Таблица 4.2

W	$f_2(W)$	X_2	W	$f_2(W)$	X_2
0…21	0	0	48…65	192	0
22…23	85	1	66…67	255	3
24…43	96	0	68…69	266	2
44…45	170	2	70…71	277	1
46…47	181	1	72…87	288	0

Из табл. 4.2 следует, что при грузоподъемности транспортного средства до 21 ед. ничего в него погрузить нельзя, при грузоподъемности 22…23 ед. можно погрузить только один предмет второго типа, при грузоподъемности 24…43 ед., либо один предмет первого типа, либо один предмет второго типа. Максимальная эффективность груза будет при погрузке предметами первого типа. При грузоподъемности 44…45 ед. можно погрузить либо один предмет первого вида, либо два предмета второго вида. Большая эффективность груза будет в последнем случае, и $f_2(W)$=170. При грузоподъемности 46…47 ед. можно погрузить один предмет первого вида, до двух предметов второго вида или же по одному предмету первого и второго видов. Эффективность груза в последнем варианте максимальна.

Приступим к оптимизации на третьем шаге. Будем загружать транспортное средство предметами первых трех видов. Требуется максимизировать по X_3:

$$f_{123} \equiv X_3V_3 + f_2(W - X_3P_3); f_3(W) = \max_{X_3} f_{123};$$

$$0 \le X_3 \le \left[\frac{W}{P_3}\right].$$

Задаем значения W и для каждого такого значения получаем максимум f_{123} по X_3. Значения $f_2(W)$ будут из табл. 4.2. Например, пусть $W = 38$ ед. Возможное значение X_3 =0; 1; 2 ед. и соответствующая эффективность предметов третьего вида− 0; 50; 100 ед. На предметы первого и второго видов остается соответственно грузоподъемность 38; 22; 6 ед. По табл. 4.2 находим $f_2(W)$=96; 85; 0 ед. Суммарная эффективность 96; 135; 100 ед. Максимальное значение эффективности при $W = 38$ ед. равно 135 ед. для $X_3 = 1$. Результаты расчетов помещены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

W	$f_3(W)$	X_3	W	$f_3(W)$	X_3
0…15	0		44…45	170	0
16…21	50	1	46…47	181	0
22…23	85	0	48…63	192	0
24…31	96	0	64…69	142	1
32…37	100	2	70…71	277	0
38…39	135	1	72…87	288	0
40…43	146	1			

Проводим оптимизацию на последнем (четвертом) шаге. Получим оптимальную грузоподъемность самолета W^*.

Зададим значение W, которое может быть занято грузом четырех видов и вычислим $X_4, f_4(W)$ (табл. 4.4). Строго говоря, здесь нам достаточно вычислить одну строку табл. 4.4 для $W = 83$.

Таблица 4.4

W	$f_3(W)$	X_3	W	$f_3(W)$	X_3
0…9	0	0	46…47	181	0
10…15	20	1	48…57	192	0
16…21	50	0	58…63	212	1
22…23	85	0	64…69	242	0
24…33	96	0	70…71	277	0
34…37	116	1	72…81	288	0
38…39	135	0	82…87	308	1
40…45	146	0			

Второй этап. Нахождение оптимального решения поставленной задачи. Максимальное значение $f_4(W)$ — это есть W^*, соответствующее значение аргумента X_4 — количество груза четвертого вида, который берет самолет (X_4^*):

$$W^* = \max f_4(W) = 308; X_4^* = 1.$$

Масса предметов четвертого вида груза остается $W - 10 = 73$ ед. При значении $W = 73$ ед. по табл. 4.3 получаем $X_3^* = 0;$ аналогично получаем $X_2^* = 0; X_1^* = 3.$

Если еще раз вернуться к табл. 4.1−4.4, то увидим, что они содержат данные для оптимальной загрузки самолета любой грузоподъемности (до $W = 87$ ед.) указанными предметами. Таким образом, мы решили не только поставленную задачу, а большой набор родственных задач.

5. Задача об использовании рабочей силы

Производителю работ нужно определить оптимальное число работников в каждый из n месяцев. Производственные задания для каждого месяца известны. Допустим, что в j-й месяц идеальное число рабочих− m_j. Если бы производитель работ мог увольнять и принимать новых рабочих без дополнительных затрат, то он мог бы в j-й месяц принять ровно m_j рабочих ($j = 1,2,...n$).

Предположим, что работа j-го месяца может быть выполнена и меньшим числом рабочих при сверхурочной работе. Пусть x_j − фактическое число рабочих в j-й месяц. Затраты по изменению численности рабочих при переходе от $(j-1)$–го месяца к j–му определяется функцией $f_j(x_j - x_{j-1})$.

В зависимости от знака величины $x_j - x_{j-1}$ функция $f_j(x_j - x_{j-1})$ определяет затраты по найму или увольнению. Очевидно, $f_j(0) \equiv 0.$ Отклонение численности рабочих от m_j приводит к расходам $g_j(x_j - m_j),$ причем $g_j(0) \equiv 0; j = 1,2,...,n.$ Считаем, что в начальный момент число рабочих составило m_0. Целевая функция задачи z определяется соотношением:

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j),$$

где $x_0 = m_0$. Очевидно, что имеется задача с фиксированным началом.

Выведем основное рекуррентное соотношение:

$$z = \min_{x_1,...,x_n} \{f_1(x_1 - m_0) + g_1(x_1 - m_1)\} + \sum_{j=2}^{n} \{f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\};$$

$$\min_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} \{f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\} = \min_{x_2}\{[f_2(x_2 - x_1) + g_2(x_2 - m_2)] +$$

Данную задачу удобно решать в обратном направлении.

$$+ \min_{x_3,...,x_n} \sum_{j=3}^{n} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\}.$$

Обозначим $\Lambda_n(\xi) = \min_{x_n}[f_n(x_n - \xi) + g_n(x_n - m_n)],$ где $\xi = x_{n-1}$.

Основное рекуррентное соотношение имеет вид $\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k}[f_k(x_k - \xi) + g_k(x_k - m_k) + \Lambda_{k+1}(x_k)],$ где $\Lambda_k(\xi)$ — минимальные затраты за месяцы от k-го по n-й включительно, если количество работников в $(k-1)$-й месяц равно ξ.

На последнем шаге определяется оптимальное число рабочих в первый месяц при условии, что на начало месяца их численность составляла m_0. Определив x_1^*, последовательно находим $x_2^* = \tilde{x}_2(x_1^*), x_3^* = \tilde{x}_3(x_2^*)$ и так далее. Здесь решение в обратном направлении удобно, так как ничего не известно о числе рабочих на $(n+1)$-й месяц, тогда как в начале процесса задано m_0.

Рассмотрим теперь случай когда, кроме m_0, задано и m_{n+1}. На этот раз будем искать целые числа, обращающие в минимум выражение

$$z = \sum_{j=1}^{n} [f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j) + f_{n+1}(m_{n+1} - x_n)]$$

Здесь

$$z = \min_{x_n}\left\{ f_{n+1}(m_{n+1} - x_n) + \min_{x_1,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} [f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)]\right\}.$$

Поскольку теперь задано конечное состояние системы m_{n+1}, то будем решать задачу в прямом направлении.

Определим последовательность функций состояния

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_1,...,x_k}\left\{ f_{k+1}(\xi - x_k) + g_{k+1}(\xi - m_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)\right\},$$

$k = 1,2,...,n,$ где минимум находим по целым и неотрицательным $x_1,...,x_k.$

Тогда $\Lambda_1(\xi) = \min\limits_{x_1}\{f_2(\xi - x_1) + g_2(\xi - m_2) + f_1(x_1 - m_0) + g_1(m_1 - x_1)\}$.

Основное рекуррентное соотношение динамического программирования

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k}\{f_{k+1}(\xi - x_k) + g_{k+1}(\xi - m_{k+1}) + \Lambda_{k-1}(x_k)\}.$$

Функция $\Lambda_k(\xi)$ есть минимальные затраты в течение $(k+1)$-первых месяцев при условии, что численность рабочих в $(k+1)$–й месяц равна ξ.

На последнем шаге при $k = n$, положив $\xi = m_{n+1}$, приходим к соотношению

$$\Lambda_n(m_{n+1}) = \min_{x_n}\{f_{n+1}(m_{n+1}) + \Lambda_{n-1}(x_n)\}. \tag{4.5.1}$$

Определив из (4.5.1) оптимальное значение x_n^* по таблице предыдущего $(n-1)$-го шага, найдем искомые значения всех остальных переменных $x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, ..., x_1^*$ (для этого необходимо подставить значение $\xi = x_n^*$).

Подведем итоги. Если задано начальное состояние системы, то задача решается методом динамического программирования в обратном направлении. Если задано конечное состояние системы, то в прямом направлении. Наконец, если заданы как начальные, так и конечные состояния, то можно решать как в прямом, так и обратном направлениях. Результаты решения по обоим схемам совпадут.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Производителю работ нужно определить оптимальное число работников в каждый из четырех месяцев. Производственные задания для каждого месяца известны. Допустим, что в j-й месяц идеальное число рабочих — m_j. Если бы производитель работ мог увольнять и принимать новых рабочих без дополнительных затрат, то он мог бы в j-й месяц принять ровно m_j рабочих. Требуемое число работников по месяцам $m_1 = 2, m_2 = 5, m_3 = 3, m_4 = 1$. Число работников в начале работ $m_0 = 2$.*

Р е ш е н и е.

Пусть функции затрат имеют следующий вид:

$$f_j(x_j - x_{j-1}) = \begin{cases} 10 \cdot (x_j - x_{j-1}), & \textit{если} \quad x_j \ge x_{j-1}; \\ 7 \cdot (x_{j-1} - x_j), & \textit{если} \quad x_j < x_{j-1}; \end{cases}$$

$$f_j(0) \equiv 0;$$

$$g_j(m_j - x_j) = \begin{cases} 8 \cdot (x_j - m_j), & \textit{если} \quad x_j \ge m_j; \\ 11 \cdot (m_j - x_j) & \textit{если} \quad x_j < m_j; \end{cases}$$

$$g_j(0) \equiv 0.$$

Так как начальное условие зафиксировано, то задачу будем решать в обратном направлении.

<u>Ш а г I</u>. $(k = 4)$.

$$\Lambda_4(\xi) = \min_{x_4}\{f_4(x_4 - \xi) + g_4(x_4 - m_4)\} = \min_{x_4}\Omega_4(x_4, \xi).$$

Для отыскания $\Lambda_4(\xi)$ составляем вспомогательную таблицу значений $\Omega_4(x_4, \xi)$ (табл. 5.1). Поскольку все функции $f_j(x_j - x_{j-1})$ и $g_j(m_j - x_j)$ выпуклы по переменным x_j, то и функция $f_j(x_j - x_{j-1})$ выпукла по x_4 для всех ξ.

Таблица 5.1

ξ	x_4	Ω_4	ξ	x_4	Ω_4
0	0 1 2	11 10 28	3	0 1 2	32 14 15
1	0 1	18 0	4	0 1 2	39 21 22
2	0 1 2	25 7 8	5	0 1 2	46 28 29

Поэтому для нахождения $\Lambda_4(\xi)$ достаточно определить первый относительный минимум $\Omega_4(x_4,\xi)$, который и будет глобальным.

В соответствии с этим значения функции $\Omega_4(x_4,\xi)$ вычисляем лишь для области значений x_4, содержащий этот минимум (табл. 5.1).

Вычисления выполняем следующим образом

1. $\xi = 0, x_4 = 0, \Omega_4 = 0 + 11 \cdot (1-0) = 11;$
   $\xi = 0, x_4 = 1, \Omega_4 = 10 \cdot 1 + 0 = 10;$
   $\xi = 0, x_4 = 2, \Omega_4 = 10 \cdot (2-0) + 8 \cdot (2-1) = 28; \Lambda_4(\xi = 0) = 10.$
2. $\xi = 1, x_4 = 0, \Omega_4 = 7 \cdot (1-0) + 11 \cdot (1-0) = 18;$
   $\xi = 1, x_4 = 1, \Omega_4 = 7 \cdot (1-1) + 11 \cdot (1-1) = 0; \Lambda_4(\xi = 1) = 0.$
3. $\xi = 2, x_4 = 0, \Omega_4 = 7 \cdot (2-0) + 11 \cdot (1-0) = 25;$
   $\xi = 2, x_4 = 2, \Omega_4 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot (2-1) = 8;$
   $\xi = 2, x_4 = 1, \Omega_4 = 7 \cdot (2-1) + 11 \cdot (1-1) = 7;$
   $\Lambda_4(\xi = 2) = \min\limits_{x_4} \Omega_4(\xi = 2, x_4) = 7.$
4. $\xi = 3, x_4 = 0, \Omega_4 = 7 \cdot (3-0) + 11 \cdot (1-0) = 32;$
   $\xi = 3, x_4 = 1, \Omega_4 = 7 \cdot (3-1) + 11(1-1) = 14;$
   $\xi = 3, x_4 = 2, \Omega_4 = 7 \cdot (3-2) + 8 \cdot (2-1) = 15; \Lambda_4(\xi = 3) = 14.$
5. $\xi = 4, x_4 = 0, \Omega_4 = 7 \cdot (4-0) + 11 \cdot (1-0) = 39;$
   $\xi = 4, x_4 = 1, \Omega_4 = 7 \cdot (4-1) + 11(1-1) = 21;$
   $\xi = 4, x_4 = 2, \Omega_4 = 7 \cdot (4-2) + 8 \cdot (2-1) = 22; \Lambda_4(\xi = 4) = 21.$
6. $\xi = 5, x_4 = 0, \Omega_4 = 7 \cdot (5-0) + 11 \cdot (1-0) = 46;$
   $\xi = 5, x_4 = 1, \Omega_4 = 7 \cdot (5-1) + 0 = 28;$
   $\xi = 5, x_4 = 2, \Omega_4 = 7 \cdot (5-2) + 8 = 29; \Lambda_4(\xi = 5) = \min\limits_{x_4} 28.$

Результаты заносим в табл. 5.1.

Значения $\Lambda_4(\xi) = \min\limits_{x_4}(\xi, x_4)$ для всех ξ выбираем из табл. 5.1 и заносим в основную табл. 5.2.

Таблица 5.2

ξ	$\Lambda_4(\xi)$	x_4^0	ξ	$\Lambda_4(\xi)$	x_4^0
0	10	1	3	14	1
1	0	1	4	21	1
2	7	1	5	28	1

<u>*Ш а г II*.</u> Здесь используется рекуррентное соотношение

$$\Lambda_3(\xi) = \min_{x_3}\{f_3(x_3 - \xi) + g_3(x_3 - m_3) + \Lambda_4(x_3)\},$$

а вычисления выполняются аналогичным образом.

Вспомогательные результаты представлены в табл. 5.3, а итоговые — в таблице 5.4.

Таблица 5.3

ξ	x_3	Ω_3	ξ	x_3	Ω_3
0	0	40	3	0	64
	1	32		1	36
	2	38		2	25
				3	14
				4	24
1	0	50	4	0	32
	1	22		1	21
	2	28		2	29
2	0	57	5	0	39
	1	29		1	28
	2	18		2	36
	3	24			

Таблица 5.4

ξ	Λ_3	x_3	x_4	ξ	Λ_3	x_3	x_4
0	32	1	1	3	14	3	1
1	22	1	1	4	21	3	1
2	18	1	1	5	28	3	1

<u>*Ш а г III*.</u> Вычисляем для всех возможных значений

$$\Lambda_2(\xi) = \min_{x_2}\{f_2(x_2-\xi) + g_2(x_2-m_2) + \Lambda_3(x_2)\} = \min_{x_2}\Omega_2(x_2,\xi).$$

Результаты заносим в табл. 5.5 и 5.6.

Таблица 5.5

ξ	x_2	Ω_2	ξ	x_2	Ω_2
0	0 1 2 3 4	87 76 71 66 72	3	1 2 3 4	80 58 36 42
1	2 3 4	61 56 62	4	2 3 4 5	65 43 32 38
2	2 3 4	51 46 52	5	4 5 6	39 28 46

Таблица 5.6

ξ	Λ_2	x_2	x_3	x_4
0	66	3	3	1
1	56	3	3	1
2	46	3	3	1
3	36	3	3	1
4	32	4	3	1
5	28	5	3	1

<u>*Ш а г IV.*</u> Используя начальное условие $\xi = x_0 = 2$ и подставляя его в со-отношение

$$\Lambda_1(\xi) = \min_{x_1}\{f_1(x_1-x_0) + g_1(x_1-m_1) + \Lambda_2(x_1)\},$$

находим $\Lambda_1(x_0) = 2$ и оптимальное значение переменной $x_1^* = x_1^*(x_0) = 21;$ данные вычислений приведены в табл. 5.7. Далее из табл. 5.6 по значению $\xi = x_1^* = 2$ находим оптимальное значение всех остальных переменных $x_2^* = 3, x_3^* = 3, x_4^* = 1.$ При этом решении минимальные суммарные затраты составляют $\Lambda_1 = 46.$

Таблица 5.7

$\xi = x_0$	x_1	Ω_1
2	1	74
	2	46
	3	54

Задачи и упражнения

Сформулируйте задачи 1−8 в виде многошаговых задач оптимизации вида (4.5)-(4.9) из главы 4.

1. Найти N неотрицательных чисел $u^{(k)}, k = 1,...,N,$ сумма которых равна S, а произведение максимально.

2. Сумма средств S распределяется между N предприятиями. Выделение *k*-му предприятию средств в размере u приносит доход $J_k(u), k = 1,2,...,N.$ Определить, какое количество средств необходимо выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход всех предприятий был максимальным.

3. Совхоз производит посевной материал. Ежегодно часть семян продаётся потребителям, а оставшаяся их часть используется для воспроизводства. Доход от продажи u_m семян составляет F(u) *руб*. Количество посевного материала, оставленное в совхозе, в следующем году увеличивается в A раз (A>1). В начале первого года имеется a_m семян. В конце *N*-го года их производство прекращается. Сколько семенного материала следует продавать каждый год, чтобы доход совхоза за *N* лет был максимальным?

4. Сумма средств S выделяется предприятию в течение N лет. Прибыль, получаемая предприятием в результате выделения ему средств u в течение k-го года составляет $J_k(u), k = 1,...,N.$ Распределить выделяемые средства по годам таким образом, чтобы суммарная прибыль предприятия за N лет была максимальной.

5. Рассмотрим задачу 3 в предположении, что в конце N-го года производство семян не прекращается и минимальное планируемое их количество к началу $(N+1)$-го года составляет b *т*.

6. Планируется производство на двух предприятиях в течении N лет. Начальные средства, предназначенные для выделения предприятиям, составляют S *руб*. Средства в размере u *руб*., вложенные в производство на i-м предприятии в начале каждого года, приносят к концу этого года доход $J_i(u)$ *руб*., а так же сумму $f_i(u)$, оставляемую для финансирования дальнейшего производства, $i = 1.2.$ По истечении каждого года все предназначенные для дальнейшего производства средства перераспределяются между предприятиями. Найти такой способ распределения средств предприятиям, при котором суммарный доход двух предприятий за N лет будет максимальным.

7. Оптовая база вмещает P *т* продукции. Запасы продукции могут пополняться и продаваться в начале каждого из N месяцев, причем пополнение предшествует продаже. Хранение 1 *т* продукции в течение k-го месяца обходится в α_k *руб.*, а продажа того же ее количества в начале k-го месяца приносит доход β_k *руб*. Начальное количество продукции на базе составляет a *т*. Определить количества продукции, которые в начале каждого месяца следует принимать на хранение и продавать, чтобы суммарная прибыль базы за N месяцев была максимальной.

8. Рассмотрим задачу 7 в предположении, что в начале каждого месяца продажа продукции предшествует ее пополнению.

Следующие задачи решить с помощью принципа оптимальности Беллмана.

9. Найдите решение задачи 1, если N=3, S=9.

10. Найти решение задачи 1 с произвольными исходными данными.

11. Найти решение задачи 2 об оптимальном распределении средств предприятиям со следующими исходными данными: S=5 *млн.руб.*, N=4. Средства предприятиям распределяются в количествах, кратных 1 *млн.руб*. Функции $J_k(u), k=1,...,4,$ заданы следующей таблицей:

u (*млн.руб.*)	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	1,5	2	3,5	5,5	9
$J_2(u)$	0	3	4,5	5,5	6,5	7,5
$J_3(u)$	0	4	5	5,5	6	9
$J_4(u)$	0	2	3	4	6,5	8

12. Найти решение задачи 2 об оптимальном распределении средств предприятиям со следующими исходными данными: S=100 *тыс.руб.*, N=4. Средства каждому предприятию выделяются в количествах, кратных 25 *тыс.руб.*, но не могут превосходить 50 *тыс.руб*. Функции $J_k(u), k=1,2,...,4,$ заданы следующей таблицей:

u (*тыс.руб.*)	0	25	50	75	100
$J_1(u)$	0	12	14	20	28
$J_2(u)$	0	12	18	24	30
$J_3(u)$	0	12	16	24	30
$J_4(u)$	0	8	12	16	24

13. Найти решение задачи 3, если $F(u) = cu, c > 0$.

14. Найти решение задачи 3 при следующих исходных данных: $F(u) = 0{,}1u^2$, $A = 5, a = 4, N = 3$.

15. Найти решение задачи 10, если $S = 5$ *млн.руб.*, $N = 5$. Средства распределяются в количествах, кратных 1 *млн.руб*. Функции $J_k(u)$, $k=\overline{1,4}$, заданы таблицей из условия задачи 11, а функция $J_5(u)$ — следующей таблицей:

u (*млн.руб.*)	0	1	2	3	4	5
$J_5(u)$	0	3	4,5	6	7,5	3,5

В условиях задачи 4 решить следующие задачи: об оптимальном выделении средств предприятию в течение лет со следующими исходными данными (задачи 16–22 включительно).

16. $S = 500$ *тыс.руб.*, $N = 4$. Средства, выделяемые в течение каждого года, кратны 100 *тыс.руб*. Функции $J_k(u)$ представлены в таблице:

u (*тыс.руб.*)	0	100	200	300	400	500
$J_1(u)$	0	40	70	104	120	136
$J_2(u)$	0	50	80	96	112	124
$J_3(u)$	0	34	76	100	110	120
$J_4(u)$	0	60	90	100	110	136

17. Найти решение задачи 16, если начальная сумма S уменьшена на 100 *тыс.руб.*

18. Найти решение задачи 16, если начальная сумма S увеличена на 100 *тыс.руб.* при следующих дополнительных данных о прибыли предприятия пи выделении ему в течение k-го года средств в размере 600 *тыс.руб.*:

k	1	2	3	4
$J_k(600)$	146	132	130	144

19. $S = 400$ *тыс.руб.*, $N = 4$. Выделяемые в течение k-го года средства кратны 20 *тыс.руб.* и не могут превосходить *200 тыс.руб*. Функции $J_k(u)$ заданы таблицей:

u (*тыс.руб.*)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$J_1(u)$	0	10	20	40	100	160	180	190	200	210	215
$J_2(u)$	0	20	40	60	80	95	101	102	103	104	105
$J_3(u)$	0	5	10	15	25	37	69	140	225	280	300
$J_4(u)$	0	30	68	95	140	160	170	175	176	177	178

20. $S = 300$ *тыс.руб.*, $N = 3$, функции $J_k(u), k = 1,2,3,$ определяются следующим образом: $J_1(u) = J_2(u) = J_3(u) = 10 - 10^{-3} \cdot (u - 100)^2$.

21. $S = 300$ *тыс.руб.*, $N = 3$, функции $J_k(u), k = 1,2,3$, определяются следующим образом: $J_1(u) = J_2(u) = 24 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot (u - 200)^2$, $J_3(u) = 16 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot (u - 200)^2$.

22. $S = 150$ *тыс.руб.*, $N = 3$, $J_1(u) = 0б124$, $J_2(u) = 0{,}0012 \cdot u^2$, $J_3(u) = 0{,}36 \cdot u - 0.0024 \cdot u^2$.

23. Найти решение задачи 5, если $F(u) = c \cdot u, c > 0, A^3 \cdot a > b$.

24. Найти решение задачи 5, при следующих исходных данных: $F(u) = 0{,}1 \cdot u^2, A = 5, a = 4, b = 5, N = 3$.

25. Имеется 9 однотипных станков, каждый из которых можно наладить на производство изделий одного из трех видов. Зависимость количества изделий каждого вида, изготовленных за смену, от количества станков, занятых для их производства, приведена в таблице:

Вид изделия	Число станков								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	14	18	22	26	32	38	42	48	50
II	10	18	24	28	30	36	40	44	54
III	12	20	26	30	32	36	42	44	50

Найти количество станков, которое необходимо использовать для изготовления изделий каждого вида, чтобы общее число производственных изделий было максимальным.

26. Составить оптимальный план капиталовложений между четырьмя предприятиями в условиях задачи 3 (п.4.4) при исходных данных относительно X_i и $f_i(X_i)$, приведенных в таблице, а также с учетом того, что $S = 100$ *тыс.руб.*

Объем капиталовложений (*тыс.руб.*)	Прирост выпуска продукции $f_i(X_i)$, в зависимости от объема капиталовложений (*тыс.руб.*)			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

27. В склад емкостью $W = 90 \ м^3$ требуется поместить n различных типов оборудования. Объем одной единицы i-го типа оборудования $(i = \overline{1,n})$ равен $V_i м^3$, а стоимость единицы данного типа оборудования равна C_i *руб*. Найти оптимальный план загрузки склада, если $V_1 = 24 м^3$, $V_2 = 19 м^3$, $V_3 = 16 м^3$, $C_1 = 960$ *руб*., $C_2 = 500$ *руб*., $C_3 = 250$ *руб*. Определить, какое количество оборудования каждого типа следует поместить в склад, так чтобы общая стоимость складированного оборудования была максимальной.

28. В подшефный совхоз из городского предприятия была направлена группа работников из 10 человек для уборки помидоров на одном из трех полей. По оценке директора совхоза, выделив y_j человек, на поле можно собрать $R(y_j)$ *кг* помидоров, где $R_1(1) = 50$, $R_1(2) = 100$, $R_1(3) = 150$, $R_1(4) = 250$, $R_1(5) = 350$, $R_1(6) = 500$; $R_2(1) = 50$, $R_2(2) = 60$, $R_2(3) = 120$, $R_2(4) = 180$, $R_2(5) = 300$, $R_2(6) = 550$; $R_3(1) = 200$, $R_3(2) = 350$, $R_3(3) = 450$, $R_3(4) = 550$, $R_3(5) = 600$, $R_3(6) = 650$. Никаких дополнительных сборов не удается получить, если направить на каждое из полей более 6 человек. Сколько работников следует направить на каждое из полей, чтобы собрать наибольший урожай? Найдите оптимальное решение.

29. Рассмотрите задачу 28. Предположим, что у директора совхоза не хватает людей и он формирует задачу следующим образом: минимизировать число городских работников, направляемых на уборку овощей, при условии, что с трех полей нужно собрать не менее R *кг* помидоров. Найдите оптимальное решение при условии, что $R_1 = 800$ *кг*.

30. Рассмотрите задачу 28. Предположим, что у директора совхоза не хватает людей и он формирует задачу следующим образом: минимизировать число городских работников, направляемых на уборку овощей, при условии, что с трех полей нужно собрать не менее R *кг* помидоров. Найдите оптимальное решение при условии, что $R_2 = 1000$ *кг*.