§ 2.3. Антагонистические игры. Седловые точки

Антагонистическая игра. Она представляет собой частный случай игры в нормальной форме Г, когда имеется два игрока (n = 2) и сумма функций выигрыша этих игроков тождественно равна нулю. Так как в этом случае в любом исходе по выигрышу одного игрока можно однозначно определить выигрыш другого, то достаточно задать функцию выигрыша одного игрока.

Таким образом, антагонистическая игра (или игра двух лиц с нулевой суммой) в нормальной форме - это тройка

$$\Gamma_a = \langle U_1, U_2, g(u_1,u_2) \rangle, \qquad (2.6)$$

где U_1 - множество стратегий игрока 1; U_2 - множество стратегий игрока 2;

$g(u_1,u_2)$ - вещественная функция, определенная на $U_1 \times U_2$ и представляющая собой выигрыш игрока 1 в ситуации (u_1,u_2), когда он выбирает стратегию u_1, а игрок 2 - стратегию u_2; при этом выигрыш игрока 2 равен $g(u_1,u_2)$.

Так как точки максимума функции совпадают с точками минимума этой функции, взятой со знаком минус, то в антагонистической игре игрок 1 стремится по возможности максимизировать функцию $g(u_1,u_2)$, а игрок 2 - минимизировать.

В антагонистической игре поведение на основе принципа гарантированного результата становится особенно уместным. Его применение с учетом того, что

$\sup\limits_{u_1 \in U_1} \inf\limits_{u_2 \in U_2} (-g(u_1,u_2)) = -\inf\limits_{u_2 \in U_2} \sup\limits_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2)$, приводит к следующим понятиям.

Нижней ценой игры (2.6) называется величина

$$\underline{v} = \sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2), \qquad (2.7)$$

Верхней ценой игры (2.6) - величина

$$\bar{v} = \inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2). \qquad (2.8)$$

Смысл величин $\underline{v}$ и $\bar{v}$ заключается в следующем: игрок 1 может гарантировать себе выигрыш не меньше $\underline{v} - \varepsilon$, независимо от действий игрока 2; а игрок 2 - выигрыш не больше $\bar{v} + \varepsilon$, независимо от действий игрока 1 (ε - сколь угодно малое положительное число, если наружные грани в (2.7), (2.8) не достигаются; ε=0, если они достигаются).

Таким образом, если оба игрока разумны, то выигрыш игрока 1 должен лежать на отрезке $[\underline{v}, \bar{v}]$ (возможно с точностью до ε).

Величины $\underline{v}$ и $\bar{v}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому в слово "выигрыш" здесь не вкладывается смысл успешного исхода. Так как выигрыш может быть и положительным и отрицательным, то фактически он может выступать как в виде дохода, так и в виде расхода.

Лемма 2.5. *Величины* $\underline{v}$ *и* $\bar{v}$ *, определенные выражениями (2.7), (2.8), всегда связаны соотношением* $\underline{v} \leq \bar{v}$*, т. е. имеет место неравенство*

$$\sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2) \leq \inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2) \qquad (2.9)$$

Доказательство. Из определений верхней и нижней граней следуют неравенства

$$\inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2) \leq g(u_1, z) \quad \forall z \in U_2 ;$$

$$\underline{v} = \sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2) \leq \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1, z) \quad \forall z \in U_2 ,$$

откуда $\underline{v} \leq \inf\limits_{u_2 \in U_2} \sup\limits_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2) = \bar{v}$, что и требовалось доказать.

В (2.9) может иметь место как равенство, так и строгое неравенство.

Пример 2.4. Пусть $g(u_1,u_2)=(u_1-u_2)^2$, $0 \leq u_i \leq 1$, i=1,2. Тогда

$$\underline{v} = \max_{0 \leq u_1 \leq 1} \min_{0 \leq u_2 \leq 1} (u_1 - u_2)^2 = 0 ;$$

$$\bar{v} = \min_{0 \leq u_2 \leq 1} \max_{0 \leq u_1 \leq 1} (u_1 - u_2)^2 = \min\{\min_{0 \leq u_2 \leq 1} (1 - u_2)^2 , \min_{0 \leq u_2 \leq 1} (u_2)^2\} = \frac{1}{4} ,$$

т.е. имеет место неравенство $\underline{v} < \bar{v}$.

Пример 2.5. Пусть $g(u_1,u_2)=u_1-u_2$, $0 \leq u_i \leq 1$, i = 1,2. Тогда

$$\bar{v} = \min_{0 \leq u_2 \leq 1} \max_{0 \leq u_1 \leq 1} (u_1 - u_2) = \min_{0 \leq u_2 \leq 1} (1 - u_2) = 0 ;$$

$$\underline{v} = \max_{0 \leq u_1 \leq 1} \min_{0 \leq u_2 \leq 1} (u_1 - u_2) = \max_{0 \leq u_1 \leq 1} (u_1 - 1) = 0,$$

т. е. имеет место равенство $\underline{v} = \bar{v}$**.**

Если $\underline{v} = \bar{v}$., то их общее значение называют *ценой игры* Γ_a; если $\underline{v} < \bar{v}$, то говорят, что игра не имеет цены.

Далее нам понадобится понятие - седловая точка, которая определяется следующим образом.

Определение 2.14. *Пара* (u_1^0, u_2^0) *называется седловой точкой функции* $g(u_1,u_2)$*, на прямом произведении множеств* $U_1 \times U_2$ *, если*

$$g(u_1, u_2^0) \le g(u_1^0, u_2^0) \le g(u_1^0, u_2) \quad \forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$$

или эквивалентно

$$\max_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2^0) = g(u_1^0, u_2^0) = \min_{u_2 \in U_2} g(u_1^0, u_2). \qquad (2.10)$$

Основными свойствами седловых точек являются взаимозаменяемость и эквивалентность. Если (u_1^*, u_2^*) и (u_1^{**}, u_2^{**})-седловые точки, то (u_1^*, u_2^{**}) и (u_1^{**}, u_2^*)-также седловые точки (свойство взаимозаменяемости), при этом

$$g(u_1^*, u_2^*) = g(u_1^*, u_2^{**}) = g(u_1^{**}, u_2^*) = g(u_1^{**}, u_2^{**})$$

(свойство эквивалентности). Доказательство этих свойств непосредственно вытекает из определения, и мы его оставляем в качестве упражнения.

Аргументы u_1 и u_2 функции $g(u_1,u_2)$ будем считать векторами соответственно n -мерного и m -мерного евклидовых пространств. Таким образом, из определения седловой точки следует, что в ней по одной группе переменных функция достигает максимума, а по другой группе - минимума.

Существование седловых точек связано с достижимостью наружных граней в (2.7) и (2.8), т.е. существованием решений u_1^0 и u_2^0 максиминной и минимаксной задач, и выполнением равенства $\underline{v} = \bar{v}$. Если выполняется и то, и другое, то пара $(u_1^0; u_2^0)$ образует седловую точку и любая седловая точка состоит из решений задач (2.7) и (2.8); естественно, их может быть несколько. Если хотя бы один из указанных моментов отсутствует, то у функции $g(u_1,u_2)$ седловых точек нет.

Теорема 2.1 (необходимые и достаточные условия существования седловой точки). *Для того чтобы функция* $g(u_1,u_2)$ *имела седловую точку на* $U_1 \times U_2$*, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\max_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2) = \min_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2). \qquad (2.11)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует точка, удовлетворяющая (2.10), тогда $\sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2) \le \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0) = g(u_1^0,u_2^0) = \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2)$, откуда

$$\sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2) = \max_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2) = \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2) = g(u_1^0,u_2^0).$$

Аналогично $\inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2) \ge \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2) = g(u_1^0,u_2^0) = \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0)$, откуда

$$\inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2) = \min_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2) = \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0) = g(u_1^0,u_2^0).$$

Таким образом, доказано равенство (2.11), причем u_1^0 и u_2^0 - решения задач (2.7), (2.8).

Достаточность. Так как равенство (2.11) подразумевает достижимость наружных верхней и нижней граней, то существуют u_1^0 и u_2^0 такие, что

$$\inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2) = \max_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1,u_2),$$

$$\sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0) = \min_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2),$$

причем $\inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2) = \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0)$.

По определению верхней и нижней граней

$$\inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2) \le g(u_1^0,u_2^0) \le \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1,u_2^0) = \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1^0,u_2),$$

справедливо равенство (2.10) и $(u_1^0; u_2^0)$ - седловая точка.

Приведенные выше примеры показывают, что седловая точка может существовать и не существовать. В примере 2.5 существует седловая точка, в примере 2.4 - отсутствует.

Следствие 2.1. *Если в игре* Γ_a *функция* $g(u_1,u_2)$ *имеет на* $U_1 \times U_2$ *седловую точку* $(u_1^0; u_2^0)$, *то игра* Γ_a *имеет цену и является несущественной,* u_1^0 *и* u_2^0 *являются оптимальными гарантирующими стратегиями соответственно игроков 1 и 2,* а *исход* $(u_1^0; u_2^0)$ *оптимален по Парето и дает игроку 1 выигрыш, равный цене игры.*

Следствие 2.2. *Если игра* Γ_a *имеет цену, то она несущественна. Если существуют оптимальные гарантирующие стратегии игроков и игра несущественна, то она имеет цену.*

Эти следствия легко вытекают из проведенных определений и теоремы 2.1. Они показывают, что существование цены игры является важнейшим свойством, при наличии которого принцип гарантированного результата является по существу единственно возможным принципом оптимального поведения. Если цена игры не существует, то существенным становится вопрос об информированности игроков о выборе противника и , вообще говоря, выигрыш игрока 1 может быть любым из диапазона $[\underline{v}, \bar{v}]$. Поэтому интересным является вопрос об условиях существования цены игры. Введем некоторые подклассы антагонистических игр.

Определение 2.15. *Антагонистическая игра* Γ_a *называется непрерывной, если* U_1 *и* U_2 *являются компактами, а* $g(u_1,u_2)$ - *непрерывная функция на* $U_1 \times U_2$.

В непрерывной игре оптимальные гарантирующие стратегии обязательно существуют (все грани в (2.7) и (2.8) достигаются), но, как показывает пример (2.4), цена может не существовать. Для существования цены на U_1 ,U_2, $g(u_1,u_2)$ необходимо наложить некоторые условия выпуклости.

Определение 2.16. *Непрерывная антагонистическая игра* Γ_a *называется вогнуто-выпуклой, если множества* U_1 *и* U_2 *являются выпуклыми, функция* $g(u_1,u_2)$ *вогнута по* u_1 *на* U_1 *при любом фиксированном* u_2 *и выпукла по* u_2 *на* U_2 *при любом фиксированном* u_1.

Теорема 2.2. *Вогнуто-выпуклая антагонистическая игра* Γ_a *имеет цену, т.е. вогнуто-выпуклая непрерывная функция* $g(u_1,u_2)$ *имеет седловую точку на произведении выпуклых компактов* $U_1 \times U_2$.

Доказательство см. в [4].

Условия теоремы 2.2 можно ослабить, однако какие-то аналоги выпуклости нужны.

В общем случае наличие седловой точки у функции является не очень распространенным свойством. Таким образом, многие антагонистические игры не имеют цены на исходных множествах стратегий. Специальное расширение множеств стратегий позволит сделать разрешимыми (в новом смысле) все непрерывные, а также конечные антагонистические игры (см. гл. 3).

Конечной антагонистической (или матричной) игрой называется тройка (2.6), где множества стратегий U_1 *и* U_2 *состоят из конечного числа точек, а* $g(u_1,u_2)$ - *функция дискретного аргумента.*

Если множество U_1, содержит n точек, то выбор каждой стратегии игроком 1 можно представить в виде выбора натурального числа i ($i=\overline{1,n}$). Аналогично, если множество U_2 содержит m точек, то выбор каждой стратегии игроком 2 можно представить в виде выбора натурального числа j $(j=\overline{1,m})$. Обозначим через a_{ij} значение функции g в ситуации, соответствующей выбору i-й чистой стратегии игрока 1 и j-й чистой стратегии игрока 2. Тогда конечную игру можно задавать матрицей $A = \|a_{ij}\|$ размера $n\times\ m$ (отсюда и название - матричная игра). Теперь стратегией игрока 1 является выбор строки i матрицы A, стратегией игрока 2 - выбор столбца j матрицы A, выигрыш игрока 1 в ситуации (i,j) равен a_{ij}, а игрока 2 соответственно - a_{ij}.

Нижняя и верхняя цены матричной игры

$$\underline{v} = \max_{1\le i\le n}\min_{1\le j\le m} a_{ij},$$

$$\bar{v} = \min_{1\le j\le m}\max_{1\le i\le n} a_{ij}.$$

Равенство $\underline{v} = \bar{v}$ имеет место тогда и только тогда, когда матрица A содержит седловую точку (i_0,j_0), т.е. $a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j} \quad \forall i,j$. В этом случае общее значение нижней и верхней цены игры называется *ценой игры, а* i_0 *и* j_0 *- оптимальными стратегиями игроков.*

Пример 2.6. В игре с матрицей $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ пара стратегий (1,1) составляет седловую точку, цена игры равна 1. Выбором первой строки игрок 1 гарантирует выигрыш не меньше 1, выбором первого столбца игрок 2 гарантирует себе проигрыш не больше 1. Значит, при разумных игроках выигрыш игрока 1 равен 1 (игрок 2 получает-1).

Если $\underline{v} < \bar{v}$, то выигрыши игроков однозначно не определены (можно указать только разумный диапазон).

Пример 2.7. В игре с матрицей $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ нижняя и верхняя цены соответственно $\underline{v}$ = 1, $\bar{v}$ = 2, т.е. игрок 1 может гарантировать себе выигрыш не меньше 1, а игрок 2 — проигрыш не более 2. У каждого игрока обе стратегии являются оптимальными гарантирующими, но без дополнительных предположений исход игры и выигрыш неоднозначны.

Упражнения и задачи

2.1. Поражаемая мишень состоит из четырех отдельных частей. Для поражения объекта необходимо поразить не менее двух частей, в том числе обязательно первую и третью. Пусть для i = 1,2,3,4

$$W_i = \begin{cases} 1, если i - я \div астьпоражена, \\ 0, если i - я \div астьнепоражена; \end{cases}$$

$$W_0 = \begin{cases} 1, еслиобъектпоражен, \\ 0, еслиобъектнепоражен. \end{cases}$$

Записать критерий W_0 как функцию критериев W_1, W_2, W_3,W_4 , используя только операции взятия максимума и минимума.

2.2. Пусть $x \in M_0 = \{1,2,3\}, y \in N = \{1,2,3\}, (W_1(x,y))_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$(W_2(x,y))_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (W_3(x,y))_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать обобщенный критерий W_0, если:

а) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к увеличению значения хотя бы одного частного критерия;

б) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к одновременному увеличению значений всех частных критериев.

2.3. Частный критерий W_i принимает значение 1, если выполнена i-я частная цель, и значение 0 - в противном случае, i =1,...,s. Записать обобщенный критерий W_0, используя только операции взятия максимума и минимума, если цель оперирующей стороны состоит в следующем:

а) достигнуть хотя бы одной пары целей с соседними номерами;

б) для любой пары целей с соседними номерами достигнуть хотя бы одной цели из пары.

2.4. Пусть игрок 1 имеет две, игрок 2 - три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1. В противном случае фишки выигрывает игрок 2. Запишите нормальную форму игры.

2.5. Докажите, что доминируемая чистая стратегия не может быть оптимальной.

2.6. Пусть даны две игры $A_1 = \|a_{ij}\|$ и $A_2 = \|k \cdot a_{ij}\|$, $k>0$, а $\nu(A_1)$ и $\nu(A_2)$ - их значения. Покажите, что эти игры имеют одинаковые оптимальные стратегии и $\nu(A_2) = k \cdot \nu(A_1)$.

2.7. Пусть игра $A = \|a_{ij}\|$ имеет седловую точку в смешанных стратегиях.

а) Пусть существует такой индекс k: $a_{ik}<0$ для всех i. Докажите, что в этом случае $\nu(A) < 0$.

б) Пусть существует такой индекс l: $a_{lj}>0$ для всех j. Докажите, что в этом случае $\nu(A) > 0$.

2.8. Конечная игра называется **симметричной,** если ее матрица квадратная и $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j. Докажите, что значение симметричной игры равно 0. Кроме того, если x есть оптимальная стратегия игрока 1, то x есть также оптимальная стратегия для игрока 2.

2.9. **Диагональной** называется игра, матрица которой имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$ где $a_1, \dots, a_n > 0$. Докажите, что значение $\nu(A)$ положительно.

2.10. Покажите, что множество оптимальных стратегий всегда замкнуто, выпукло и ограничено и, следовательно, является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

2.11. Покажите, что в $m \times m$-игре, каждая строка и каждый столбец которой содержит все целые числа от 1 до m, $v = \frac{m+1}{2}$.

2.12. Покажите, что игра с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, где a, b, $c>0$, имеет единственное решение. А в случае $a>b>c$, $c<0$?