Значит, мы получили новый опорный план $\tilde{x}$ с базисом $a^1,\dots,\ a^{i_0-1}$, $a^{i_0+1},\dots,\ a^m,\ a^{k_0}$, который доставляет большее значение целевой функции, чем исходный опорный план ($\delta > 0$), т.е. достигли поставленной цели.

II. Существует номер k_o $(m+1 \le k_o \le n)$, для которого $c_{k_0} - z_{k_0} > 0$ и $x_{ik_0} \le 0,\ i = \overline{1,m}.$ В этом случае $\tilde{x} \in X$ при $k = k_o$ и любом $\lambda \ge 0$ и в то же время $\delta \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Значит, целевая функция неограничена на X, т.е. задача не имеет решения.

III. Для всех k $(m + 1 \le k \le n)$ выполнено $c_k - z_k \le 0$. Покажем, что в этом случае исходный план x является оптимальным.

Действительно, возьмем любой другой план $x' \in X$. Он удовлетворяет системе m ограничений типа равенств, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k a^k = b. \tag{2.41}$$

Подставив в (2.41) представление всех векторов a^k через базис $a^1,\dots,a^m$ (см.(2.37)), получаем

$$b = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{i=1}^{m} x_{ik} a^i = \sum_{i=1}^{m} a^i \sum_{k=1}^{n} x'_k x_{ik}.$$

С другой стороны, справедливо представление вектора $в$ в виде (2.36), а так как вектора $a^1,\dots,\ a^m$ независимы, то эти представления должны совпадать, т.е.

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x'_k x_{ik},\ \ i = \overline{1,m}.$$

Сравним теперь значения целевых функций. Так как коэффициент разложения векторов базиса по базису есть

$$x_{ik} = \begin{cases} 1,\ i = k, \\ 0,\ i \ne k \quad (i, k = \overline{1,m}) \end{cases}$$

(каждый вектор базиса равен самому себе), для $k = \overline{1,m}$ величины z_k совпадают с c_k, поэтому в данном случае справедливо $c_k - z_k \le 0,\ \ k = \overline{1,n}$. Далее, выполняются соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k c_k \le \sum_{k=1}^{n} x'_k z_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{i=1}^{m} x_{ik} c_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{k=1}^{n} x'_k x_{ik} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i,$$

т.е.

$$< c, x' > \le < c, x >.$$

Но x' — произвольный допустимый план, следовательно, x — оптимальный план, что и требовалось доказать.

Таким образом, на каждом шаге мы либо переходим к лучшему опорному плану, либо выясняем, что задача не имеет решения, либо убеждаемся, что имеющийся опорный план является оптимальным. Для формализации алгоритма описанного итеративного процесса удобно использовать следующую таблицу, называемую симплексной.

—	a^1	a^2	…	a^n	b	c
a^{i_1}	$x_{i_1 1}$	$x_{i_1 2}$	…	$x_{i_1 n}$	$x_{i_1 0}$	c_{i_1}
a^{i_2}	$x_{i_2 1}$	$x_{i_2 2}$	…	$x_{i_2 n}$	$x_{i_2 0}$	c_{i_2}
…	…	…	…	…	…	…
a^{i_m}	$x_{i_m 1}$	$x_{i_m 2}$	…	$x_{i_m n}$	$x_{i_m 0}$	c_{i_m}
z	z_1	z_2	…	z_n	z_0	—
c-z	c_1-z_1	c_2-z_2	…	c_n-z_n	—	—

Эта таблица на каждом шаге соответствует текущему базису опорного плана. В общем случае базис состоит из m вектор-столбцов матрицы коэффициентов A с произвольными номерами $i_1,\ldots, i_m$ из номеров $1, \ldots,n$. Элементами таблицы являются коэффициенты разложения вектор-столбцов матрицы A по базису (обозначаемые $x_{i_k j}$), коэффициенты разложения вектора ограничений b по базису, являющиеся компонентами опорного плана, соответствующего данному базису (обозначаемые для единообразия $x_{i_k 0}$), компоненты вектора коэффициентов линейной формы c с номерами $i_1,\ldots, i_m$, величины z_j, $j = \overline{0,n}$, определяемые по формулам

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{i_k j}\, c_{i_k} \tag{2.42}$$

(z_o — значение целевой функции для данного опорного плана), разности $c_j - z_j$, $j = \overline{1,n}$. Переход от одной симплексной таблицы к другой таблице последующего шага алгоритма происходит следующим образом.

Рассматривается последняя строка таблицы. Если $c_j - z_j \le 0$ для всех $j = \overline{1,n}$, то вектор x^o с компонентами $x_{i_1 0}, \ , x_{i_m 0}$ на местах $i_1,\ldots, i_m$ и с нулями на остальных местах является оптимальным планом, т.е. решение задачи найдено.

Если для некоторого j_o выполняется неравенство $c_{j_0} - z_{j_0} > 0$ и для j_o столбца таблицы справедливо $x_{i_k j_0} \le 0$, $k = \overline{1,m}$, то целевая функция неограничена, т.е. задача не имеет решения.

Наконец, если для некоторого j_o выполняется $c_{j_0} - z_{j_0} > 0$ и в столбце с номером j_o существует хотя бы один положительный элемент $x_{i_k j_0} > 0$ ($1 \le k \le m$), то можно получить лучший опорный план. Для этого выбираем j_o так, что

$$c_{j_0} - z_{j_0} = \max_{1 \le j \le n} (c_j - z_j)$$

(это позволяет добиваться на каждом шаге наибольшего возможного роста целевой функции и тем самым уменьшить число итераций), а λ_o и i_o выбираем из условия

$$\lambda_o = \frac{x_{i_o 0}}{x_{i_o j_0}} = \min_{\substack{1\le k\le m \\ k:\, x_{i_k j_0}>0}} \frac{x_{i_k 0}}{x_{i_k j_0}} > 0.$$

Базис на следующем шаге получается путем замены в базисе данного шага вектор-столбца матрицы A с номером i_o на вектор-столбец с номером j_o. Получим формулы пересчета элементов симплексной таблицы для следующего шага. Имеем

$$a^j = \sum_{k=1}^{m} x_{i_k j} a^{i_k} = \sum_{\substack{k=1 \\ i_k \neq i_0}}^{m} x_{i_k j} a^{i_k} + x_{i_0 j}\left(\frac{1}{x_{i_0 j_0}} a^{j_0} - \sum_{\substack{k=1 \\ i_k \neq i_0}}^{m} \frac{x_{i_k j_0}}{x_{i_0 j_0}} a^{i_k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ i_k \neq i_0}}^{m}\left(x_{i_k j} - \frac{x_{i_k j_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{i_0 j}\right) a^{i_k} + \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}} a^{j_0},$$

т.е.

$$x'_{i_k j} = \begin{cases} x_{i_k j} - x_{i_0 j}\dfrac{x_{i_k j_0}}{x_{i_0 j_0}}, & i_k \neq i_0, \\ \dfrac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, & i_k = i_0. \end{cases} \qquad (2.43)$$

По формулам (2.43) вычисляются коэффициенты первых m строк новой таблицы (для всех j от 0 до n и всех k от 1 до m). Далее по формулам (2.42) рассчитывается $(m+1)$-я строка новой таблицы, определяются разности $c - z$, т.е. $(m+2)$–я строка, и процесс повторяется снова.

Мы рассмотрели формализацию произвольного шага алгоритма симплекс-метода. Для того чтобы завершить изложение этого алгоритма, необходимо описать способ нахождения исходного опорного плана. Наиболее распространенный способ введения искусственного базиса сводит эту проблему к решению вспомогательной задачи линейного программирования. Изложим суть этого способа.

Без потери общности можно считать, что вектор ограничений *в* для задачи линейного программирования в канонической форме неотрицателен (иначе соответствующие ограничения типа равенств достаточно умножить на -1). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$min \sum_{i=1}^{m} u_i \qquad (2.44)$$

при ограничениях

$$Ax + u = b, \ x \geq 0, \ u \geq 0. \qquad (2.45)$$

Планом этой задачи является $(n+m)$-мерный вектор

$$\upsilon = (x, u) = (x_1, \ldots, x_n, \ u_1, \ldots, u_m).$$

Матрица коэффициентов этой задачи есть

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $b \geq 0$, план $\bar{\upsilon} = (0, b)$ является допустимым ($x = 0, u = b$). Этому плану соответствует базис из m последних вектор-столбцов матрицы A' (искусственный базис), образующих единичную подматрицу. Значит, $\bar{\upsilon}$ является опорным планом, т.е. исходный опорный план для вспомогательной задачи (2.44), (2.45) строится легко и можно сразу применять для ее решения описанный выше итеративный процесс симплекс-метода. Пусть получено это решение

$$\upsilon^* = (x^*, u^*).$$

Покажем, что если $u^* = 0$, то x^* — опорный план исходной задачи линейного программирования в канонической форме, а если $u^* > 0$, то исходная задача не имеет решения (вспомогательная задача всегда имеет решение, так как множество допустимых планов у нее непусто — по крайней мере содержит $\bar{\upsilon}$, а целевая функция (2.44) ограничена снизу нулем). Действительно, если $u^*=0$, то x^* — допустимый план исходной задачи, так как $Ax^* = b$, а поскольку симплекс-метод состоит в переборе угловых точек множества допустимых планов, т.е. υ^* — угловая точка множества

$$X' = \{ \upsilon = (x, u) \mid Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\},$$

то, очевидно, x^* — угловая точка множества $X = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, и мы получили опорный план исходной задачи x^*. Если $u^* > 0$, то значение вспомогательной задачи больше нуля (как $\sum_{i=1}^{m} u^*_i$), а для любого допустимого исходного плана исходной задачи $x \in X$ можно построить допустимый план вспомогательной задачи $\upsilon = (x, 0)$, на котором целевая функция вспомогательной задачи принимает нулевое значение, значит в этом случае множество допустимых планов исходной задачи пусто, и она не имеет решения.

Замечание. Для современных ЭВМ программа решения задачи линейного программирования симплекс-методом, включая процедуру построения исходного опорного плана с помощью искусственного базиса, входит в стандартное математическое обеспечение.

Рассмотрим для иллюстрации следующий **пример**:

$$\max (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

при ограничениях
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_3 = 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов данной задачи имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исходный опорный план можно найти из решения следующей вспомогательной задачи:

$$\min (u_1 + u_2)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + u_1 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + u_2 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ее матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а исходный опорный план — $(0, 0, 0, 4, 6)$.

Впрочем в данном случае опорный план нетрудно найти для исходной задачи непосредственно. Для этого возьмем, например, в качестве базиса два первых вектор-столбца матрицы A, т.е. положим $x_3 = 0$ и получим опорный план

$$\left(3, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Обозначим вектор-столбцы матрицы A по порядку a^1, a^2, a^3. Текущий базис состоит из векторов a^1 и a^2, а вектор a^3, как нетрудно заметить, представляется в виде

$$a^3 = \frac{1}{2}a^1 - \frac{1}{6}a^2.$$

Симплексная таблица на первом шаге имеет вид

—	a^1	a^2	a^3	b	c
a^1	1	0	$\frac{1}{2}$	3	1
a^2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	2
z	1	2	$\frac{1}{6}$	$3\frac{2}{3}$	–
c-z	0	0	$2\frac{5}{6}$	—	—

Мы видим, что разность $c - z$ положительна для третьего столбца, значит, полученный план не является оптимальным, а так как в третьем столбце имеется положительный элемент $\frac{1}{2}$, можно улучшить значение целевой функции. Положительный элемент единственен и стоит в первой строке, значит из базиса надо вывести вектор a^1 и ввести вектор a^3 (на роль вводимого вектора мог претендовать только a^3, но какой из векторов a^1 или a^2 следует выводить, заранее не очевидно).

Произведем пересчет по формулам (2.43), (2.42), вычислим $c - z$ и получим новую симплексную таблицу

—	a^1	a^2	a^3	b	c
a^3	2	0	1	6	3
a^2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	2
z	$6\frac{2}{3}$	2	3	$20\frac{2}{3}$	–
c-z	$-5\frac{2}{3}$	0	0	—	—

В этой таблице все разности $c - z$ неположительны, следовательно, найден оптимальный план $x^o = \left(0, \frac{4}{3}, 6\right)$ и максимум целевой функции $z_o = 20\frac{2}{3}$.

2.3. Двойственность в линейном программировании

В предыдущем параграфе мы научились решать задачу линейного программирования, что, конечно, является главным моментом при изучении линейного программирования. Однако имеется еще ряд вопросов, на которые хотелось бы иметь ответы. Например, как проверить факт существования решения задачи линейного программирования? С помощью симплекс-метода можно определить, имеет ли решение данная задача, но эта проверка сводится фактически к процессу решения задачи, т.е. мы можем долго решать задачу симплекс-методом и в конце концов убедиться в отсутствии решения. Другой вопрос — получение условий оптимальности, с помощью которых можно было бы определить, является ли данный план оптимальным или нет, не прибегая к процедуре симплекс-метода. Для ответов на поставленные вопросы полезной оказалась теория двойственности. Вообще говоря, теория двойственности охватывает значительно более широкий спектр задач, нежели линейные (мы далее рассмотрим некоторые более общие ее аспекты) и результаты, связанные с двойственностью в линейном программировании, могут быть получены как частные случаи более общих результатов, но для простоты и конкретности мы дадим здесь их самостоятельное изложение.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме (2.17) - (2.19).

Двойственной к ней называется задача

$$\min < b, y > \tag{2.46}$$

при ограничениях

$$A^{\text{т}}y \geq c, \tag{2.47}$$

$$y \geq 0. \tag{2.48}$$

Здесь $A^{\text{т}}$ — матрица, получающаяся транспонированием матрицы A, если матрица A имеет размер m x n , то x — n-мерный вектор, а y — m-мерный вектор.

Задача (2.46) - (2.48) получена из задачи (2.17) - (2.19) путем замены операции максимизации на минимизацию, вектора коэффициентов линейной формы на вектор ограничений, и наоборот, вектора ограничений на вектор коэффициентов линейной формы, транспонированием матрицы коэффициентов и заменой неравенства типа меньше или равно на неравенство типа больше или равно. Зафиксируем пока такое правило построения двойственной задачи.

Если задачу (2.46) - (2.48) преобразовать к стандартной форме и применить к ней правило построения двойственной задачи, то нетрудно убедиться, что после соответствующих преобразований получится задача (2.17) - (2.19).

Таким образом, можно сказать, что задачи (2.17) - (2.19) и (2.46) - (2.48) взаимодвойственные или просто двойственные задачи линейного программирования, но иногда, чтобы их различать, задачу (2.17) - (2.19) называют прямой, а (2.46) - (2.48) — двойственной.

Двойственную задачу можно построить к задаче линейного программирования в любой форме. Для этого ее следует привести к стандартной форме и использовать изложенное выше правило построения двойственной задачи. Нетрудно проверить, что при этом получаются следующие дополнительные правила, вытекающие из основного. Если прямая задача на максимум, то двойственная на минимум, и наоборот. Если прямая задача имеет ограничения типа равенств, то в двойственной задаче отсутствует условие неотрицательности вектора. Если в прямой задаче нет условия неотрицательности, то в двойственной задаче — ограничения типа равенств. Можно сформулировать и другие правила, но запомнить их все трудно, поэтому достаточно уметь приводить задачу к стандартной форме и помнить основное правило (в следующем главе мы рассмотрим общий принцип построения двойственных задач, из которого будут получаться все конкретные правила).

Рассмотрим в качестве примера построение двойственной задачи к задаче в канонической форме (2.17), (2.21), (2.19).

Приведем ее к стандартной форме:

$$max < c, x >$$

при ограничениях

$$Ax \le b,\ - Ax \le - b,\ x \ge 0.$$

Матрица коэффициентов и вектор ограничений этой задачи есть

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix},\ \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

По основному правилу двойственная задача такова:

$$min < \tilde{b}, u >$$

при ограничениях

$$\tilde{A}^{т}u \ge c,\ u \ge 0.$$

Представим $2m$-мерный вектор u в виде двух m-мерных векторов $u = (y^1, y^2)$, тогда имеем

$$min < b, y^1 - y^2 >$$

при ограничениях

$$A^{т}(y^1 - y^2) \ge c,\ y^1 \ge 0,\ y^2 \ge 0.$$

Введем вектор $y = y^1 - y^2$, тогда имеем окончательно двойственную задачу

$$min < b, y >$$

при ограничениях

$$A^{т}y \ge c.$$

В этой задаче нет условия неотрицательности вектора y, так как разность двух неотрицательных векторов есть вектор с произвольными компонентами.

Вернемся к двойственным задачам (2.17) - (2.19) и (2.46) - (2.48). Для них справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любых допустимых планов x и y двойственных задач* (2.17) - (2.19) *и* (2.46) - (2.48) *выполняется неравенство*

$$< c, x > \le < b, y >. \tag{2.49}$$

Если для некоторых допустимых планов x^o *и* y^o *этих задач выполняется равенство*

$$< c, x^o > = < b, y^o >, \qquad (2.50)$$

то x^o *— решение задачи* (2.17) - (2.19), y^o *— решение задачи* (2.46) - (2.48).

Доказательство. Пусть x и y — произвольные допустимые планы двойственных задач, т.е. $Ax \le b, x \ge 0, A^{т}y \ge c, \; y \ge 0.$
Тогда

$$< c, x > \; \le \; < A^{т}y, x > = < y, Ax > \le < y, b >,$$

т.е. справедливо неравенство (2.49).

Пусть теперь x^o и y^o таковы, что выполняется (2.50). Возьмем произвольные допустимые планы x и y двойственных задач. В силу доказанного первого утверждения теоремы

$$< c, x > \le < b, y^o >= < c, x^o >,$$
$$< b, y > \ge < c, x^o > = < b, y^o >,$$

следовательно, x^o и y^o — оптимальные планы двойственных задач. Теорема доказана полностью.

Неравенство (2.49) дает возможность оценивать сверху с помощью допустимого плана двойственной задачи значение прямой задачи (и наоборот). Равенство (2.50) представляет собой условие экстремума для прямой и двойственной задач. В следующем утверждении сформулированы условия существования решений двойственных задач.

Теорема существования. *Если задачи* (2.17) - (2.19) *и* (2.46) - (2.48) *имеют хотя бы по одному допустимому плану, то они обе имеют решения.*

Доказательство. В силу условий теоремы множества допустимых планов задач непусты и по доказанному неравенству (2.49) целевые функции на них ограничены (прямой задачи сверху, а двойственной снизу), значит с учетом замкнутости множеств допустимых планов обе задачи имеют решения, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего исследования двойственных задач нам понадобится еще один вспомогательный факт из теории выпуклых множеств.

Теорема (о разделяющей гиперплоскости). *Если X и Y — выпуклые, замкнутые множества, не имеющие общих внутренних точек, то существует разделяющая их гиперплоскость, т.е. существуют такие ненулевой вектор a и скаляр d, что*

$$< a, x > \ge d \;\; \forall x \in X, \;\; < a, y > \le d \;\; \forall y \in Y.$$

Доказательство. Рассмотрим множество, представляющее собой разность множеств X и Y, т.е.

$$Z = X - Y = \{ x - y \mid \; x \in X, \; y \in Y \}.$$

Множество Z является, очевидно, выпуклым и замкнутым, а точка 0 не является его внутренней точкой, т.е. либо вообще не принадлежит Z, либо является его граничной точкой. Применяя теорему отделимости (в первом случае) или теорему об опорной гиперплоскости (во втором случае), имеем, что существует такой вектор $a \ne 0$, для которого

$$< a, x - y > \; \ge \; < a, 0 > = 0 \;\; \forall x \in X, \; y \in Y.$$

Отсюда $< a, x > \geq \; < a, \; y > \; \forall x, y$ и можно, очевидно, подобрать такое число d, что выполняется утверждение теоремы.

Теперь можно доказать основное утверждение теории двойственности в линейном программировании — первую теорему двойственности.

Теорема двойственности 1. *Двойственные задачи линейного программирования* (2.17) - (2.19) *и* (2.46) - (2.48) *либо обе имеют решения* x^o *и* y^o, *причем обязательно*

$$<c, x^o> = <b, y^o>,$$

либо обе не имеют решения.

Доказательство. Пусть сначала существует решение x^o прямой задачи (2.17) - (2.19). Покажем, что существует решение двойственной задачи y^o. Рассмотрим множество ($m+1$)-мерных векторов вида

$$\mathrm{P} = \left\{ p = \begin{pmatrix} b - Ax \\ < c, \, x - x^o \; > \end{pmatrix} \mid x \geq 0 \right\}.$$

Множество это представляет собой область значений векторов $\begin{pmatrix} b - Ax \\ < c, \, x - x^o \; > \end{pmatrix}$ в ($m+1$)-мерном пространстве для всех x из неотрицательного ортанта n-мерного пространства.

Так как x^o — решение задачи (2.17) - (2.19), то не могут одновременно выполняться неравенства $b - Ax > 0$ и $< c \, , x - x^o > \; > 0$, значит, множество P не имеет общих внутренних точек с неотрицательным ортантом ($m+1$)-мерного пространства, который обозначим R_+^{m+1}. Кроме того, очевидно, P выпукло и замкнуто, поэтому к множествам P и R_+^{m+1} можно применить доказанную выше теорему отделимости. Значит существует такой вектор $a \neq 0$ и скаляр d, что

$$<a, p> \; \leq d \;\; \forall \; p \in P, \;\; <a, q> \; \geq d \;\; \forall \; q \in R_+^{m+1}.$$

Относительно a и d можно утверждать, что $a \geq 0$ и $d = 0$. Действительно, если хотя бы одна компонента a отрицательна, то, выбирая последовательность векторов q_k из неотрицательного ортанта с неограниченно возрастающей данной компонентой и равными нулю всеми остальными компонентами, получим $<a, q_k> \; \to -\infty$, что противоречит $<a, q> \; \geq d \;\; \forall \; q$. Далее, $0 \in R_+^{m+1}$, поэтому $d \leq 0$; с другой стороны, вектор $p' = (b - Ax^o) \geq 0$, а значит, $< a, \, p' > \; \geq 0$, т.е. $d \geq 0$, следовательно, $d = 0$, т.е. разделяющая гиперплоскость проходит через начало координат.

Таким образом, $< a, p > \; \leq 0 \;\; \forall \; p \in P, \;\; < a \, , q > \; \geq 0 \; \forall \; q \in R_+^{m+1}$. Более того, можно утверждать, что вектор a может быть выбран так, что $a_{m+1} > 0$. Это следует из того, что P есть многогранник и с гранью ортанта