Глава 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. Постановка задачи линейного программирования

В последние десятилетия появился ряд классов экстремальных задач, к которым классические методы непосредственно оказались неприменимыми. Многие из них связаны с практическими проблемами техники, экономики, экологии и т.д. Характерным для таких задач является наличие ограничений в форме неравенств, большое количество переменных и ограничений, недифференцируемость целевых функций или функций ограничений, невыполнение тех или иных условий регулярности, что в классической математике не рассматривалось. В теоретическом плане классические результаты могут быть распространены на некоторые из этих случаев, но часто они становятся малоэффективными или вообще практически неприменимы. Поэтому появилась потребность в разработке новых идей и методов решения экстремальных задач, что привело к формированию новой области математики — математического программирования. Наиболее простым и широко используемым является аппарат линейного программирования, относящийся к случаю линейных целевых функций и функций ограничений. Рассмотрим сначала несколько примеров.

Транспортная задача. Пусть имеется m складов $S_1,\ldots, S_m$, предназначенных для хранения некоторого товара, и n пунктов потребления этого товара $P_1,\ldots, P_n$. Надо составить наиболее экономичный план перевозок товара со складов в пункты потребления. Исходными данными являются запасы товаров на складах $a_1,\ldots, a_m$ потребности пунктов потребления $b_1,\ldots,b_n$ и стоимости перевозок единицы товара c_{ij} с каждого склада S_i в каждый пункт потребления P_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Будем предполагать выполненным условие удовлетворения всех потребностей:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{2.1}$$

Произвольный план перевозок представляется матрицей $X = (x_{i\,j})$ размера m х n , где x_{ij} — количество товара, направляемого со склада S_i в пункт потребления P_j.

Множество допустимых планов задается следующими ограничениями:

условиями неотрицательности перевозок

$$x_{ij} \ge 0,\ i= \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}; \tag{2.2}$$

условиями ограниченности товара на складах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ \ i = \overline{1,m}; \tag{2.3}$$

условиями удовлетворения потребностей пунктов потребления

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

В силу условия (2.1) множество X, очевидно, не пусто. Точками этого множества являются матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям (2.2) - (2.4). Требуется выбрать из множества X такую точку (матрицу), которая минимизирует общую стоимость перевозок, т.е. целевую функцию вида

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \qquad (2.5)$$

Заметим, что если стоимости перевозок единицы товара с любого склада на любой пункт потребления отличны от нуля, т.е. $c_{ij} > 0$, то для оптимального плана перевозок, минимизирующего функцию (2.5), неравенства (2.4), очевидно, будут выполняться как равенства, поэтому ограничения (2.4) можно заменить на ограничения

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \qquad (2.6)$$

что по существу не изменит задачу. Если условие (2.1) представляет собой равенство

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad (2.7)$$

т.е. имеет место баланс наличия товара и потребности в нем, то тогда, очевидно, и ограничения (2.3) выполняются в виде равенств

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}. \qquad (2.8)$$

Это следует из того, что если в (2.3) или (2.4) хотя бы одно из ограничений представляет собой строгое неравенство, то, просуммировав $m + n$ неравенств, придем к противоречию с равенством (2.7).

Задача минимизации (2.5) при ограничениях (2.2) - (2.4) (или (2.2), (2.6), (2.8)) представляет собой важный случай задачи линейного программирования, называемый транспортной задачей. Для этой задачи существуют специфические методы решения, поэтому, а также в силу ее широкой распространенности мы в дальнейшем остановимся на ней более подробно.

Задача о рационе кормления. Пусть имеется возможность производить n видов кормов $K_1, \ldots, K_n$ для животноводческой фермы. Каждый из этих видов кормов характеризуется определенным набором полезных свойств (калорийность, содержание перевариваемого протеина, витаминных добавок и т.д.). Обозначим эти свойства буквами $H_1, \ldots, H_m$. Будем предполагать, что для каждого вида кормов K_j известно содержание в единице веса всех указанных компонент H_i, т.е. калорий, протеина, витаминов и т.д. Обозначим эти характеристики кормов буквами $a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Матрица $A=||a_{ij}||$ размера m x n полностью характеризует все виды кормов. Предположим, что известна годовая потребность фермы по всем компонентам $H_1, \ldots, H_m$, задаваемая вектором $b= (b_1,\ldots, b_m)$, а также вектор стоимости кормов $c=(c_1,\ldots,c_n)$, где c_i — стоимость единицы корма вида K_i.

Требуется составить оптимальный рацион кормления, который обеспечивает годовые потребности фермы по всем полезным компонентам и минимизирует общую стоимость.

Рацион кормления можно описывать вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_j — количество корма вида K_j, поставляемое на ферму в течение года. Он должен, во-первых, удовлетворять условию неотрицательности

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{2.9}$$

Во-вторых, должна быть обеспечена потребность во всех полезных компонентах. Для фиксированного x содержание компоненты H_i в рационе равно $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, поэтому должны выполняться ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{2.10}$$

Целевая функция (стоимость всех кормов) имеет вид

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2.11}$$

Задача заключается в минимизации (2.11) при ограничениях (2.9), (2.10).

Более кратко ее можно записать в матричной форме:

$$\min < c, x > \text{ при } Ax \leq b,\ x \geq 0.$$

Задача планирования производства. Пусть имеется m видов ресурсов $R_1, \ldots, R_m$, которые могут быть использованы для производства n видов товаров $T_1, \ldots, T_n$. Для производства единицы товара T_j необходимо затратить a_{ij} количества ресурса R_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ Матрица $A = \| a_{ij} \|$ называется технологической матрицей. Известна цена c_j на товар T_j и общее количество ресурсов $b_1, \ldots, b_m$. Вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ называются соответственно векторами ресурсов и цен.

Требуется выбрать такой план производства $x = (x_1, \ldots, x_n)$, который в условиях заданных ограничений на ресурсы максимизирует валовое производство (стоимость выпущенной продукции). Здесь x_j — производимое количество товара вида T_j.

Ограничения в этой задаче записываются следующим образом:

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,m}$$

или в матричной записи

$$x \geq 0,\ Ax \leq b. \tag{2.12}$$

Целевая функция имеет вид $W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ или

$$W = < c, x >. \tag{2.13}$$

Задача состоит в максимизации (2.13) при условиях (2.12).

Мы рассмотрели ряд практических задач, сводящихся к линейным моделям оптимизации. Возникающие математические задачи имели различную форму: они формулировались как задачи на максимум и минимум, имели ограничения в виде равенств, неравенств типа больше или равно и меньше или равно, смешанных типов. На первый взгляд это обстоятельство осложняет изучение линейного программирования, так как требует рассмотрения множества моделей. Однако оказывается, что все модели являются лишь различными формами одной и той же задачи линейного программирования и легко могут переводиться одна в другую стандартными преобразованиями. Это позволяет сводить задачи линейного программирования к одной определенной или нескольким наиболее удобным формам, которые только и достаточно анализировать.

В линейном программировании, как и вообще в экстремальных задачах, задача минимизации может быть сведена к задаче максимизации, и наоборот, если в качестве целевой функции новой задачи взять целевую функцию исходной задачи со знаком минус. Таким образом, задача минимизации $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ эквивалентна задаче максимизации $-\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ или $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{/} x_j$, где $c_j^{/} = - c_j$, $j = \overline{1,n}$.

Каждое ограничение типа меньше или равно в задаче линейного программирования можно заменить на ограничение типа больше или равно путем умножения на –1. Таким образом, ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n} a^{/}_{ij} x_j \ge b^{/}_i,$$

где $a^{/}_{ij} = - a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $b^{/}_i = - b_i$.

Каждое ограничение типа неравенства можно заменить на ограничение типа равенства путем введения новой неотрицательной переменной, называемой свободной. Так, ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y = b_i,$$

а ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y = b_i.$$

Если для единообразия свободная переменная вводится и в другие ограничения или в целевую функцию, то в качестве коэффициента при ней берется нуль.

Ограничение типа равенства можно заменить на два противоположных ограничения типа неравенства. Так, ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

эквивалентно двум ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j \le b'_i,$$

где $a'_{ij} = -a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $b'_i = -b_i$.

Если в задаче линейного программирования имеется переменная, на которую не наложено условие неотрицательности, то ее можно заменить на две неотрицательные переменные путем преобразования вида

$$x_j = x'_j - x''_j.$$

Если переменная x'_j ограничена снизу не нулем, а некоторой константой d, то путем замены переменных

$$x_j = d + x'_j$$

можно перейти к неотрицательной переменной x'_j.

С помощью перечисленных преобразований любую исходную постановку задачи линейного программирования можно свести к наиболее удобной форме. Различают три основных формы задачи линейного программирования.

Стандартная форма задачи линейного программирования:

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.14}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.15}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.16}$$

или в матричной записи

$$max \langle c, x\rangle, \tag{2.17}$$

$$Ax \le b, \tag{2.18}$$

$$x \ge 0. \tag{2.19}$$

Каноническая форма задачи линейного программирования:

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.20}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

В матричной записи условие (2.20) имеет вид

$$Ax = b. \tag{2.21}$$

Общая форма задачи линейного программирования:

$$max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}, \qquad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \qquad (2.23)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,r} \quad (k \le m, r \le n). \qquad (2.24)$$

Все вышесказанное, естественно, относится и к этим трем формам, т.е. они легко переводятся одна в другую. Стандартная форма является частным случаем общей при $k = m, r = n$, каноническая — при $k = 0, r = n$. Общая переводится в стандартную путем замены $m - k$ равенств на $2(m - k)$ неравенств, а в каноническую — путем замены k неравенств на k равенств с помощью k свободных переменных. Аналогично стандартная форма переводится в каноническую, и наоборот.

Для любой конкретной задачи линейного программирования логически возможны три случая:

а) допустимых планов нет, т.е. множество допустимых планов пусто, тогда задача не имеет решения;

б) множество допустимых планов непусто, но на этом множестве целевая функция неограничена сверху (для задачи на максимум) или снизу (для задачи на минимум), тогда задача не имеет решения;

в) множество допустимых планов непусто, и целевая функция ограничена соответственно сверху или снизу, тогда задача имеет решение (существует оптимальный план).

Нетрудно показать, что все случаи действительно могут иметь место. Для этого достаточно привести соответствующие примеры:

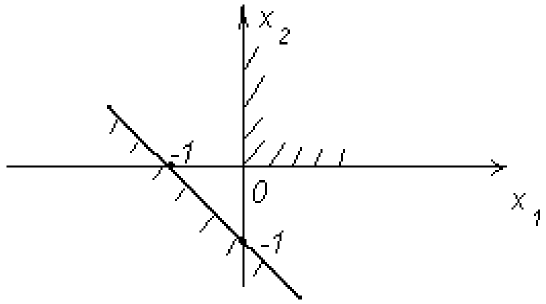
а) $max\,(x_1 + x_2), \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_1 + x_2 \le -1;$

б) $max\,(x_1 + x_2), \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_1 - x_2 \le 1;$

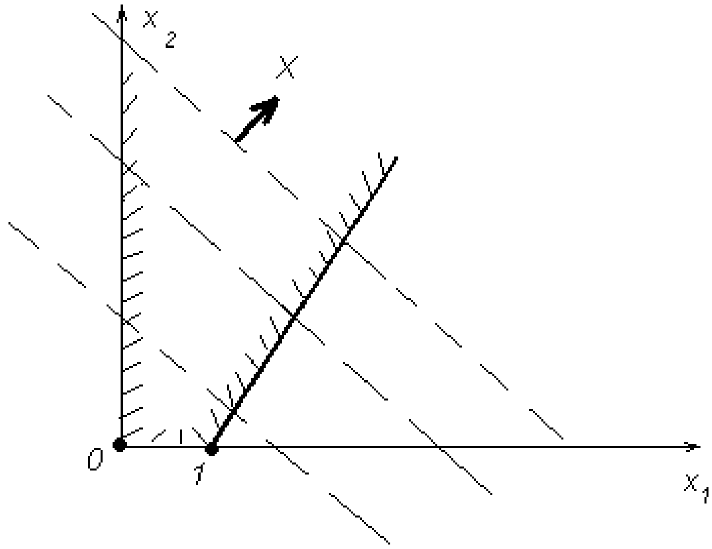
в) $max\,(x_1 + x_2), \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_1 + 2x_2 \le 1, 2x_1 + x_2 \le 1.$

Чтобы наглядно представить себе задачу линейного программирования, полезно рассмотреть ее геометрическую интерпретацию. Проведем соответствующие построения для вышеприведенных примеров а) – в).

В примере а) неотрицательность переменных означает, что множество допустимых планов должно лежать в неотрицательном ортанте. Линейное неравенство $x_1 + x_2 \le -1$ определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой, задаваемой аналитически уравнением $x_1 + x_2 = -1$. Эта полуплоскость не имеет общих точек с неотрицательным ортантом, значит, множество допустимых планов пусто и задача не имеет решения.



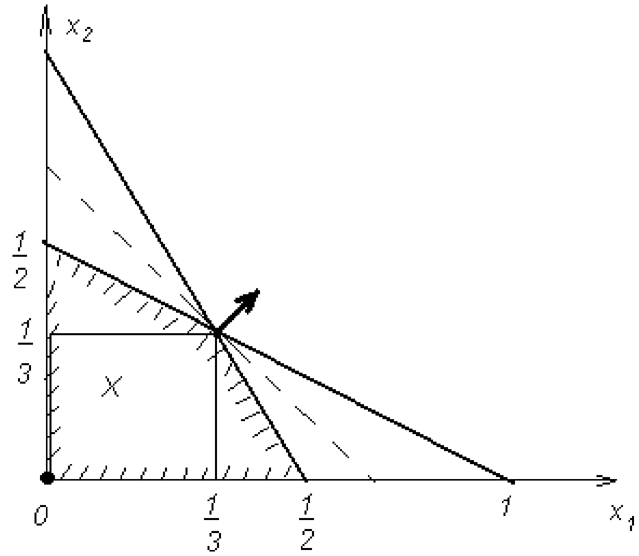
В примере б) множество допустимых планов X представляет собой пересечение неотрицательного ортанта и полуплоскости, лежащей выше прямой, определяемой уравнением $x_1 - x_2 = 1$. В отличие от предыдущего примера это множество непусто, но неограничено.



Линии уровня целевой функции $x_1 + x_2$, на которых она принимает постоянные значения, изображены на рисунке пунктирными прямыми, стрелка указывает направление роста. Очевидно, на множестве X эта функция сверху не ограничена, значит задача не имеет решения. Впрочем не следует думать, что неограниченность множества допустимых планов обязательно влечет за собой отсутствие решения. Если в примере б) изменить только целевую функцию на $-(x_1 + x_2)$, то задача будет иметь решение $x^\circ_1 = x^\circ_2 = 0$ (направление роста изменится на противоположное и линия наивысшего уровня на множестве X будет проходить через начало координат).

В примере в) множество допустимых планов X представляет собой пересечение неотрицательного ортанта и двух полуплоскостей, ограниченных сверху прямыми, задаваемыми уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$



Так как множество X замкнуто и ограничено, а целевая функция непрерывна, то по теореме Вейерштрасса задача имеет решение. Линия наивысшего уровня функции $x_1 + x_2$ на многограннике X проходит через вершину с координатами $x^\circ_1 = x^\circ_2 = \frac{1}{3}$. Это и есть решение задачи.

Таким образом, мы видим, что геометрически множество допустимых планов представляет собой многогранное множество, ограниченное в двумерном случае прямыми, а в многомерном случае гиперплоскостями, соответствующими каждому линейному ограничению задачи. Линии уровня целевой функции также являются прямыми или соответственно гиперплоскостями, и в качестве решения задачи (если оно существует) может быть принята вершина многогранного множества, через которую проходит линия наивысшего для задачи на максимум или наинизшего для задачи на минимум уровня. С помощью геометрического представления можно легко решать двумерные задачи или задачи, в которых все переменные с помощью ограничений типа равенств выражаются через две независимые переменные. Сложнее, но возможно, решать геометрически трехмерные задачи, на этом возможности геометрического метода исчерпываются. Однако геометрическое представление подсказывает идеи более общих методов решения задачи линейного программирования, которые базируются на важном общем свойстве задачи линейного программирования: если задача имеет решения, то хотя бы одно из них (в случае неединственности) соответствует вершине многогранного множества допустимых планов. Основной метод решения задачи линейного программирования — симплекс-метод — как раз и заключается в направленном переборе вершин многогранного множества допустимых планов.

2.2. Симплекс-метод

Прежде чем переходить к непосредственному изложению симплекс-метода, рассмотрим некоторые свойства задачи линейного программирования, которые нам понадобятся для обоснования метода. Сначала напомним некоторые определения.

Определение. Множество X n-мерного евклидова пространства называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x^1, x^2 \in X$ ему принадлежит весь отрезок, соединяющий эти точки, т.е. любая точка $x = dx^1 + (1 - d)x^2$, где $0 \le d \le 1$, принадлежит X.

Круг, треугольник, куб, полупространство являются примерами выпуклых множеств, а кольцо, например, не является выпуклым множеством.

Лемма. *Множество допустимых планов задачи линейного программирования выпукло.*

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме (2.17) — (2.19). Если $x^1, x^2 \in X$, то $x^1 \ge 0, x^2 \ge 0, Ax^1 \le b, Ax \le b$. Рассмотрим точку $x = dx^1 + (1 - d)x^2$, $0 \le d \le 1$. Очевидно, $x \ge 0$ и $Ax = dAx^1 + (1 - d)Ax^2 \le db + (1 - d)b = b$, т.е. $x \in X$. Для любой другой формы задачи линейного программирования доказательство легко получить либо непосредственно, как для стандартной формы, либо путем перехода к стандартной форме. Лемма доказана.

Доказательство леммы можно получить и другим путем, если использовать такой легко проверяемый факт, что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло, и учесть, что множество допустимых планов задачи линейного программирования представляет собой пересечение конечного числа полупространств. Значит, это множество является выпуклым и многогранным (но не обязательно многогранником, так как может быть и неограниченным).

Определение. Множество X n-мерного евклидова пространства называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. такие точки, в каждой окрестности которых имеются точки из X.

Предел и окрестность понимаются в обычном смысле (в евклидовой метрике).

Лемма. *Множество допустимых планов задачи линейного программирования замкнуто.*

Доказательство леммы несложно и может быть оставлено в качестве упражнения.

Определение. Точка x выпуклого множества X называется угловой (или крайней), если не существует таких точек $x^1, x^2 \in X, x^1 \ne x^2$, что $x = dx^1 + (1-d)x^2$ при некотором $d \in (0,1)$.

Например, для круга угловой является любая точка его границы, т.е. ограничивающей его окружности, для выпуклого многогранного множества угловыми точками являются его вершины. Эти точки характеризуются по определению тем, что они не представимы в виде линейной комбинации двух различных точек данного множества.

Рассмотрим некоторые важные свойства выпуклых множеств.

Теорема отделимости. *Для любого выпуклого замкнутого множества X и любой точки y, не принадлежащей X, существует разделяющая их гиперплоскость, т.е. существует такой вектор $a \ne 0$, что*

$$< a, y > < \inf_{x \in X} < a, x >.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию расстояния от фиксированной точки y до произвольной точки $x \in X$: $\rho\ (x, y)= |x - y|$. Эта функция непрерывна по x, ограничена снизу (нулем), значит, на замкнутом множестве X существует x°, реализующая нижнюю грань этой функции

$$| x^\circ - y | = \inf_{x \in X} | x - y | > 0. \tag{2.25}$$

(точка x° называется проекцией точки y на X).

Возьмем в качестве вектора $a=x^\circ - y\neq 0$. Так как $<a, a> = <a, x^\circ - y> > 0$, то

$$<a, x^\circ > > <a, y>. \tag{2.26}$$

С другой стороны, в силу (2.25) для любой точки $z \in X$

$$| z - y |^2 \geq | x^\circ - y |^2. \tag{2.27}$$

Если $x \in X$, то в силу выпуклости X точка

$$z = dx + (1-d)x^\circ = x^\circ + d(x - x^\circ) \in X,\ 0 \leq d \leq 1.$$

Подставив выражение для z в (2.27), имеем

$$| x^\circ + d(x - x^\circ)- y |^2 \geq | x^\circ- y |^2$$

или

$$< x^\circ + d(x - x^\circ)- y,\ x^\circ + d(x - x^\circ)- y > \ \geq < x^\circ- y, x^\circ- y >.$$

Из последнего неравенства, сокращая равные члены, имеем

$$2d< x - x^\circ, x^\circ - y > + d^2< x - x^\circ, x - x^\circ > \ \geq 0 \quad \forall d \in [0,1].$$

Последнее возможно лишь при

$$< x - x^\circ, x^\circ - y > \ \geq 0.$$

(в противном случае при $d \to 0$ приходим к противоречию). Значит

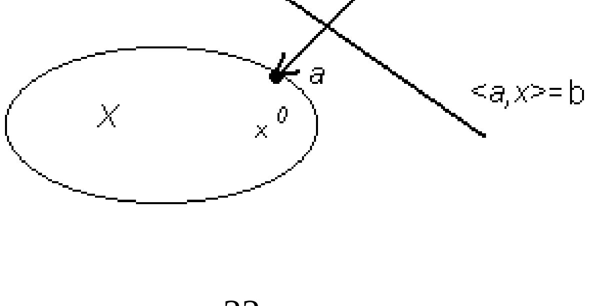
$$< a, x > \ \geq < a, x^\circ > \ \forall x \in X. \tag{2.28}$$

Из (2.26) и (2.28) получаем утверждение теоремы.

Геометрически теорема означает, что можно выбрать такую гиперплоскость, что множество X и точка y лежат в разных полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью (см. рисунок). Для этого надо взять построенный при доказательстве теоремы вектор a и число b, удовлетворяющее условию

$$< a, y > < b < < a, x^\circ > = \inf_{x\in X} <a,x>.$$

Гиперплоскость, определяемая уравнением $<a,x>= b$, отделяет y от X.



Теорема об опорной гиперплоскости. *В любой граничной точке* x° *выпуклого, замкнутого множества* X *существует опорная гиперплоскость, т.е. существует вектор* $a \neq 0$ *и число в такие, что* $<a, x^{\circ}> = b$, $<a, x> \geq b \ \ \forall x \in X$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек y^k, не принадлежащих X, такую, что $y^k \to x^{\circ}$ (так как x° - граничная точка X, то такая последовательность существует). По теореме отделимости для каждого y^k существует $a^k \neq 0$ такое, что

$$<a^k, y^k> < <a^k, x> \ \ \forall x \in X. \tag{2.29}$$

Вектора a^k могут быть пронормированы $|a^k| = 1$, поэтому существует (в силу ограниченности)

$$\lim_{k \to \infty} a^k = a \neq 0.$$

Переходя к пределу в (2.29), имеем

$$<a, x^o> \ \leq \ <a, x> \ \ \forall x \in X.$$

Осталось положить $b = <a, x^o>$, и теорема доказана.

Теорема о представлении. *Любая точка* x^o *выпуклого, замкнутого, ограниченного множества* X *может быть представлена в виде выпуклой (линейной) комбинации конечного числа угловых точек этого множества.*

Доказательство. Проведем его по индукции по наименьшей размерности n евклидова пространства R^n, содержащего множество X.

Если $n=1$, то X является отрезком и утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что теорема справедлива для n-1 и докажем ее для n. Пусть сначала x^o- граничная точка X. Построим в этой точке опорную гиперплоскость π. Множество $X^o = X \cap \pi$ как пересечение выпуклого, замкнутого, ограниченного множества X с выпуклым, замкнутым множеством π из (n-1)-мерного пространства является выпуклым, замкнутым, ограниченным и принадлежит (n-1)-мерному пространству. По индуктивному предположению для $x^o \in X$ найдутся угловые точки $x^1, \dots, x^k$ множества X^o такие, что

$$x^o = \sum_{i=1}^{k} d_i x^i, \quad d_i \geq 0, \quad i = \overline{1,k}, \qquad \sum_{i=1}^{k} d_i = 1.$$

Покажем, что $x^1, \dots, x^k$ являются угловыми точками и для X. Предположим противное, т.е. что для некоторой точки x^i найдутся $x^{/}, x^{//} \in X$, $x^{/} \neq x^{//}$, $d \in (0,1)$ такие, что $x^i = dx^{/} + (1-d)x^{//}$. Так как $x^i \in X^o \subseteq \pi$, то для определяющего π вектора a

$$< a, x^i > = < a, x^o >,$$

а поскольку π — опорная к X гиперплоскость,

$$< a, x^{/} > \leq < a, x^o >, \ < a, x^{//} > \ \leq < a, x^o >.$$

Так как $0 < d < 1$, то

$$<a, x^{/}> = \frac{1}{d}[<a, x^i> - (1-d)<a, x^{//}>] \geq \frac{1}{d}[<a, x^o> - (1-d)<a, x^o>] = <a, x^o>.$$

Значит, $x^{/} \in \pi$, но $x^{/} \in X$, следовательно, $x^{/} \in X^o = X \cap \pi$. Аналогично доказывается, что $x^{//} \in X^o$. Мы пришли к противоречию, так как x^i — угловая точка X^o.

Пусть теперь x^o — внутренняя точка X. Проведем через x^o прямую l. Пересечение $l \cap X$ является отрезком, концы этого отрезка $x^{/}$ и $x^{//}$ принадлежат границе множества X. Для них, как доказано, теорема верна, т.е. существуют угловые точки $y_1,\ldots, y_k, z_1,\ldots, z_r$ множества X такие, что

$$x^{/} = \sum_{i=1}^{k}\beta_i y_i, \qquad \sum_{i=1}^{k}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,k};$$

$$x^{//} = \sum_{i=1}^{r}\gamma_i\ z_i\ , \quad \sum_{i=1}^{r}\gamma_i\ = 1,\ \ \gamma_i\ \geq 0,\ \ i = \overline{1,r}.$$

Но $x^o = dx^{/} + (1\text{-}d)x^{//}$, где $0 < d < 1$, следовательно,

$$x^o = \sum_{i=1}^{k}\ d\beta_i y_i\ + \sum_{i=1}^{z}\ (1\text{-}d)\gamma_i z_i\ ,$$

$$d\beta_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,k},\ (1\text{-}d)\gamma_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,r},\ \sum_{i=1}^{k}\ d\beta_i + \sum_{i=1}^{z}\ (1\text{-}d)\gamma_i = 1,$$

т.е. выполняется утверждение теоремы.

Теперь можно доказать, что если задача линейного программирования имеет решение, то оно достигается в угловой точке — вершине многогранного множества допустимых планов (хотя, возможно, и не только в ней).

Теорема. *Если задача линейного программирования имеет решение, то существует угловая точка множества допустимых планов, являющаяся оптимальным планом.*

Доказательство. Пусть сначала множество допустимых планов ограничено, тогда по теореме о представлении, условия которой в этом случае выполнены, для любого оптимального плана x^o найдутся такие угловые точки $x^1,\ldots, x^k$ множества X, что

$$x^o = \sum_{i=1}^{k}d_i x^i\ , \quad \sum_{i=1}^{k}\ d_i = 1,\ d_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}.$$

В любой из основных форм задача состоит в максимизации функции $< c, x>$. Так как x^o — оптимальный план, то

$$< c, x^o > \ \geq \ < c, x^i >,\ i = \overline{1,k}.$$

С другой стороны,

$$<c, x^o > \ = \ <c, \sum_{i=1}^{k}d_i x^i > \ = \sum_{i=1}^{k}\ d_i <c, x^i >. \tag{2.30}$$

В силу условия $\sum_{i=1}^{k} d_i = 1$ существует хотя бы одно d_i, отличное от нуля; пусть $d_{io} > 0$. Покажем тогда, что

$$< c,\ x^{i_0} > \ = \ < c, x^o >, \tag{2.31}$$

т.е. x^{i_0} — оптимальный план. Предположим противное, т.е.

$$<c,\ x^{i_0} > \ < \ <c,\ x^0 >.$$

Имеем

$$d_i <c, x^o > \ \geq d_i <c, x^i >,\ i = \overline{1,k},\ \ i \neq i_o$$

$$d_{i_0} <c, x^o > \ > \ d_{i_0} <c,\ x^{i_0} >,$$

суммируя эти неравенства для $i = \overline{1,k}$, получим

$$<c, x^o> \; > \sum_{i=1}^{k} d_i <c, x^i>,$$

что противоречит равенству (2.30).

Пусть теперь X неограничено, x^o — оптимальный план. Возьмем достаточно большое число M такое, что $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 < M$ (x_i^0 — компоненты n-мерного вектора x^o). Обозначим через π — гиперплоскость, определяемую уравнением $\sum_{i=1}^{n} x_i = M$, а через L — полупространство, определяемое неравенством $\sum_{i=1}^{n} x_i \le M$.

Имеем $x^o \in X \cap L$ и $x^o \notin \pi$. Множество $X \cap L$ выпукло, замкнуто, ограничено, поэтому существуют такие угловые точки этого множества $x^1, \dots, x^r$, что

$$x^o = \sum_{i=1}^{r} d_i x^i, \; \sum_{i=1}^{r} d_i = 1, \; d_i \ge 0, \quad i = \overline{1,r}.$$

Без ограничения общности можно считать, что все $d_i > 0$ (иначе соответствующие нулевым коэффициентам угловые точки можно исключить из линейной комбинации), тогда аналогично доказанному равенству (2.31) имеем

$$<c, x^o> \; = \; <c, x^i>, \quad i = \overline{1,r}.$$

Если хотя бы одна из точек x^i является угловой для множества X, то теорема доказана. Если же все x^i не являются угловыми точками для X, то обязательно $x^i \in \pi$, $i = \overline{1,r}$. Действительно, если x^i не является угловой для X, то

$$x^i = dx' + (1-d)x'', \; x', x'' \in X, \quad x' \ne x'', \; 0 < d < 1.$$

Если при этом $x^i \notin \pi$, то x^i является внутренней точкой для L. Нетрудно видеть, что для x^i справедливо представление в виде следующей линейной комбинации:

$$x^i = d\Bigl(x^i + \frac{x' - x^i}{K}\Bigr) + (1-d)\Bigl(x^i + \frac{x'' - x^i}{K}\Bigr),$$

где K — сколь угодно большое положительное число. Выбором K можно сделать так, чтобы вектора $\tilde{x} = x^i + \frac{x' - x^i}{K}$ и $\tilde{\tilde{x}} = x^i + \frac{x'' - x^i}{K}$ в разложении x^i будут внутренними точками для L. Кроме того, $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ принадлежат отрезку, соединяющему точки x' и x'', поэтому $\tilde{x} \in X \cap L$, $\tilde{\tilde{x}} \in X \cap L$ и пришли к противоречию с тем, что x^i является угловой точкой для $X \cap L$.

Значит, все $x^i \in \pi$, но тогда из представления $x^o = \sum_{i=1}^{r} d_i x^i$ следует, что $x^o \in \pi$, а это противоречит выбору числа M. Теорема полностью доказана.

В силу доказанной теоремы для нахождения решения задачи линейного программирования достаточно ограничиться перебором угловых точек или вершин множества допустимых планов. Однако при этом возникают две проблемы. Во-первых, число вершин может быть очень велико, при этом простой перебор теряет всякий смысл. Суть рассматриваемого далее симплекс-метода как раз и состоит в организации целенаправленного перебора, который позволяет решать практические задачи весьма большой размерности (с большим числом вершин). Во-вторых, надо уметь находить угловые точки в конструктивной форме, удобной для построения вычислительного алгоритма. Для этого может быть использована алгебраическая характеристика (представление) угловых точек множества допустимых планов задачи линейного программирования, которая обоснована в следующей теореме (для задачи в стандартной форме).

Теорема. *Для того чтобы ненулевой допустимый план являлся угловой точкой множества допустимых планов*

$$X = \{ x \mid x \geq 0 , Ax \leq b\},$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор из его ненулевых компонент $\bar{x}$ *удовлетворял квадратной невырожденной системе уравнений вида*

$$\bar{A}\,\bar{x} = \bar{b}, \tag{2.32}$$

где $\bar{A}$ — *квадратная подматрица матрицы A (полученная вычеркиванием нескольких строк и столбцов матрицы A),* $\det \bar{A} \neq 0$, $\bar{b}$ — *вектор из части компонент вектора b.*

Доказательство. *Достаточность.* Без ограничения общности можно считать, что первые k компонент вектора x отличны от нуля (положительны), а последние $n - k$ компонент равны нулю ($1 \leq k \leq n$). Введем вектор-столбец

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы существует невырожденная квадратная подматрица $\bar{A}$ матрицы A размера $k \times k$ такая, что $\bar{A}\,\bar{x} = \bar{b}$, где $\bar{b}$ — вектор из части компонент вектора b. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{A}$ состоит из первых k строк и первых k столбцов матрицы A, а вектор $\bar{b}$ — вектор из первых k компонент вектора b (это всегда можно достичь соответствующей переменой нумерации или перестановкой строк и столбцов).

Таким образом,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Предположим противное, т.е. x не является угловой точкой X, тогда существуют $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$, $0 < d < 1$ такие, что $x = dx' + (1-d)x''$. Так как $x' \geq 0$, $x'' \geq 0$, $0 < d < 1$ и $dx_j' + (1-d)x_j'' = x_j = 0$, $j = \overline{k+1, n}$, то $x_j' = x_j'' = 0$, $j = \overline{k+1, n}$.

Далее $Ax' \leq b$, $Ax'' \leq b$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' \leq b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j'' \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

но $x_j' = x_j'' = 0$, $j = \overline{k+1, n}$, значит,

$$\sum_{j=1}^{\kappa} a_{ij} x_j^{/} \le b_i,\ \sum_{j=1}^{\kappa} a_{ij} x_j^{//} \le b_i,\ i=\overline{1,k},\ k \le m,$$

т.е. $\overline{A}\ \overline{x}^{/} \le \bar{b},\ \overline{A}\ \overline{x}^{//} \le \bar{b}$, где

$$\overline{x}^{'} = \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ \dots \\ x_k^{'} \end{pmatrix},\quad \overline{x}^{''} = \begin{pmatrix} x_1^{''} \\ \dots \\ x_k^{''} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$d\overline{A}\ \overline{x}^{/} + (1-d)\ \overline{A}\ \overline{x}^{//} = \overline{A}\ \overline{x} = \bar{b}, \text{ т.е.}$$

$$d\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{/} + (1-d) \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{//} = b_i,\quad i=\overline{1,k}, \tag{2.33}$$

поэтому $\overline{A}\ \overline{x}^{/} = \overline{A}\ \overline{x}^{//} = \bar{b}$, (если хотя бы для одного i выполняется $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{/} < b_i$ или $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{//} < b_i$, то при $0 < d < 1$ выполняется $d\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{/} + (1-d)\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{//} < b_i$, что противоречит равенству (2.33). Но по условию $det\overline{A} \ne 0$, значит, $\overline{x}^{/} = \overline{x}^{//} = \overline{A}^{-1}\bar{b}$, откуда $x^{/} = \overline{x}^{//}$, пришли к противоречию с предположением.

Необходимость. Пусть x — угловая точка множества X. Покажем сначала, что существует такой номер i, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i. \tag{2.34}$$

Предположим противное, т.е. $Ax < b$. Так как $x \ne 0$, существует номер j такой, что $x_j > 0$. Рассмотрим вектора

$$x^{/} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{j-1} \\ x_{j-\varepsilon} \\ x_{j+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\qquad x'' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{j-1} \\ x_{j+\varepsilon} \\ x_{j+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$, очевидно, $x^{/} \ge 0,\ x^{//} \ge 0,\ Ax^{/} \le b,\ Ax^{//} \le b$, т. е. $x^{/} \in X,\ x^{//} \in X$, но $x = \frac{1}{2}(x^{/} + x^{//}),\ x^{/} \ne x^{//}$, пришли к противоречию с тем, что x — угловая точка X.

Итак, существует хотя бы один номер i, для которого справедливо (2.34). Без ограничения общности можно считать, что равенство (2.34) выполняется для $i = \overline{1,r}\,(1 \le r \le m)$. Кроме того, считаем, как и ранее, что

$$x_j > 0,\ j=\overline{1,k},\quad x_j = 0,\ j = \overline{k+1,n},\ (1 \le k \le n).$$

Рассмотрим вектора

$$\overline{a}^{1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \quad \overline{a}^{2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \dots, \overline{a}^{k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \dots \\ a_{rk} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что они линейно независимы.

Предположим противное, что существует ненулевой вектор

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_k \\ \\ \end{pmatrix}$ такой, что $\overline{\overline{A}} z = 0$, где $\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$.

Возьмем n-мерные вектора

$$x' = \begin{pmatrix} \overline{x} - \varepsilon z \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x'' = \begin{pmatrix} \overline{x} + \varepsilon z \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, при достаточно малом ε выполняются неравенства

$$x' \geq 0, \; x'' \geq 0, \; Ax' \leq b, \; Ax'' \leq b$$

(для $i = \overline{1,r}$ ограничения выполняются в силу того, что $\overline{\overline{A}} z = 0$, а для $i = \overline{r+1,n}$ — в силу малости ε и неравенств $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$). Но тогда $x', x'' \in X$ и $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$, что противоречит предположению о том, что x — угловая точка X. Значит, r-мерные вектора $\overline{a}^1, \overline{a}^2, \dots, \overline{a}^k$ независимы, а поэтому их число не может превышать r (факт, известный из линейной алгебры), т.е. $r \geq k$. В матрице $\overline{\overline{A}}$ можно выбрать независимые k строк (это также известный в линейной алгебре факт), тогда получим, очевидно, такую матрицу $\overline{A}$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана полностью.

Замечание. Приведенное доказательство теоремы с незначительными изменениями годится и для задачи линейного программирования в канонической форме (провести его в качестве упражнения).

Следствие. *Число угловых точек множества допустимых планов задачи линейного программирования конечно.*

Это утверждение легко вытекает из предыдущей теоремы, так как число квадратных подматриц матрицы коэффициентов A конечно.

Вектор x, являющийся угловой точкой множества допустимых планов X, принято называть опорным планом. Опорный план называют невырожденным, если ему соответствует система уравнений вида (2.32) порядка m, где m — число строк матрицы коэффициентов A. Задача линейного программирования называется невырожденной, если все ее опорные планы невырождены. Условие невырожденности облегчает решение задачи линейного программирования (в частности, гарантирует сходимость симплекс-метода), хотя и вырожденные задачи вполне доступны для практического решения (при соответствующей модификации вычислительных методов).

Система независимых вектор-столбцов матрицы *A* в разложении (2.32) называется базисом опорного плана *x*. Если задача невырождена, то базис состоит из m векторов и ранг матрицы *A* равен *m*.

Симплекс-метод состоит в последовательном переходе от одного опорного плана к другому, доставляющему большее (для задачи на максимум) значение целевой функции. Так как опорный план целиком определяется своим базисом из соотношения (2.32), по существу производится перебор базисов или квадратных подматриц матрицы коэффициентов. Этот процесс конечен, т.е. за конечное число шагов либо находится решение задачи линейного программирования, либо выясняется, что она не имеет решения. Каждый шаг алгоритма симплекс-метода состоит в замене одного из векторов базиса другим, приводящим к большему значению целевой функции. Для реализации этой идеи необходимо, во-первых, уметь находить начальную точку (опорный план), и, во-вторых, уметь производить замену одного вектора базиса опорного плана другим так, чтобы происходил рост (и желательно наибольший) целевой функции. Сначала рассмотрим второй момент, считая известной начальную точку (произвольный опорный план).

Задачу линейного программирования будем считать заданной в канонической форме:

$$max < c, x >$$

при ограничениях

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

Задача предполагается невырожденной, поэтому ранг матрицы A равен *m* (число строк) и число столбцов не меньше числа строк $n \geq m$ (как известно из линейной алгебры, ранг матрицы не превышает минимума из числа строк и столбцов).

Пусть известна некоторая угловая точка x множества допустимых планов

$$X = \{x / x \geq 0, Ax = b\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что базис этой точки образует первые *m* столбцов матрицы A, т. е.

$$\overline{A}\overline{x} = b\,, \tag{2.35}$$

где $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}.$

Обозначим вектор-столбцы матрицы A через a^i, $i = \overline{1,m}$, тогда базис состоит из векторов $a^1,\ldots,a^m$.

Так как задача невырожденная, первые *m* компонент вектора *x* отличны от нуля (иначе получили бы систему вида (2.32) порядка меньше *m*), т.е. $\overline{x} > 0$; остальные компоненты x равны нулю.

Соотношение (2.35) представляет собой разложение вектора ограничений b по векторам $a^1,...,a^m$:

$$b = \sum_{i=1}^{m} a^i x_i. \qquad (2.36)$$

Разложим по векторам $a^1,...,a^m$, образующим базис m-мерного пространства, все вектор-столбцы матрицы А:

$$a^k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik} a^i, k = \overline{1,n}. \qquad (2.37)$$

Коэффициенты x_{ik} в разложении (2.37) могут быть получены по формуле

$$x_{ik} = \left(\overline{A}^{-1} a^k\right)_i,$$

где через $\left(\overline{A}^{-1} a^k\right)_i$ обозначена i-я компонента вектора $\overline{A}^{-1} a^k$, полученного умножением матрицы, обратной к матрице из векторов базиса $\overline{A}$, на вектор a^k.

Из (2.36) и (2.37) следует для любого λ и $k = \overline{m+1,n}$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a^i + \lambda\left(a^k - \sum_{i=1}^{m} x_{ik} a^i\right) = b$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \lambda x_{ik}) a^i + \lambda a^k = b. \qquad (2.38)$$

Равенство (2.38) означает, что вектор

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \overline{x} - \lambda \overline{A}^{-1} a^k \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

с k-й компонентой, равной λ, удовлетворяет ограничению

$$A\tilde{x} = b.$$

Если при этом $\tilde{x} \geq 0$, т.е. $\overline{x} - \lambda \overline{A}^{-1} a^k \geq 0, \lambda \geq 0$, то $\tilde{x} \in X$, т.е. является допустимым вектором. Это накладывает следующие ограничения на λ:

$$0 \leq \lambda \leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i: x_{ik} > 0}} \frac{x_i}{x_{ik}}. \qquad (2.39)$$

Выбором номера k $(m+1 \leq k \leq n)$ и числа λ (в пределах, определяемых (2.39)), можем попытаться добиться того, чтобы вектор $\tilde{x}$ был опорным планом и при этом обеспечивал большее значение целевой функции, чем исходный опорный план, т.е. $< c,x ><< c,\tilde{x} >$.

Для того чтобы $\tilde{x}$ был опорным планом, необходимо и достаточно, чтобы он разлагался по базису из m векторов, и так как при $\lambda > 0$ в разложении (2.38) вводится новый вектор a^k $(m+1 \le k \le n)$, один из векторов $a^1,...,a^m$ должен быть выведен из разложения, то есть одна из компонент вектора $\bar{x} - \lambda \bar{A}^{-1} a^k$ должна равняться нулю. Изменение же целевой функции равно

$$\delta = \langle c,\tilde{x} \rangle - \langle c,x \rangle = \left\langle \bar{c},\bar{x} - \lambda \bar{A}^{-1} a^k \right\rangle + c_k \lambda - \langle \bar{c},\bar{x} \rangle = \lambda(c_k - \left\langle \bar{c},\bar{A}^{-1} a^k \right\rangle) = \lambda(c_k - z_k),$$

где $\bar{c} = (c_1,...,c_m),\ z_k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik} c_i$. Таким образом, $\delta > 0$ при $\sum_{i=1}^{m} x_{ik} c_i < c_k$.

Тут возможны три случая:

I. Существует номер k_0 $(m+1 \le k_0 \le n)$, для которого $c_{k_0} - z_{k_0} > 0$ и $x_{ik_0} > 0$ при некотором i $(1 \le i \le m)$. Тогда положим

$$\lambda = \min_{\substack{1 \le i \le m \\ i: x_{ik_0} > 0}} \frac{x_i}{x_{ik_0}}. \tag{2.40}$$

При этом компонента вектора $\tilde{x}$ с номером i, на котором достигается минимум в (2.40), обратится в нуль, причем в силу предположения о невырожденности этот номер единственен (иначе получили бы базис с числом векторов меньше m). Пусть этот номер i_0. Покажем, что система векторов $a^1,...,a^{i_0-1},a^{i_0+1},...,a^m,a^{k_0}$ линейно независима. Предположим противное, то есть существуют такие не все равные нулю числа $\beta_1,...,\beta_{i_0-1},\beta_{i_0+1},...,\beta_m,\beta_{k_0}$, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne i_0}}^{m} \beta_i a^i + \beta_{k_0} a^{k_0} = 0.$$

Используя разложение вида (2.37) для a^{k_0}, имеем

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne i_0}}^{m} (\beta_i + \beta_{k_0} x_{ik_0}) a^i + \beta_{k_0} x_{i_0 k_0} a^{i_0} = 0,$$

но вектора $a^1,\ldots, a^m$ линейно независимы, поэтому

$$\beta_i + \beta_{k_0} x_{ik_0} = 0,\ i = \overline{1,m},\ i \ne i_o,\ \beta_{k_0} x_{i_0 k_0} = 0,$$

а так как $x_{i_0 k_0} > 0$, получаем $\beta_{k_0} = 0,\ \beta_i = 0,\ i = \overline{1,m},\ i \ne i_o$; пришли к противоречию с предположением.