когда у игрока имеются две чистые стратегии и его смешанная стратегия может быть полностью описана вероятностью выбора первой чистой стратегии p или q (вторая стратегия выбирается с вероятностью $1-p$ или $1-q$), это означает, что множество оптимальных стратегий представляет собой либо одну точку, либо целый отрезок на отрезке [0,1] (возможно и весь этот отрезок). Для решения такой игры удобен графический метод.

Графический метод

Рассмотрим матричную игру с двумя чистыми стратегиями у игрока 1 и произвольным числом стратегий m у игрока 2, т. е. игру с матрицей размера

$2\times m$ (аналогично рассматривается игра с матрицей размера $n\times 2$). В соответствии с теоремой о свойствах оптимальных стратегий [см.(3.21)] запишем

$$v = \max_{0\le p\le 1}\min_{1\le j\le m}\left[a_{1j}p + a_{2j}(1-5)\right] = \max_{0\le p\le 1}\min_{1\le j\le m}\left[(a_{1j}-a_{2j})p + a_{2j}\right] = \min_{1\le j\le m}\left[(a_{1j}-a_{2j})p^0 + a_{2j}\right]$$

Для графического решения игры на отрезке [0,1] построим m линейных функций $(a_{1j}-a_{2j})p+a_{2j}$, $j=1,2,\ldots,m$, найдем их нижнюю огибающую, соответствующую операции $\min\limits_{1\le j\le m}$, и у этой огибающей - точку (точки) максимума. Абсцисса этой точки является оптимальной вероятностью выбора первой чистой стратегии $p°$, а ордината - значением цены игры. Так как при этом нижняя огибающая является, очевидно, графиком выпуклой кусочно-линейной функции (ломаной линией), то в точке максимума возможны два случая: либо через эту точку проходят две прямые, соответствующие некоторым j_1 и j_2 и имеющие одна положительный, а другая отрицательный наклон (возможно проходят и другие прямые), либо через эту точку проходит одна прямая, соответствующая некоторому j и параллельная оси абсцисс.

В первом случае можно построить оптимальную стратегию игрока 2, использующую только чистые стратегии j_1 и j_2 ($q_j^0=0$ для всех $j \neq j_1, j_2$). Для этого

$q_{j_1}{}^0$ и $q_{j_2}{}^0$ надо выбирать как решение системы

$$q_{j_1}{}^0 + q_{j_2}{}^0 = 1, k_1 q_{j_1}{}^0 + k_2 q_{j_{21}}{}^0 = 0,$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты наклонов соответствующих прямых.

Тогда, очевидно, выполняется $h\left(p, q^0\right) = v \forall p$,т.е. по первой из теорем о необходимых и достаточных условиях оптимальности стратегии q^0 - оптимальная стратегия.

Во втором случае оптимальной является j-я чистая стратегия, так как

$h(p,j)=v\,\forall p$.

На рис. 5.1 и 5.2 изображены характерные для первого и второго случая графические построения.

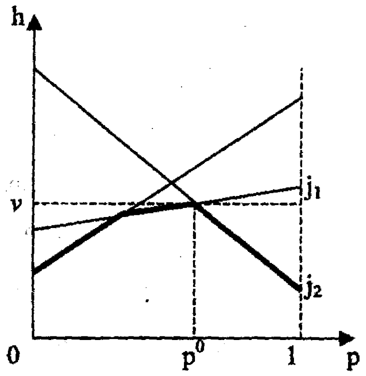

Рис. 5.1

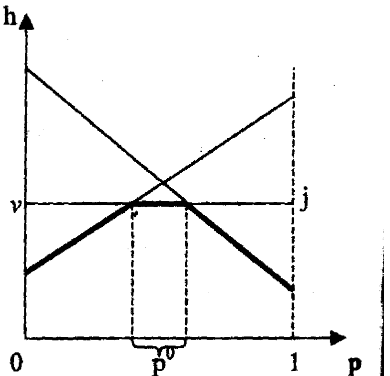

Рис. 5.2

Метод Шепли-Сноу

Этот метод предназначен для решения матричной игры произвольной размерности n×m. Множество оптимальных стратегий каждого игрока в такой игре представляет собой многогранник, который полностью определяется конечным числом своих крайних точек (вершин), т.е. точек, не представимых в виде нетривиальной линейной комбинации двух различных точек многогранника. Поэтому для нахождения полного решения матричной игры достаточно определить крайние оптимальные стратегии, т.е. крайние точки множеств оптимальных стратегий. Метод нахождения крайних оптимальных стратегий вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5.1. (Шепли-Сноу). *Все крайние оптимальные стратегии $p°$ и $q°$ обоих игроков в игре с платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ и цена игры v должны удовлетворять какой-либо из систем уравнений:*

$$\sum_{s=1}^{r} a_{i_s j_t} p_{i_s}{}^{0} - v = 0, t = 1,\dots,r, \sum_{s=1}^{r} p_{i_s}{}^{0} = 1, \tag{5.1}$$

$$\sum_{t=1}^{r} a_{i_s j_t} q_{j_t}{}^{0} - v = 0, s = 1,\dots,r, \sum_{t=1}^{r} q_{j_t}{}^{0} = 1, \tag{5.2}$$

где $\|a_{i_s j_t}\|$- квадратная матрица, полученная из матрицы $\|a_{ij}\|$ вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. Все остальные p_i^0, и q_j^0 с индексами, соответствующими вычеркнутым строкам и столбцам, равны нулю. При этом, если v≠0, то матрица $\|a_{i_s j_t}\|$ невырождена.

Доказательство. Пусть $p°$ и $q°$ - произвольные крайние оптимальные стратегии, v- цена игры. По теореме о свойствах оптимальных стратегий

$$\min_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i{}^{0} = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j{}^{0} = v. \tag{5.3}$$

Перенумеруем строки и столбцы матрицы $\|a_{ij}\|$ так, чтобы индексы i и j , на которых достигаются минимум и максимум, в (5.3) были на первых местах, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\ 0} = v,\ j = 1,\ldots,r, (1 \le r \le m), \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\ 0} > v,\ j > r;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^{\ 0} = v, i = 1,\ldots,k, (1 \le k \le n), \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^{\ 0} < v, i > k.$$

Тогда по теореме о свойствах оптимальных стратегий

$$p_i^{\ 0} = 0, i > k, q_j^{\ 0} = 0,\ j > r.$$

Таким образом, для определения p^0 и q^0 имеем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i^{\ 0} = v,\ j = 1,\ldots,r, \sum_{i=1}^{k} p_i^{\ 0} = 1,. \qquad (5.4)$$

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} q_j^{\ 0} = v, i = 1,\ldots,k, \sum_{j=1}^{r} q_j^{\ 0} = 1. \qquad (5.5)$$

Кроме того, существует ε>0 такое, что

$$\min_{r+1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\ 0} \ge v + \varepsilon; \max_{k+1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^{\ 0} \le v - \varepsilon. \qquad (5.6)$$

Докажем сначала, что r = k. Предположим противное, т.е. r ≠ k; пусть для определенности k > r (при k < r все аналогично).

Рассмотрим систему однородных уравнений относительно неизвестных $(a_i p_i^0)$:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \left(a_i p_i^{\ 0}\right) = 0,\ j = 1,\ldots,r, \sum_{i=1}^{k} \left(a_i p_i^{\ 0}\right) = 0. \qquad (5.7)$$

Матрица системы (5.7) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{lk} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1r} & \ldots & a_{kr} \end{Vmatrix} \qquad (5.8)$$

Из (5.5) вытекает векторное равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots\ldots \\ a_{k1} \end{pmatrix} q_1^{\ 0} + \ldots. + \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \ldots\ldots \\ a_{kr} \end{pmatrix} q_r^{\ 0} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} v = 0. \qquad (5.9)$$

Так как хотя бы одно $q_i^0 \neq 0$, то строки матрицы (5.8) линейно зависимы. Следовательно, число независимых уравнений в системе (5.7) не больше r, а число неизвестных $k>r$, т.е. система (5.7) имеет нетривиальное решение $\left(\alpha_1 p_1^{\ 0},\ldots,\alpha_k p_k^{\ 0}\right)$. Так как множество решений однородной системы является подпространством, то $\left(-\alpha_1 p_1^{\ 0},\ldots,-\alpha_k p_k^{\ 0}\right)$ также есть решение системы (5.7) и $\alpha = \max\limits_{1\le i\le k}\left|\alpha_i\right| > 0$ можно сделать сколь угодно малым.

Возьмем такое α, что

$$\alpha < 1, \alpha = \max_{r+1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\, p_i^{\ 0}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $(1 + \alpha_i)\, p_i^{\ 0} \ge 0, i = 1,2,\ldots,k$ и в силу (5.6) справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\left(1\pm\alpha_i\right)p_i^{\ 0} \ge v + \frac{\varepsilon}{2},\ j > r.$$

В то же время из (5.4) и (5.7) вытекают равенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(1\pm\alpha_i\right)p_i^{\ 0} = v,\ j = \overline{1,r},\quad \sum_{i=1}^{n}\left(1\pm\alpha_i\right)p_i^{\ 0} = 1.$$

Значит, по теореме о необходимых и достаточных условиях оптимальности стратегии векторы

$$\begin{aligned} p^1 &= \left(\left(1+\alpha_1\right)p_1^{\ 0},\ldots,\left(1+\alpha_k\right)p_k^{\ 0},0,\ldots,0\right), \\ p^2 &= \left(\left(1+\alpha_1\right)p_1^{\ 0},\ldots,\left(1-\alpha_k\right)p_k^{\ 0},0,\ldots,0\right) \end{aligned}$$

являются оптимальными для игрока 1. Но $p^0 = \left(1/2\right)\left(p^1 + p^2\right)$, т.е. пришли к противоречию, так как p^0 - крайняя оптимальная стратегия.

Аналогично, если предположить, что $k<$ r, то придем к противоречию для q^0. Итак, $k = r$.

Покажем теперь, что если $v \ne 0$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Доказательство снова от противного. Предположим, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.10)$$

Так как$v \neq 0$, то из (5.9) следует, что последняя строка матрицы (5.8) является линейной комбинацией остальных строк. Если справедливо (5.10), то число независимых строк матрицы (5.8),где $k = r$, не больше r-1. Тогда в системе (5.7) при $k = r$ число неизвестных r больше числа независимых уравнений и, следовательно, существует нетривиальное решение. Далее приходим к противоречию совершенно так же, как при предположении $k > r$. Если учесть, что системы (5.4), (5.5) получены после соответствующей перестановки строк и столбцов матрицы$\|a_{ij}\|$, то все утверждения теоремы доказаны.

По теореме Шепли-Сноу полное решение матричной игры сводится к перебору всех квадратных подматриц матрицы игры и решению соответствующих систем линейных уравнений (5.1),(5.2). Если $v\neq 0$, то эти системы, очевидно, либо имеют единственное решение, либо не имеют решения. Полученное решение надо проверить на неотрицательность и на выполнение условий оптимальности (3.18), (3.19) для вычеркнутых строк и столбцов. Если условия выполнены, то решения системы, дополненные нулями на местах, соответствующих вычеркнутым строкам и столбцам, являются оптимальными стратегиями (но необязательно крайними, так как условия теоремы необходимые, но не достаточные). Полный перебор приведет к нахождению всех крайних оптимальных стратегий. Так как трудоемкость решения по методу Шепли-Сноу растет с увеличением размерности матрицы игры, то имеет смысл предварительно вычеркнуть в соответствии с принципом доминирования лишние строки и столбцы (если ищется полное решение, то при строгом доминировании), которые входят в оптимальные стратегии с нулевой вероятностью; цена игры при этом, очевидно, не меняется. Так как при решении системы линейных уравнений (5.1), (5.2) удобнее оперировать с невырожденной подматрицей$\|a_{i_s j_t}\|$, то исходную игру следует свести к игре с заведомо не равной нулю ценой. Проще всего это сделать следующим образом: прибавить к каждому элементу матрицы $\|a_{ij}\|$ одну ту же достаточно большую константу так, ная матрица была положительной; тогда в новой игре цена, очевидно, больше нуля, причем она отличается от цены исходной игры на величину этой константы, а множества оптимальных стратегий игроков в обеих играх совпадают.

Метод Брауна

При достаточно большой размерности матрицы игры метод Шепли-Сноу приводит к решению больших систем линейных уравнений, что представляет собой весьма трудоемкий и не просто реализуемый вычислительный процесс. Метод Брауна является более простым и удобным для численной реализации. Идея метода Брауна, с помощью которого можно получить лишь приближенное частное решение игры (т.е. по одной оптимальной стратегии игроков), состоит в следующем.

Рассмотрим фиктивный процесс обучения игроков в многократно повторяющейся матричной игре со следующими простыми правилами.

На первом шаге игроки выбирают произвольные чистые стратегии i_1 и j_1, ничего не зная о выборе противника.

На втором шаге игроки узнают предыдущий выбор противника и считают, что он и на втором шаге будет придерживаться той же стратегии. Тогда игрок 1 в соответствии со своим критерием выберет такую чистую стратегию i_2, что

$$a_{i_2 j_1} = \max_{1 \le i \le n} a_{ij_1},$$

а игрок 2 выберет такую чистую стратегию j_2, что

$$a_{i_1 j_2} = \min_{1 \le j \le m} a_{i_1 j}.$$

На третьем шаге игрок 1 считает, что игрок 2 может использовать чистые стратегии j_1 и j_2 с равной вероятностью, и выбирает чистую стратегию i_3, которая максимизирует математическое ожидание выигрыша

$$\frac{1}{2}\left(a_{i_3 j_1}+a_{i_3 j_2}\right)=\max_{1\le i\le n}\frac{1}{2}\left(a_{ij_1}+a_{ij_2}\right).$$

Аналогично, игрок 2 считает, что игрок 1 может использовать чистые стратегии i_1 и i_2 с равной вероятностью, и выбирает чистую стратегию j_3, которая минимизирует математическое ожидание проигрыша:

$$\frac{1}{2}\left(a_{i_1 j_3}+a_{i_2 j_3}\right)=\min_{1\le j\le m}\frac{1}{2}\left(a_{i_1 j}+a_{i_2 j}\right).$$

На последующих шагах каждый игрок ориентируется на накопленную противником смешанную стратегию и выбирает свою чистую стратегию из условия максимума или минимума соответствующего математического ожидания. Обозначим через $p_i(k)$ и $q_j(k)$ частоты появления i -й и j –й чистых

стратегий игроков в k повторениях; $p_i(k)=r_i/k$, где r_i - число появлений i-й стратегии игрока 1 $(i=1,...,n)$, $q_j(k)=l_j/k$, где l_j - число появлений j -й стратегии игрока 2 $(j=1,...,m)$. Тогда на k+1шаге игрок 1 считает, что игрок 2 будет использовать смешанную стратегию $q(k)=(q_1(k),...,q_m(k))$ и выбирает чистую стратегию i_{k+1} такую, что

$$h(i_{k+1},q(k))=\max_{1\le i\le n}h(i,q(k)).$$

Аналогично, игрок 2 считает, что первый будет использовать смешанную стратегию $p(k)=(p_1(k),..., p_n(k))$ и выбирает чистую стратегию j_{k+1} такую, что

$$h(p(k),j_{k+1})=\min_{1\le j\le m}h(p(k),j).$$

Далее пересчитывают частоты по формулам

$$p_{i_{k+1}}(k+1)=\frac{kp_{i_{k+1}}(k)+1}{k+1},\ p_i(k+1)=\frac{kp_i(k)}{k+1}, i\ne i_{k+1},$$
$$q_{j_{k+1}}(k+1)=\frac{kq_{j_{k+1}}(k)+1}{k+1},q_j(k+1)=\frac{kq_j(k)}{k+1},\ j\ne j_{k+1}$$

и переходят к следующей (k+2)-й итерации.

Обозначим

$$v_1(k)=\max_{1\le i\le n}h(i,q(k)); \qquad (5.11)$$

$$v_2(k)=\min_{1\le j\le m}h(p(k),j). \qquad (5.12)$$

Тогда из (3.21) следует, что

$$v_1(k) \geq v \geq v_2(k) \forall k,$$

где v - цена игры, причем если $v_1(k) = v_2(k)$, то это общее значение есть цена игры, а *p(k)* и *q(k)* - оптимальные смешанные стратегии игроков.

Основное утверждение, на котором базируется метод Брауна, заключается в сходимости сформулированного итеративного процесса:

$$\lim_{k \to \infty} v_1(k) = \lim_{k \to \infty} v_2(k) = v. \tag{5.13}$$

Доказательство этого утверждения достаточно сложное и мы его не приводим. Сходимость в (5.13), вообще говоря, не монотонная, поэтому практически вычисления по методу Брауна производят следующим образом. Задают точность решения $\varepsilon > 0$ *и* прекращают процесс после *k* шагов, если

$$0 \leq \Delta(k) = \min_{1 \leq s \leq k} v_1(s) - \max_{1 \leq s \leq k} v_2(s) \leq \varepsilon.$$

При этом в качестве приближенного значения цены игры принимают величину

$$\frac{1}{2}\left[\min_{1 \leq s \leq k} v_1(s) + \max_{1 \leq s \leq k} v_2(s)\right],$$

а ε - оптимальными стратегиями игроков являются $p(s_1)$, где s_1 определяется из условия

$$v_2(s_1) = \max_{1 \leq s \leq k} v_2(s)$$

и $q(s_2)$, где s_2 определяется из условия

$$v_1(s_2) = \min_{1 \leq s \leq k} v_1(s),$$

что вытекает из (5.11),(5.12) и (3.21).

Скорость сходимости итеративного процесса по методу Брауна уменьшается с увеличением размерности матрицы игры; ее порядок

$$\Delta(k) = ck^{-1/(n+m-2)}.$$

Если после конечного числа шагов выполняется равенство $\Delta(k) = 0$, то решение игры найдено точно.

Связь матричных игр с линейным программированием

Существует тесная связь между матричными играми и линейным программированием. Решение любой матричной игры можно свести к решению пары двойственных задач линейного программирования специального вида (соответствующий результат будет сформулирован для игр с положительными матрицами, но любую матричную игру, как уже было сказано, можно свести к игре с положительной матрицей прибавлением достаточно большой константы к каждому элементу матрицы). С другой стороны, любую задачу линейного программирования, имеющую решение, можно свести к матричной игре специального вида.

Определение 5.1. *Матричная игра называется симметричной, если ее платежная матрица* $\|a_{ij}\|$ *кососимметрическая, т.е*

$$a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j.$$

Так как кососимметрическая матрица квадратная, то размерности векторов в смешанных стратегиях обоих игроков одинаковы (m=n), а множества всех смешанных стратегий совпадают. Свойство симметричных игр сформулированы в следующей лемме.

Лемма 5.1. *Цена симметричной матричной игры равна нулю, а множества оптимальных стратегий игроков совпадают.*

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$v = \max_{p \in S_n} \min_{1 \le j \le n} h(p, j) = \max_{p \in s_k} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = -\min_{p \in s_n} \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = -\min_{q \in s_n} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j =$$

$$= -\min_{q \in s_k} \max_{1 \le i \le n} h(i, q) = -v, \textit{следовательно}, v = 0$$

(при доказательстве равенств производится перемена обозначений p на q и i на *j).*

Пусть p^0 - оптимальная стратегия игрока 1. Тогда

$$h(p^0, j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\,0} \geq 0,\ j = \overline{1,n};$$

$$h(i, p^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j^{\,0} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j^{\,0} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\,0} \leq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, p^0 – оптимальная стратегия игрока 2. Аналогично, любая оптимальная стратегия игрока 2 является оптимальной стратегией игрока 1.

Теорема 5.2. *Решение матричной игры с матрицей*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}, \quad a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$$

эквивалентно решению пары двойственных задач ЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min, x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1,m}; \qquad (5.14)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \to \max, y_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1, i = \overline{1,n}\,. \qquad (5.15)$$

Точнее, если $x^0 = (x_1^{\,0},\dots,x_n^{\,0})$ *- решение задачи* (5.14), $y^0 = (y_1^{\,0},\dots,y_m^{\,0})$ *-решение задачи* (5.15), *то* $v = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,0}} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m} y_j^{\,0}}$ *- цена игры с матрицей A.*

$p^0 = vx^0$ *- оптимальная стратегия игрока 1,*

$q^0 = vy^0$*- оптимальная стратегия игрока 2.*

Обратно, если p^0 *и* q^0 *- оптимальные стратегии игроков,* v *- цена игры, то* $x^\circ = \dfrac{p^0}{v}$ *- решение задачи* (5.14), *а* $y^\circ = \dfrac{q^0}{v}$ *- решение задачи* (5.15).

Доказательство. Задачи (5.14) и (5.15) имеют хотя бы по одному допустимому вектору (для (5.15) нулевой вектор, а для (5.14) вследствие положительности матрицы *A* вектор с достаточно большими компонентами), значит, они обе имеют решения.

Пусть x° - решение (5.14), y°- решение (5.15), тогда по теореме двойственности

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 0} = \sum_{j=1}^{m} y_j^{\ 0} > 0$$

(положительность этих сумм следует из того, что $x^\circ \neq 0$).

Положим

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 0}} = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{m} y_j^{\ 0}}, \quad p^0 = vx^0, \quad q^0 = vy^0,$$

тогда

$$p_i^{\ 0} \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_i^{\ 0} = 1, \quad q_j^{\ 0} \geq 0, j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} q_j^{\ 0} = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^{\ 0} \geq v \geq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^{\ 0} \forall i, j$$

Значит, по следствию из теоремы 3.4 получаем, что v - цена игры, p^0 и q° - оптимальные стратегии игроков.

Пусть теперь v - цена игры с матрицей А, p^0 и q^0- оптимальные стратегии игроков. Так как матрица А положительная, то v >0. Положим $x^\circ = \dfrac{p^0}{v}$,

$y^0 = \dfrac{q^0}{v}$,тогда $x_i^{\ 0} \geq 0, i = \overline{1,n}, q_j^{\ 0} \geq 0, j = \overline{1,m},$ и из (3.18), (3.19) следуют неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^{\ 0} \geq 1, j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^{\ 0} \leq 1, i = \overline{1,n},$$

т.е. x^0 - допустимый вектор задачи(5.14); y^0- допустимый вектор задачи(5.15). При этом

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 0} = \sum_{j=1}^{m} y_j^{\ 0} = 1,$$

следовательно, x^0 - решение (5.14), y^0 - решение (5.15). Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Решение пары двойственных задач линейного программирования*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, x_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}; \tag{5.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, y_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1,n} \tag{5.17}$$

эквивалентно решению симметричной матричной игры с матрицей

$$D = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{11} & \dots & -a_{m1} & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{1n} & \dots & -a_{mn} & c_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & -b_m \\ -c_1 & \dots & -c_n & b_1 & \dots & b_m & 0 \end{Vmatrix}$$

Точнее, если $z^0 = \left(\mu_1{}^0, ..., \mu_n{}^0, \nu_1{}^0, ..., \nu_n{}^0, \lambda^0\right)$ *- оптимальная стратегия любого игрока в игре с матрицей D и* $\lambda^0 > 0$ *, то* $x^0 = \left(\dfrac{\mu_1{}^0}{\lambda^0}, ..., \dfrac{\mu_n{}^0}{\lambda^0}\right)$*- решение задачи* (5.16), $y^0 = \left(\dfrac{\nu_1{}^0}{\lambda^0}, ..., \dfrac{\nu_m{}^0}{\lambda^0}\right)$ *-решение задачи* (5.17). *Обратно, если* $x^0 = \left(x_1{}^0, ..., x_n{}^0\right)$*-*

решение задачи (5.16), $y^0 = \left(y_1{}^0, ..., y_n{}^0\right)$ *- решение задачи (5.17), то*

$$z^0 = \left(\lambda^0 x_1{}^0, ..., \lambda^0 x_n{}^0, \lambda^0 y_1{}^0, ..., \lambda^0 y_m{}^0, \lambda^0\right),$$

где $\lambda^0 = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j{}^0 + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i{}^0}$ *является оптимальной стратегией любого игрока в игрес матрицей D. Пара двойственных задач (5.16) ,(5.17) имеет решение тогда и только тогда, когда существует такая оптимальная стратегия в игре с матрицей D*

$$z^0 = \left(\mu_1{}^0, ..., \mu_n{}^0, \nu_1{}^0, ..., \nu_n{}^0, \lambda^0\right),$$

для которой $\lambda^0 > 0$*.*

Доказательство. Пусть $z_0 = \left(\mu_1{}^0, ..., \mu_n{}^0, \nu_1{}^0, ..., \nu_m{}^0, \lambda^0\right)$ - оптимальная стратегия, $\lambda^0 > 0$. Так как игра симметричная, то цена игры с матрицей *D* равна нулю. Поэтому необходимые условия оптимальности (3.18) применительно к матрице *D* дают следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \nu_i{}^0 - c_j \lambda^0 \geq 0,\ j = \overline{1, n}; \tag{5.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_j{}^0 + b_i\lambda^0 \ge 0, i = \overline{1,m}; \qquad (5.19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\mu_j{}^0 - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i{}^0 = 0 \qquad (5.20)$$

(в (5.20) имеет место равенство по теореме о свойствах оптимальных стратегий, так как λ^0>0). Положим

$$x_j{}^0 = \frac{\mu_j{}^0}{\lambda^0}, j = \overline{1,n}, y_i{}^0 = \frac{\nu_i{}^0}{\lambda^0}, i = \overline{1,m}.$$

Тогда

$$x_j{}^0 \ge 0, j = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j{}^0 \le b_i, i = \overline{1,m}, y_i{}^0 \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j{}^0 \ge c_j, j = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j{}^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i{}^0.$$

Следовательно, $x^0 = \left(x_1{}^0,...,x_n{}^0\right)$- решение задачи (5.16) , $y^0 = \left(y_1{}^0,...,y_n{}^0\right)$ -решение задачи (5.17).

Пусть теперь $x^0 = \left(x_1{}^0,...,x_n{}^0\right)$- решение задачи (5.16), $y^0 = \left(y_1{}^0,...,y_n{}^0\right)$- решение задачи (5.17). Положим

$$\lambda^0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} x_j{}^0 + \sum_{i=1}^{m} y_i{}^0}, \mu_j{}^0 = \lambda^0 x_j{}^0, j = \overline{1,n}, \nu_i{}^0 = \lambda^0 y_i{}^0, i = \overline{1,m}.$$

Тогда

$$\lambda^0 > 0, \mu_j{}^0 \ge 0, j = \overline{1,n}, \nu_i{}^0 \ge 0, i = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{n} \mu_j{}^0 + \sum_{i=1}^{m} \nu_i{}^0 + \lambda^0 = 1,$$

т.е. вектор $z_0 = \left(\mu_1{}^0,...,\mu_n{}^0, \nu_1{}^0,...\nu_n{}^0, \lambda^0\right)$- смешанная стратегия в игре с матрицей D размерности (n+m+l)×(n+m+l). Ограничения задач (5.16), (5.17) и соотношение двойственности

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j{}^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i{}^0$$

дают для z^0 соотношения (5.18)-(5.20), которые являются достаточными условиями оптимальности (см. (3.18)) для игры с матрицей D. Следовательно, z^0 -оптимальная стратегия (любого игрока) в игре с матрицей D.

Наконец, последнее утверждение теоремы вытекает из уже доказанных утверждений. Действительно, в предположении существования решения задач (5,16), (5.17) построена оптимальная стратегия с последней компонентой, отличной от нуля. Поэтому, если нет оптимальных стратегий в игре с матрицей D, последняя компонента которых отлична от нуля, то задачи (5.16), (5.17) не могут иметь решения. С другой стороны, если существует оптимальная стратегия с отличной от нуля последней компонентой, то существование решения задач (5.16), (5.17) уже доказано конструктивно.

Полученные результаты позволяют свести решение игр к решению задач линейного программирования и применить к ним, например, симплекс-метод. Сведением задач линейного программирования к играм пользуются реже.

Мы познакомились с несколькими основными методами решения матричных игр. Какие можно дать рекомендации по их использованию? Наиболее многообещающим выглядит метод Шепли -Сноу, так как он дает полное решение игры. Однако при значительной размерности платежной матрицы приходится решать большое количество систем линейных уравнений. Поэтому метод Шепли-Сноу можно рекомендовать для решения игр небольшой размерности. Наиболее простым в вычислительном плане является метод Брауна, но его сходимость достаточно быстро ухудшается с ростом размерности, поэтому этот метод можно рекомендовать для решения игр средней размерности (порядка нескольких десятков). Для решения игр большой размерности (порядка нескольких сотен или тысяч) предпочтительнее метод сведения их к задачам линейного программирования.

§ 5.2. Нахождение седловых точек и точек равновесия

Седловые точки функции $g(u_1, u_2)$ на $U_1 \times U_2$ можно находить как решения максиминной и минимаксной задач (см. теорему 2.1)

$$\inf_{u_2 \in U_2} g\left(u_1^{\,0}, u_2\right) = \max_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2), \tag{5.21}$$

$$\sup_{u_1\in U_1} g\left(u_1, u_2{}^0\right) = \min_{u_2\in U_2} \sup_{u_1\in U_1} g\left(u_1, u_2\right), \tag{5.22}$$

причем совпадение величин в (5.21),(5.22) укажет на то, что точка $\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)$ является седловой, а их несовпадение позволит сделать вывод о том, что седловых точек нет (как и в случае, когда задачи (5.21), (5.22) не имеют решения). Однако решение максиминной и минимаксной задач весьма сложно, проще находить седловые точки на основе определения. Если u_1 является n - мерным, а u_2 является m - мерным векторами, то согласно определению седловая точка $\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)$ характеризуется тем, что при фиксированном $u_2{}^0$ функция $g\left(u_1, u_2\right)$ как функция n переменных $u_1{}^1,\ldots,u_1{}^n$ достигает максимума в $u_1{}^0$, а при фиксированном $u_1{}^0$ функция $g\left(u_1, u_2\right)$ как функция m переменных $u_2{}^1,\ldots,u_2{}^m$ достигает минимума в $u_2{}^0$. Значит, если $\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)$- внутренняя точка $U_1 \times U_2$, то для дифференцируемой функции $g\left(u_1, u_2\right)$ в $\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)$ должны выполняться необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial g\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)}{\partial u_1{}^j} = \frac{\partial g\left(u_1{}^0, u_2{}^0\right)}{\partial u_2{}^i} = 0,\ j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}, \tag{5.23}$$

которые ничем не отличаются от условий максимума или минимума по всем переменным. Таким образом, седловые точки наряду с точками максимума и минимума находятся среди стационарных точек, удовлетворяющих условиям (5.23). Для выделения седловых точек требуется дополнительная проверка убывания функции $g\left(u_1, u_2{}^0\right)$ по u_1 в окрестности $u_1{}^0$ и возрастания функции $g\left(u_1{}^0, u_2\right)$ по u_2 в окрестности $u_2{}^0$ (например, исследование знаков вторых производных). Конечно, аналитическое решение системы уравнений (5.23) и последующая проверка возможны лишь в простейших случаях.

Численные методы нахождения седлойых точек также аналогичны методам поиска экстремума. Среди них наиболее распространенными являются градиентные методы, представляющие собой итеративные процедуры решения системы уравнений (5.23). Для случая отсутствия ограничений (когда множество U_1 совпадает с пространством R^n, а множество U_2 — с пространством R^m) такая процедура имеет вид

$$
\begin{aligned}
u_{k+1}^1 &= u_k^1 + \alpha_k \frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^1};\\
u_{k+1}^2 &= u_k^2 - \beta_k \frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^2},
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

где $\left(u_k^1, u_k^2\right)$— k-е приближение к седловой точке, $\frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^1}$— вектор частных производных по u_j^1 $\left(j = \overline{1,n}\right)$ функции $g\left(u^1, u^2\right)$ в точке $\left(u_k^1, u_k^2\right)$, $\frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^2}$ — вектор частных производных по u_i^2 $\left(i = \overline{1,m}\right)$ функции $g\left(u^1, u^2\right)$ в точке $\left(u_k^1, u_k^2\right)$, α_k и β_k — длины k – го шага по u^1 и u^2 соответственно.

Конечно, процедура (5.24) не всегда приводит к седловой точке (не при всех начальных значениях $\left(u_1^1, u_1^2\right)$), но для вогнуто-выпуклой функции $g\left(u^1, u^2\right)$ такая сходимость есть. При наличии ограничений необходима такая модификация процедуры (5.24), при которой очередное приближение лежит в множестве $U_1 \times U_2$. Одна из возможных модификаций имеет вид

$$
\begin{aligned}
u_{k+1}^1 &= P_{U_1}\left(u_k^1 + \alpha_k \frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^1}\right);\\
u_{k+1}^2 &= P_{U_2}\left(u_k^2 - \beta_k \frac{\partial g\left(u_k^1, u_k^2\right)}{\partial u^2}\right),
\end{aligned}
$$

где $P_{U_1}\left(u^1\right), P_{U_2}\left(u^2\right)$— операции проектирования точек u_1 и u_2 на множества U_1 и U_2.

Подробнее с итеративными методами нахождения седловых точек можно ознакомиться в работе [14].

Таким образом, методы поиска экстремума применимы для нахождения седловых точек. Но и наоборот, экстремальные задачи сводятся к нахождению седловых точек.

Общая задача поиска условного экстремума (задача математического программирования) формулируется следующим образом: найти верхнюю грань функции $f(x)$ на множестве X

$$v_1 = \sup_{x \in X} f(x), \tag{5.25}$$

где

$$X = \{x | x \in R, g_i(x) \geq 0, i = \overline{1,m}\}, \quad R \subseteq R^n. \tag{5.26}$$

Можно показать, что эта верхняя грань равна

$$v_1 = \sup_{x \in R} \inf_{y \geq 0} L(x,y),$$

где

$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$ — функция Лагранжа.

Таким образом, величину v_1 можно интерпретировать как нижнюю цену антагонистической игры, в которой первый игрок выбирает $x \in R$, второй игрок выбирает вектор множителей Лагранжа $y \geq 0$, а платежной функцией является функция Лагранжа.

Двойственной к задаче (5.25), (5.26) называется задача поиска нижней грани функции $\varphi(y)$

$$v_2 = \inf_{y \geq 0} \varphi(y), \tag{5.27}$$

где

$$\varphi(y) = \sup_{x \in R} L(x,y). \tag{5.28}$$

Значит, экстремальное значение двойственной задачи равно верхней цене той же самой игры. *Соотношением двойственности* называется равенство $v_1 = v_2$,что означает существование цены игры с платежной функцией $L(x,y)$ в чистых стратегиях. Таким образом, справедливо утверждение: *существование решений задач (5.25), (5.26), (5.27), (5.28) и равенство экстремальных значений этих задач эквивалентны существованию оптимальных чистых стратегий и* *цены игры с функцией Лагранжа или, что то же самое, существованию седловой точки* (x^0, y^0) *функции* $L(x,y)$ на $R \times \{y \geq 0\}$.

Следовательно, решение двойственных задач математического программирования сводится к решению антагонистической игры (ранее аналогичная связь была установлена для линейного программирования и матричных игр).

Сложнее найти седловые точки и цену антагонистической игры в смешанных стратегиях. Для этой бесконечномерной задачи в настоящее время не существует общих методов решения. При большой размерности переменных u_1 и u_2 возможен подход, основанный на аппроксимации. Заменяя непрерывную антагонистическую игру матричной и решая последнюю с помощью одного из методов, рассмотренных в §5.1, можно получить приближенное решение непрерывной игры в виде распределений вероятностей, сосредоточенных в конечном числе точек. Однако с ростом размерности u_1 и u_2 размерность соответствующей матричной игры растет очень быстро, что приводит к практической неразрешимости последней.

Исследование смешанных расширении антагонистических игр идет по пути выделения отдельных классов игр, дхя которых удается найти оптимальные смешанные стратегии в явном виде или показать, что они сосредоточены в конечном числе точек. Наиболее полно эти вопросы изложены в монографии [7].

Способ нахождения точек равновесия в бескоалиционной игре *n* лиц аналогичен способу определения седловых точек. Если функции выигрыша игроков g_i являются непрерывно дифференцируемыми и точка равновесия $(u_1^0, ..., u_n^0)$ является внутренней для произведения множеств $U_1 \times ... \times U_n$, то необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial g\left(u_1^0, ..., u_n^0\right)}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.29}$$

где $\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i}$ — вектор частных производных по векторной переменной u_i.

Равенства (5.29) вытекают из обычных условий экстремума, так как в точке равновесия каждая функция g_i достигает максимума по "своей" переменной при u_i фиксированных остальных переменных. В общем случае надо учитывать возможную принадлежность равновесных стратегий u_i^0 границам множеств U_i (для всех индексов *i* или для их части), поэтому либо отдельно проверяют граничные точки (если множества U_i имеют простой вид), либо вместо (5.29) используют условия экстремума с ограничениями (например, неположительность производных по всем допустимым направлениям). Рассмотрим процесс нахождения равновесных ситуаций на следующем примере.

Пример 5.1 (модель рынка). Имеется *n* участников, которые могут производить некоторый однородный товар и продавать его на рынке. Потенциальные покупатели данного товара обладают все вместе суммой денег, равной *a.* Если *i*-й участник производит и выставляет на рынке количество товара u_i, то общее предложение равняется

$u = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Предполагается, что в результате на рынке складывается такая

цена, что весь предлагаемый товар покупается. Это значит, что цена равна $c = au^{-1}$.

На производство не накладывается никаких условий, кроме естественного условия неотрицательности, т.е. $u_i \geq 0, i = \overline{1,n}$, но оно связано с затратами. Возьмем простейший случай, когда затраты линейны, т.е. равны

$b_i u_i, i = \overline{1,n}$ (у каждого участника, вообще говоря, свой коэффициент пропорциональности b_i). В таких условиях прибыль *i*-го участника равна

$$g_i(u_1,...,u_n) = \begin{cases} au^{-1}u_i - b_i u_i, u > 0; \\ 0, u = 0 \end{cases}$$

Примем ее в качестве функции выигрыша данного участника.

Для определения ситуаций равновесия, лежащих внутри прямого произведения пространств стратегий участников (в данном случае неотрицательного ортанта n-мерного пространства), имеем систему уравнений

(при $u > 0$)

$$\frac{\partial g_i(u_1,...,u_n)}{\partial u_i} = au^{-1} - au_i u^{-2} - b_i = 0,\ i = \overline{1,n},$$

откуда

$$u_i = u - \frac{b_i}{a}u^2, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.30)$$

Просуммировав n уравнений (5.30), имеем с учетом равенства $\sum_{i=1}^{n} u_i = u$

одно уравнение для определения u:

$$u = nu - u^2 a^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (5.31)$$

Из уравнения (5.31) получим

$$u_0 = \frac{(n-1)a}{\sum_{i=1}^{n} b_i}. \qquad (5.32)$$

Подставляя (5.32) в (5.30), имеем

$$u_i^0 = \frac{a(n-1)}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\left(1 - \frac{b_i(n-1)}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right). \qquad (5.33)$$

Нетрудно убедиться, что при условии $\max\limits_{1<i\le n} b_i < \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} b_k$ ситуация $(u_i^0,...,u_n^0)$ действительно будет равновесной. Это условие означает близость производственных затрат всех участников. Если же данное условие не выполняется, то некоторые участники могут “выбыть из игры” (для них $u_i^0 = 0$). Следует отметить, что точка равновесия, определяемая (5.33), не является паретовской. Участникам выгодно произвести всем вместе очень мало товара, получив сумму a и практически не произведя затрат (в пределе нуль). Эту сумму можно распределить так, что все участники получат большую прибыль, чем в точке равновесия. Однако такая ситуация уже не будет равновесной, т.е. каждому участнику в отдельности выгодно ее нарушить. Чтобы подобные ситуации могли выступать в качестве решений, необходимо выйти за рамки бескоалиционных игр.

В общем случае для нахождения точек равновесия, как и седловых точек, используются численные процедуры итерационного типа. Среди них распространены градиентные методы, связанные с решением системы уравнений (5.29). Некоторые из этих методов изложены в работе [1].

Опишем одну процедуру нахождения равновесия, которую можно интерпретировать как динамический процесс принятия индивидуально выгодных недальновидных решений, весьма напоминающий процесс обучения в методе Брауна. Пусть у каждого игрока в игре n лиц функция наилучшего отклика

$$u_0^i\left(u^{-i}\right) = Arg\max_{u^i \in U^i} g^i\left(u^1,...,u^n\right), \quad \text{где } u^{-i} = \left(u^1,...,u^{i-1},u^{i+1},...,u^n\right)$$

является однозначной. Рассмотрим итерационный процесс

$$u_{k+1}^i = u_0^i\left(u_k^{-i}\right), \quad i = \overline{1,n}, k = 1,2,..., \tag{5.34}$$

называемый *процедурой нащупывания (одновременного) по Курно.* Процедуру (5.34) можно понимать так, что каждый игрок в ситуации u_k максимизирует свой выигрыш, считая, что стратегии остальных игроков не меняются (для этого ему надо знать только свою функцию выигрыша и множество стратегий). В результате происходит переход из ситуации u_k в ситуацию u_{k+1} и т.д.

Определение 5.2. *Ситуация равновесия* u_* *в игре Г называется устойчивой, если процесс* (5.34) *сходится к ней при любой начальной позиции (ситуации)* u_1.

Если ситуация равновесия устойчива, то ее можно гарантировано найти с помощью итерационного процесса (5.34), но, конечно, такая сходимость имеет место не всегда (очевидно, необходима единственность равновесия). Общих условий устойчивости не существует. При надлежащем выборе начальной ситуации и ограничении множества наилучших откликов окрестностью равновесия можно находить локально устойчивые равновесия. Условия локальной устойчевости формулируются в терминах вторых производных функций выигрыша достаточно просто (см. [10]).

Упражнения и задачи

5.1. Используя геометрический метод, найдите решение игр с матрицами:

$$a)\begin{Vmatrix} 10 & 7 & 11 & 0 \\ -8 & -2 & -9 & 1 \end{Vmatrix}; \quad б)\begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -3 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}; \quad в)\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

5.2. Преобразуя матрицу выигрышей и используя геометрический метод, найдите решение игры с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

5.3. Найдите решение матричной игры методом Шепли – Сноу.

$$\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.4. Решите методом Брауна матричную игру

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{Vmatrix}.$$

5.5. Решите симплекс-методом игру с матрицей:

$$a)\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad б)\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$