$q_1=\ldots=q_m=0$ он может иметь только одну общую точку — начало координат, поэтому разделяющая P и R_+^{m+1} гиперплоскость не обязана совпадать с этой гранью, но если гиперплоскость отлична от грани $q_1 = \ldots = q_m = 0$, то у определяющего ее вектора $(m+1)$-я компонента отлична от нуля.

Итак, $a_{m+1} > 0$, а так как уравнение определяемой вектором a разделяющей гиперплоскости $< a, z >=0$ и расположение "положительного" и "отрицательного" полупространств не изменяется от умножения вектора a на любое положительное число, то можно считать, что $a_{m+1} = 1$.

Обозначим теперь вектор из первых m компонент вектора a через y^o и покажем, что y^o — решение задачи (2.46) - (2.48). Имеем

$$< y^o, b - Ax > + < c , x- x^o > \leq 0 \ \forall \ x \geq 0,$$

откуда

$$< c - A^{\mathrm{T}}y^o, x > \ \leq \ < c, x^o > - < b, y^o > \ \forall \ x \geq 0. \qquad (2.51)$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого $x \geq 0$, то $A^{\mathrm{T}}y^o \geq c$ (в противном случае хотя бы одна из компонент вектора $c - A^{\mathrm{T}}y^o$ положительна и, выбирая вектор x с большой данной компонентой и нулевыми остальными, получим в левой части неравенства сколь угодно большое число, т.е. придем к противоречию).

Значит $y^0 \geq 0$ и $A^{\mathrm{T}} y^0 \geq c$, т.е. y^0 — допустимый план задачи (2.46) - (2.48). Положим теперь в неравенстве (2.51) $x = 0$, получим

$$< c, x^0 > - < b, y^0 > \geq 0.$$

Но, с другой стороны, из (2.49) следует, что должно выполняться обратное неравенство, значит, справедливо равенство (2.50), но отсюда, как было доказано, следует, что y^0 — решение задачи (2.46) - (2.48).

Таким образом, если прямая задача имеет решение, то и двойственная задача имеет решение, и экстремальные значения этих задач совпадают. Если двойственная задача не имеет решения, то и прямая задача не имеет решения, так как, предположив существование решения прямой задачи, мы получим по доказанному, что существует решение двойственной задачи, т.е. придем к противоречию. Но задачи (2.17) - (2.19) и (2.46) - (2.48) являются взаимодвойственными, т.е. разделение их на прямую и двойственную является чисто условным, поэтому аналогично справедливы утверждения, что если двойственная задача имеет решение, то и прямая имеет решение и экстремальные значения этих задач совпадают, если двойственная задача не имеет решения, то и прямая не имеет решения. Теорема доказана полностью.

Следующее утверждение называется второй теоремой двойственности.

Теорема двойственности 2. *Если x^0 и y^0 — соответственно решение задач* (2.17) - (2.19) *и* (2.46) - (2.48)*, то*

$$1) \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i \Rightarrow y_i^0 = 0,$$

$$y_i^0 > 0 \ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = b_i;$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^0 > c_j \Rightarrow x_j^0 = 0,$$

$$x_j^0 > 0 \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 = c_j.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $< y^0,\ b - Ax^0 >$. Так как $y^0 \geq 0,\ Ax^0 \leq b$, то $< y^0,\ b - Ax^0 > \geq 0$. С другой стороны, $< y^0,\ b - Ax^0 > = < b,\ y^0 > - < A^{\text{т}}y^0,\ x^0 > \leq < b,\ y^0 > - < c,\ x^0 > = 0$, значит, $< y^0, b - Ax^0 >=0$, т.е. $\sum_{i=1}^{m} y_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0,$ откуда следует первое утверждение теоремы.

Аналогично, если рассмотреть $< x^0,\ A^{\text{т}} y^0 - c >$, то, с одной стороны, в силу $x^0 \geq 0,\ A^{\text{т}} y^0 \geq c$ выполняется неравенство $< x^0,\ A^{\text{т}}y^0 - c > \geq 0$, а с другой стороны,

$$< x^0, A^{\text{т}}y^0 - c > = <Ax, y^0 > - < c, x^0 > \leq <b, y^0> - <c, x^0> = 0,$$

значит $< x^0, A^{\text{т}}y^0 - c > = 0$ и справедливо второе утверждение теоремы.

Установленные свойства двойственных задач используются в ряде вычислительных алгоритмов для ускорения или упрощения процесса решения.

Мы рассмотрим это на примере транспортной задачи.

2.4. Транспортная задача

Наряду с общими методами (например, симплекс-методом) в линейном программировании имеются специальные методы и модификации, которые позволяют ускорить процесс решения, учитывая специфику задачи (главным образом, структуру ограничений). К числу специальных задач, для которых созданы собственные методы решения, относится, в первую очередь, транспортная задача. Внимание к этой задаче обусловлено тем, что она, во-первых, имеет важное прикладное значение, во-вторых, к ней сводятся многие другие задачи линейного программирования (сетевые задачи, задача о назначениях, задачи календарного планирования), в-третьих, структура ограничений этой задачи обладает ярко выраженной спецификой, которую удается эффективно использовать при разработке вычислительных методов. Рассмотрим некоторые из них. Будем предполагать, что имеет место баланс наличия товара и потребности в нем (2.7) (задачи с нарушенным балансом как в одну, так и в другую сторону легко сводятся к этому случаю путем введения дополнительного “фиктивного” склада или пункта потребления).

Тогда задача сводится к минимизации (2.5) при ограничениях (2.6), (2.8), (2.2).

План этой задачи представляет собой вектор размерности mn; если его компоненты записать в следующем порядке:

$$x = (x_{11},\ldots, x_{1n}, x_{21},\ldots, x_{2n},\ldots, x_{m1},\ldots, x_{mn}),$$

то матрица коэффициентов имеет вид

$$A=\left[\begin{array}{cccc} \overbrace{1\ \cdots\ 1}^{n} & \overbrace{}^{n} & \cdots & \overbrace{}^{n} \\ & 1\ \cdots\ 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\ \cdots\ 1 \\ 1\qquad & 1\qquad & & 1\qquad \\ \ddots & \ddots & & \ddots \\ \qquad 1 & \qquad 1 & & \qquad 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}m\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}n\end{array} \qquad (2.52)$$

(на остальных местах стоят нули).

Среди $m + n$ ограничений типа равенств (2.6), (2.8) независимыми в силу условия баланса (2.7) являются не более $m+n-1$, значит можно положить равными нулю по крайней мере

$$k= mn - (m+n-1) = (m-1)(n-1)$$

компонент и найти все остальные из уравнений (2.6), (2.8), т.е. базис для транспортной задачи состоит не более чем из $m+n-1$ векторов, а опорный план имеет не более чем $m+n-1$ ненулевых компонент.

Множество допустимых планов транспортной задачи, очевидно, непусто и ограничено, следовательно, она всегда имеет решение.

Рассмотрим сначала вопрос о нахождении начального опорного плана транспортной задачи. Простейший способ ее построения, так называемый метод “северо-западного угла”, состоит в следующем. Будем заполнять таблицу.

Таблица 1

	1	*2*	…	*n*	
1					a_1
2					a_2
⋮					…
m					a_m
	b_1	b_2	…	b_n	//////////

Клетка на пересечении i-й строки и j-го столбца соответствует переменной x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Клетка в “северо-западном углу” соответствует переменной x_{11}. Положим $x_{11}^* = \min(a_1, b_1)$. Если при этом $x_{11}^* = a_1$, т.е. $a_1 \le b_1$, то весь запас товаров со склада S_1 направлен в пункт потребления P_1 и, значит,

$$x_{1j}^* = 0,\ j = \overline{2,n}.$$

Если же $x_{11}^* = b_1$, т.е. $a_1 \ge b_1$, то потребности пункта потребления P_1 удовлетворены и, значит,

$$x_{i1}^* = 0,\ i = \overline{2,m}.$$

Таким образом, после первого шага с учетом изменений запаса товара на S_1 и потребности в товаре P_1 получим одну из двух таблиц

Таблица 2

a_1	0	…	0	0
				a_2
				$\vdots$
				a_m
b_1-a_1	b_2	…	b_n	////

Таблица 3

b_1				a_1- b_1
0				a_2
$\vdots$				$\vdots$
0				a_m
0	b_2	…	b_n	////////

Эти таблицы отличаются от начальной тем, что у них заполнены либо первая строка, либо первый столбец. Снова рассматриваем клетку в “северо-западном” углу. Для табл. 2 это клетка на пересечении второй строки и первого столбца; соответствующая переменная полагается равной $x_{21}^* = \min\,(a_2, b_1 - a_1)$. Для табл. 3 это клетка на пересечении первой строки и второго столбца; соответствующая переменная полагается равной $x_{12}^* = \min\,(a_1 - b_1, b_2)$. В любом случае, заполняя нулями соответствующую строку или столбец, получаем таблицу, в которой заполнены либо две первые строки, либо два первых столбца, либо первая строка и первый столбец. Продолжая этот процесс до полного заполнения табл. 1, получим, очевидно, допустимый план x^*, причем нетрудно показать, что план x^* является опорным.

Имея опорный план, мы можем применить для решения транспортной задачи симплекс-метод. Однако в данном случае удобно использовать двойственную задачу, так как она имеет весьма простой вид

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) \tag{2.53}$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}. \tag{2.54}$$

Задача (2.53), (2.54) получена по общему правилу построения двойственных задач с учетом вида матрицы A (см.(2.52)).

Вектор $y=(u_1,\ldots, u_m, v_1,\ldots, v_n)$, являющийся допустимым планом двойственной задачи (2.53), (2.54), может иметь как положительные, так и отрицательные компоненты.

Из второй теоремы двойственности следует, что если x^0 и y^0 — оптимальные планы задач (2.5), (2.6), (2.8), (2.2) и (2.53), (2.54), то

$$x_{ij}^0 (c_{ij} - u_i^0 - v_j^0) = 0,$$

т.е. либо $x_{ij}^0 = 0$, либо $u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}$ (возможно одновременно). В данном случае оказывается, что это свойство можно использовать как признак оптимальности. Точнее, если x^0 и y^0 — допустимые планы этих задач и если для индексов i, j, для которых $x_{ij}^0 > 0$, выполняется $u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}$, то x^0 — оптимальный план транспортной задачи.

Действительно, при этом выполняется

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^{0} = \sum_{i,\,j:x_{ij}^{0}>0:} c_{ij}x_{ij}^{0} = \sum_{i,\,j:x_{ij}^{0}>0} (u_i^0+v_j^0)x_{ij}^{0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i^0+v_j^0)x_{ij}^{0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i^0 \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{0} + \sum_{j=1}^{n} v_j^0 \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{0} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^0 + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^0,$$

т.е. x^0 и y^0 доставляют одинаковые значения целевым функциям двойственных задач, значит, они являются решениями этих задач.

Переменные u_i и v_j двойственной задачи называются потенциалами складов S_i и пунктов потребления P_j, а их суммы $\tilde{c}_{ij} = u_i + v_j$ — псевдостоимостями перевозок. Таким образом, признаком оптимальности допустимого плана транспортной задачи x^0 являются условия:

$$\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n},$$

$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$ для базисных переменных ($x_{ij}^0 > 0$).

Эти условия используются в модификации симплекс-метода, называемой методом потенциалов, которая применительно к решению транспортной задачи является весьма удобной и эффективной.

Алгоритм метода потенциалов состоит в следующем. Выбирается начальный опорный план x^* транспортной задачи (например, методом “северо-западного угла”). Он имеет не более $n+m-1$ ненулевых компонент. Обозначим множество пар индексов (i, j), для которых $x_{ij}^* > 0$ через Π^*. Для определения $m+n$ двойственных переменных $u_i^*, v_j^*, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n},$ имеем систему уравнений

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij}, \quad (i,j)\in \Pi^*. \tag{2.55}$$

В системе (2.55) число уравнений меньше числа неизвестных, поэтому можно одно неизвестное положить равным нулю и легко найти последовательно все остальные. Далее, для пар индексов $(i, j)\notin \Pi^*$ проверяются неравенства

$$\Delta_{ij}^* = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) \ge 0.$$

Если $\Delta_{ij}^* \ge 0 \quad \forall (i,j)\notin \Pi^*$, то данный опорный план x^* является оптимальным. Если существует пара (i_0, j_0), для которой $\Delta_{i_0 j_0}^* < 0$, то x^* не является оптимальным и осуществляется переход к новому опорному плану, в котором переменная $x_{i_0 j_0}$ уже будет базисной, т.е. будет осуществляться перевозка из S_{i_0} в P_{j_0}. Для простого определения такого опорного плана используется циклическая переброска. В табл. 1, заполненной компонентами предыдущего опорного плана x^*, выбирается замкнутая ломаная линия, которая начинается и заканчивается в клетке (i_0, j_0), кроме этой клетки линия имеет вершины (точки излома) только в клетках, соответствующих базисным переменным плана x^*, и в каждой вершине делает поворот на 90^0.

Пусть получилась последовательность пар индексов, соответствующих вершинам цикла, (i_0, j_0), (i_1, j_0),(i_1, j_1)…(i_0, j_k). Число членов этой последовательности, очевидно, четно.

Положим

$$\theta = \min_{0 \le r \le k} x^*_{i_{r+1} j_r} > 0 \qquad (2.56)$$

(здесь для единообразия считается $i_{k+1}=i_0$).

Возьмем новый план, у которого компоненты, соответствующие нечетным членам построенной последовательности, больше соответствующих компонент плана x^* на θ, компоненты, соответствующие четным членам последовательности, меньше на θ, а остальные — равны компонентам плана x^*. Новый план x' является, очевидно, допустимым и опорным, он имеет одну новую базисную переменную $x^*_{i_0 j_0} = \theta$, а одна бывшая базисная переменная плана (на которой достигается минимум в (2.56)) в плане x' равна нулю. При переходе от плана x^* к плану x' изменение целевой функции равно

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x'_{ij} - x^*_{ij}) = c_{i_0 j_0}(x'_{i_0 j_0} - x^*_{i_0 j_0}) +$$

$$+ c_{i_1 j_0}(x'_{i_1 j_0} - x^*_{i_1 j_0}) + c_{i_1 j_1}(x'_{i_1 j_1} - x^*_{i_1 j_1}) + \ldots + c_{i_0 j_k}(x'_{i_0 j_k} - x^*_{i_0 j_k}) =$$

$$= \theta\left[c_{i_0 j_0} - (u^*_{i_0} + v^*_{j_0}) + (u^*_{i_1} + v^*_{j_1}) - \ldots + (u^*_{i_k} + v^*_{j_k}) - (u^*_{i_0} + v^*_{j_k})\right] = \theta\left[c_{i_0 j_0} - u^*_{i_0} - v^*_{j_0}\right] =$$

$$= \theta\, \Delta^*_{i_0 j_0} < 0,$$

т.е. новый план лучше старого.

Принимая x' за начальный опорный план, делаем следующую итерацию. За конечное число шагов придем к оптимальному плану.

Для иллюстрации описанного процесса решения транспортной задачи рассмотрим численный пример и для него построим начальный опорный план по методу “северо-западного угла” и сделаем одну итерацию по методу потенциалов.

Пусть в транспортной задаче $m=3$, $n=4$, $a_1=20$, $a_2=12$, $a_3=8$, $b_1=10$, $b_2=15$, $b_3=8$, $b_4=7$, а коэффициенты линейной формы проставлены в правых верхних углах клеток табл. 4, в которой методом “северо-западного угла” построен начальный опорный план.

Таблица 4

S \ P	P_1	P_2	P_3	P_4	a
S_1	10 ^{10}	10 ^{8}	0 ^{6}	0 ^{5}	20
S_2	0 ^{5}	5 ^{10}	7 ^{6}	0 ^{9}	12
S_3	0 ^{6}	0 ^{5}	1 ^{3}	7 ^{5}	8
b	10	15	8	7	$\sum = 40$

Найдем теперь потенциалы. Уравнения (2.55) здесь имеют вид

$u_1+v_1=10$, $\qquad u_2+v_3=6$,
$u_1+v_2=8$, $\qquad u_3+v_3=3$,
$u_2+v_2=10$, $\qquad u_3+v_4=5$.

Положим $u^*_1 = 0$, получаем $v^*_1=10$, $v^*_2=8$, $u^*_2=2$, $v^*_3=4$, $u^*_3=-1$, $v^*_4=6$. Посчитаем псевдостоимости для внебазисных переменных

$$\tilde{c}^*_{21} = 12, \quad \tilde{c}^*_{31} = 9, \quad \tilde{c}^*_{32} = 7, \quad \tilde{c}^*_{13} = 4, \quad \tilde{c}^*_{14} = 6, \quad \tilde{c}^*_{24} = 8.$$

Начальный опорный план не является оптимальным, так как, например, $\tilde{c}^*_{21} > c_{21}$. Сделаем x_{21} новой базисной переменной. Для построения нового опорного плана осуществим переброску по циклу из четырех клеток (2,1), (1,1), (1,2), (2,2); в количестве $\theta = 5$ (см. табл. 4). При этом получим новый опорный план x', у которого $x'_{11} = 5,\quad x'_{12} = 15,\quad x'_{22} = 0,\quad x'_{21} = 5$, и уменьшим значение целевой функции на 35. Продолжая этот процесс, получим решение задачи (проделать в качестве упражнения).

Пример 1.

Решить задачу линейного программирования, используя в качестве начальной угловой точки $x^{(0)}$ базисное решение, соответствующее свободным переменным x_1 и x_3.

$$f(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 20 \\ x_2 + x_5 = 50 \\ x_3 + x_6 + 30 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60, x_j \ge 0, (j = 1,...,6) \end{cases}$$

Решение.

В данном случае матрица системы ограничений-равенств имеет вид:

$A = \begin{pmatrix} 100100 \\ 010010 \\ 001001 \\ 000111 \end{pmatrix}$, ее ранг r = 4 = m. Столбцы с номерами 2, 4, 5 и 6 матрицы A системы ограничений-равенств данной задачи образуют базисный минор. С помощью эквивалентных преобразований приводим эту систему к виду

$$\begin{cases} x_2 + x_1 + x_3 = 40 \\ x_4 + x_1 = 20 \\ x_5 - x_1 - x_3 = 10 \\ x_6 + x_3 = 30 \end{cases}, \tag{1}$$

где базисными являются переменные x_2, x_4, x_5, x_6. Полагая в равенствах (1) свободные переменные x_1 и x_3 равными нулю, находим $x_2 = 40,\ x_4 = 20,\ x_5 = 10,$ $x_6 = 30$, т.е. базисное решение $x^{(0)} = (0,40,0,20,10,30)$. Так как все базисные переменные в $x^{(0)}$ положительны, данное базисное решение является допустимым (т.е. угловой точкой) и невырожденным. Исключив с помощью (1) базисные переменные в выражении для целевой функции, получим

$$f(x) = 880 - 7x_1 - 14x_3. \tag{2}$$

С помощью равенств (1), (2) составляем симплекс-таблицу, соответствующую угловой точке $x^{(0)}$:

	x_1	x_3	
x_2	1	1	40
x_4	1	0	20
x_5	-1	-1	10
x_6	0	1	30
	-7	-14	-880

Среди коэффициентов есть отрицательные — это элементы -7 и -14 последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $x^{(0)}$ не является решением задачи.

Найдем разрешающий элемент. В качестве опорного можно взять любой из столбцов таблицы, соответствующих переменным x_1 и x_3. Выберем, например, столбец при свободной переменной x_3.

Так как min (40/1,30/1)=30/1, то разрешающей является строка, соответствующая базисной переменной x_6. Итак, опорный элемент выделен в симплекс-таблице.

Заполнив новую симплекс-таблицу, получим:

	x_1	x_6	
x_2	**1**	-1	10
x_4	1	0	20
x_5	-1	1	40
x_3	0	1	30
	-7	14	-460

Отметим, что значение $f(x)$ в новой угловой точке уменьшилось по сравнению со значением в исходной — 460 вместо 880. В нижней строке последней таблицы есть отрицательный элемент -7, стоящий в столбце при свободной переменной x_1. Кроме того, в этом столбце имеются положительные элементы, поэтому возможно дальнейшее уменьшение $f(x)$ с помощью очередного шага симплекс-метода.

На данном шаге выбор опорного столбца однозначен и определяется отрицательным элементом -7 последней строки. Так как min (10/1,20/1)=10/1, то строка при базисной переменной x_2 является разрешающей. Опорный элемент в последней таблице выделен.

Как и на предыдущем шаге находим очередную симплекс-таблицу:

	x_2	x_6	
x_1	1	-1	10
x_4	-1	1	10
x_5	1	0	50
x_3	0	1	30
	7	7	-390

В этой симплекс-таблице в последней строке оба коэффициента положительны.

Поэтому угловая точка $x^{(2)}$, соответствующая свободным переменным x_2, x_6, является точкой минимума целевой функции. $f(x): x^* = x^{(2)} = (10;0;30;10;50;0)$. Минимальное значение $f(x)$ со знаком минус записано в правом нижнем углу симплекс-таблицы, поэтому $f^* = 390$.

Задачи и упражнения

Решить задачи 1-6 симплекс-методом, используя $x^{(0)}$ в качестве начальной угловой точки.

1.
$$f(x) = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (0;0;1;2;1).$$

2.
$$f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (1;2;2;0;0).$$

2.
$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (2;1;2;0;0).$$

4.
$$f(x) = x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ -8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (0;1;1;0;1).$$

5.
$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (1;1;2;0;0).$$

6.
$$f(x) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 1, \\ -3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots 5,\ x^{(0)} = (0;1;1;1;0).$$

Задачи 7-16 решить симплексным методом путем преобразования симплекс-таблиц. Дать геометрическую интерпретацию задачи, используя для этого ее формулировку с ограничениями-неравенствами.

Предприятию нужно перевезти со склада по железной дороге изделия 3 различных видов: изделий 1 вида не более чем P_1, изделий 2 вида не более P_2, изделий 3 вида не более P_3. Подразделение железной дороги может для этой перевозки выделить специально оборудованные вагоны двух типов А и В. Для полной загрузки вагона следует помещать в него изделия всех трех видов. При этом в вагон типа А входят a_1 изделий 1 вида, a_2 изделий 2 вида, a_3 изделий 3 вида, в вагон типа В входят $в_1$ изделий 1 вида, $в_2$ изделий 2 вида, $в_3$ изделий 3 вида. Экономия от перевозки груза в вагоне типа А составляет α *руб.*, в вагоне типа В — β *руб*. Сколько вагонов каждого типа следует выделить для перевозки, чтобы суммарная экономия от перевозки груза была наибольшей?

	a_1	a_2	a_3	$в_1$	$в_2$	$в_3$	p_1	p_2	p_3	α	β
7	16	8	5	4	7	9	784	552	567	4	6
8	12	10	3	3	5	6	684	690	558	6	2
9	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5
10	11	8	5	3	4	3	671	588	423	5	2
11	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
12	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
13	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
14	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
15	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
16	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	5

Решить следующие задачи **17-25** линейного программирования симплекс-методом.

17. Одной из ученических бригад выделили два участка земли в 8 *га* и в 9 *га* под посевы пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по участкам и культурам отражена в таблице (в *ц* на *га*).

	1	2
Пшеница	16	14
Кукуруза	35	30

За 1 *ц* пшеницы получают 2,5 *руб.*, за 1 *ц* кукурузы — 1,4 *руб*. Сколько гектаров и на каких участках необходимо отвести под каждую культуру, чтобы получить наибольшую сумму от реализации продукции, если по плану надо собрать не менее 150 *ц* пшеницы и 220 *ц* кукурузы?

18. Имеется три вида сырья: A, B, C, которые используются для производства двух видов продукции — 1 и 2. В распоряжении находятся 500 единиц сырья A, 750 единиц сырья B и 200 единиц сырья C. Продукт 1 состоит из одной единицы сырья A и двух единиц сырья B. Продукт 2 состоит из двух единиц сырья A, одной единицы сырья B и одной единицы сырья C. Доход от производства одной единицы продукта 1 составляет 4 *руб.*, а от единицы продукта 2 — 5 *руб.* Сколько единиц каждого продукта нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?

19. Для изготовления определенного изделия требуется три планки: одна размером 1,2 *м* и две по 1,5 *м* каждая. Для этой цели можно использовать имеющийся запас реек — 400 *штук*, длиной по 5 *м* каждая, и 100 *штук*, длиной по 6,5 *м* каждая. Определить, как разрезать все эти рейки, чтобы получить наибольшее количество вышеуказанных изделий.

20. Необходимо составить наиболее дешевую смесь из трех веществ. В состав смеси должно входить не менее 6 единиц химического вещества A, не менее 8 единиц вещества B и не менее 12 единиц вещества C. Имеется три вида продукции (1, 2, 3), содержащих эти химические вещества в следующих пропорциях:

	A	B	C
1	2	1	3
2	1	2	4
3	3	1,5	2

Стоимость одной весовой единицы продукта 1 — 2 *руб.*, продукта 2 — 3 *руб.*, продукта 3 — 2,5 *руб.*

21. На рынок в город привозят одним видом транспорта картофель из трех совхозов по 4, 3 и 1 *руб.* за 10 *кг*. На погрузку тонны картофеля ленточным методом требуется в первом совхозе 1 *мин.*, во втором — 4 *мин.,* в третьем — 3 *мин.* Чтобы продукт вовремя поступал на рынок, надо, чтобы на погрузку 12 *т*, необходимых для города на каждый день, затрачивалось не более 40 *мин.* Сколько надо привозить на рынок картофеля из этих совхозов, чтобы общая стоимость картофеля на рынке была минимальной, если известно, что 1 совхоз может ежедневно отправлять не более 10 *т*, 2 совхоз — не более 8 *т*, 3 совхоз — не более 6 *т*?

22. Имеется три экскаватора разных марок. С их помощью надо выполнить три вида земельных работ объемом в 20000 $м^3$. Время работы экскаваторов одинаково, производительность в $м^3/ч$ по каждому виду работ приведена в таблице:

Экскаватор	Вид работы:		
	A	B	C
1	105	56	56
2	107	66	83
3	64	38	53

Распределить время работы каждого экскаватора так, чтобы задание было выполнено в кратчайший срок.

23. Груз, находящийся в пунктах A и B, необходимо перебазировать в пункты C и D. В этих пунктах имеется соответственно груза на 6 и 4 машины. В пункты C и D надо отправить соответственно 3 и 7 машин груза. В таблице указаны расстояния между пунктами в километрах. Требуется спланировать перевозки так, чтобы суммарный пробег был наименьшим.

	C	D
A	80	30
B	60	90

24. Для участия в командных соревнованиях по легкой атлетике спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов 1 и 2 разрядов. Соревнования проводятся по бегу, прыжкам в высоту и прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину — 8 спортсменов, в прыжках в высоту — не более 10. Количество очков, гарантируемое спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в таблице:

Разряд	Бег	Прыжки в высоту	Прыжки в длину
1	4	5	5
2	2	3	3

Распределить спортсменов команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде 1 разряд имеют только 10 спортсменов.

25. Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. В приведенной ниже таблице заданы количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплутационные расходы:

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям				Эксплутационные расходы на один самолет по авиалиниям			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	17	70	28	15	45
3	30	35	50	30	45	40	70	40	65

Надо распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплутационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000 и 500 единиц груза.

26. На трех складах A, B, C находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 *т*, которое надо доставить в четыре пункта: пункту 1 — 5 *т*, 2 — 10 *т*, 3 — 20 *т*, и 4 — 15 *т*. Стоимость доставки одной тонны со склада A в указанные пункты соответственно равны 80, 30, 50, 20 *руб*.; со склада B — 40, 10, 60, 70 *руб*. и со склада C — 10, 90, 40, 30 *руб*. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

27. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа A и 360 изделий типа B в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа A вчетверо дороже изделий типа B. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

28. Для изготовления изделий двух видов склад может отпустить металла не более 80 *кг*, причем на изделие 1 вида расходуется 2 *кг*, а на изделие 2 вида — 1 *кг*. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий 1 вида требуется изготовить не более 30 *шт*., а изделий 2 вида не более 40 *шт*., причем одно изделие 1 вида стоит 5 *руб*., а 2 вида — 3 *руб*.

29. Фирме "Иерихонская сталь" предстоит решить, какое количество чистой стали и металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для своего заказчика, чтобы максимизировать прибыль. Производственные затраты в расчете на 1 *т* чистой стали равняются 3 усл.ед., а затраты на 1 *т* металлолома — 5 усл.ед. Заказ предусматривает не менее 5 *т* литья. Запасы чистой стали не превышают 4 *т*, а запасы металлолома — 6 *т*. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7:8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 *ч*; при этом на 1 *т* стали уходит 3 ч, а на 1 *т* металлолома — 2 *ч* производственного времени.

30. Производственная мощность цеха сборки составляет 220 изделий типа A и 160 изделий типа B в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа A вчетверо дешевле изделий типа B. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль

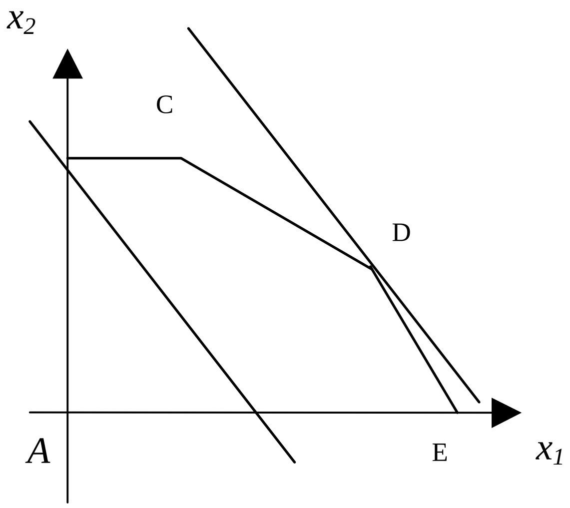
Пример 2.

Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3, x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Решение.

Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество D (многоугольник ABCDE) и одну из линий уровня $-3x_1 - 2x_2 = c$ целевой функции. Направление убывания $f(x)$ указывает вектор $e = (3,2)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления e, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-3x_1 - 2x_2 = c$ проходит через вершину D(3,2) многоугольника ABCDE. Поэтому целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение $f*$ в точке $x* = (3,2)$, причем $f* = f(3,2) = -13$.



Решите графическим методом следующие задачи линейного программирования.

31. $z_{\min} = -2x_1 + 5x_2$ при
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

32. $z_{\max} = 3x_1 - 2x_2$ при
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

33. $z_{\min} = 2x_1 - 10x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

34. $z_{\min} = x_1 - 10x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{2} \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

35. $z_{\max} = 2x_1 - 5x_2$ при
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

36. $z_{\max} = x_1 + 3x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 2, x_j \ge 0, (j = 1,2). \end{cases}$$

37. $z_{\max} = 2x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 4, x_j \ge 0, (j = 1,2). \end{cases}$$

38. $z_{\min} = 4x_1 + 6x_2$ при
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

39. $z_{\max} = 50x_1 + 40x_2$ при
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

40. $z_{\min} = x_1 - 2x_2$ при
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

41. $z_{\min} = -x_1 - 3x_2$ при
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

42. $z_{\min} = -2x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ 3x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

43. $z_{\min} = -x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

44. $z_{\min} = -x_1 - 4x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 3x, \\ 0 \le x_1 \le 2, \\ 0 \le x_2 \le 2. \end{cases}$$

45. $z_{\min} = -x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -1 \le x_1 - x_2 \le 1, \\ 0 \le x_1 \le 2, \\ 0 \le x_2 \le 2. \end{cases}$$

46. $z_{\min} = -2x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

47. $z_{\min} = -x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} 1 \le 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 0 \le x_1 \le 2. \end{cases}$$

48. $z_{\max} = 2x_1 + x_2$ при
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

49. $z_{min} = 2x_1 + 2x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

50. $z_{max} = 2x_1 + 2x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

51. $z_{\max} = 3x_1 + 3x_2$ при
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12, \\ 0 \le 2x_1 \le 6, \\ 0 \le 2x_2 \le 4. \end{cases}$$

52. $z_{\min} = 3x_1 + 4x_2$ при
$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \ge 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

53. $z_{max} = 8x_1 + 6x_2$ при
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ 0 \le x_1 \le 3; 0 \le x_2 \le \frac{19}{3}. \end{cases}$$

54. $z_{\min} = 10x_1 + 14x_2$ при
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \ge 35, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

55. $z_{\max} = -2x_1 - x_2 + 3$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

56. $z_{\min} = -x_1 - x_2 + 1$ при
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6 \ge 0, \\ -3x_1 - x_2 + 9 \ge 0, \\ x_{1?}x_2 \ge 0. \end{cases}$$

57. $z_{\max} = x_1 - x_2$ при
$$\begin{cases} 1 \le x_1 + x_2 \le 2, \\ 2 \le x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 1 \le 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

58. $z_{\min} = x_2 - x_1$ при
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

59. $z_{\max} = x_1 + 2x_2$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

60. $z_{\min} = -x_1$ при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 + 1 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$